

ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ
ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΟΣ ΤΕΧΝΙΤΟΥ

ΗΤΟΙ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΠΟΝΗΜΑ

ΒΡΑΒΕΥΘΕΝ ΕΝ ΤΩ ΜΕΤΑΞΑΙΩ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΙ

ΥΠΟ

Ν. Ι. ΣΟΛΩΜΟΥ

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΥ ΤΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΠΑΡΑ Τῌ ΣΤΡΑΤ. ΣΧΟΛῌ



Ν. Λ.

ΤΥΠΟΙΣ «ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ»

ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΔΩΝ ΑΙΟΛΟΥ ΚΑΙ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

—

1875

ΓΕΩΡΓΙΩ Α'.

ΕΛΛΗΝΩΝ ΑΝΑΚΤΙ

ΠΡΟΣΤΑΤΗ

ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΕ ΤΕΧΝΩΝ ΤΕ

ΤΟΔΕ ΤΟ ΠΟΝΗΜΑ

ΑΝΑΤΙΘΗΣΙΝ

Ο

ΣΥΓΓΡΑΦΕΥΣ

ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ
ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

Ὁρισμοὶ καὶ θεμελιώδεις γνώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

Γενικαὶ στοιχειώδεις γνώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'.

Ἁπλαῖ μηχαναί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'.

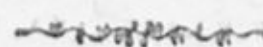
Μηχαναὶ ἀνυψώσεως ὕδατος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣΤ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ'.



ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΟΣ ΤΕΧΝΙΤΟΥ

ἢ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Ὁρισμοὶ καὶ ἀρχαί. — Περὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. — Αἱ τέσσαρες αὐτῶν πράξεις.

1. Καλεῖται μέγεθος ἢ ποσότης πᾶν τὸ ὑποκείμενον εἰς τὴν δι' ἀριθμῶν παράστασιν, τῇ συγκρίσει πρὸς ἑτέραν ὁμοίαν ποσότητα λαμβανομένην ὡς μονάδα.

Τὰ μήκη ἐκτιμώμενα εἰς πήχεις ἢ μέτρα, αἱ ἐπιφάνειαι εἰς τετραγωνικοὺς πήχεις ἢ μέτρα, τὰ βάρη εἰς ὀκάδας ἢ λίτρας, ὁ χρόνος εἰς ἔτη ἢ μῆνας εἰσὶν ποσότητες. Ὁ ἀριθμός, ἡ ἔκτασις καὶ ὁ χρόνος εἰσὶν ποσότητες εὐκόλως μὲν ἀντιλαμβανόμεναι, μὴ ὑποκείμεναι ὅμως εἰς ὁρισμὸν ἀκριβῆ.

2. Ἡ ἀριθμητικὴ ἐστὶν ἐπιστήμη τοὺς ἀριθμοὺς πραγματευομένη.

Ἡ ἀντίληψις τοῦ ἀριθμοῦ καθὼς καὶ τῆς μονάδος ἧς παριστᾷ τὴν ἐπανάληψιν ἐστὶν ἔμφυτος.

3. Ὁ ἀριθμὸς εἷς ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ, καλεῖται δὲ ἁπλῆς ἢ πρώτης τάξεως· ἡ δεκάς, ἥτις ἐστὶν ἐπανάληψις δεκάκις τῆς μονάδος, καλεῖται μονὰς δευτέρας τάξεως· ἡ ἑκατοντάς, ἐπανάληψις δεκάκις τῆς δεκάδος ἢ ἑκατοντάκις τῆς μονάδος, καλεῖται μονὰς τρίτης τάξεως κτλ., ὥστε ἡ συνέχεια τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων προβαίνει δεκαπλασιαζομένη.

4. Πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν, γίνεται χρῆσις ψηφίων. Οἱ ἀριθμοὶ ὅθεν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τῆς δεκάδος παρίστανται διὰ τῶν ψηφίων

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

δι' ὧν τῇ συνδρομῇ δεκάτου ψηφίου, τοῦ 0, οὐδεμίαν ἀξίαν ἐν ἑαυτῷ περικλείοντος, δύνανται νὰ παρασταθῶσιν πάντες οἱ ἀριθμοί.

5. Πρὸς παράστασιν δεδομένου τινὸς ἀριθμοῦ διὰ ψηφίων, τίθενται διαδοχικῶς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιὰ οἱ ἐμφαίνοντες τὰς χιλιάδας, ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἑκάστης σχετικῆς μονάδος, καὶ πληροῦνται διὰ 00 αἱ θέσεις τῶν ἐλλειπουσῶν μονάδων. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς εἴκοσιν ἑκατομμύρια πεντακόσιαι δύο χιλιάδες ἑβδομήκοντα ὀκτὼ μονάδες, γράφεται 20 502 078. (ἑκ. χιλ. ἑκ. δ. μ.)

6. Καταφανὲς ἤδη γίνεται ὅτι πᾶν ψηφίον ἀριθμοῦ τινος, ἀριστερόθεν ἄλλου εὑρισκόμενον, παριστᾷ μονάδας δεκαπλασίως μείζονας τούτου. Ὁ νόμος οὗτος παρέχει τὴν διὰ τῶν ὀλίγων τούτων ψηφίων παράστασιν πάντων τῶν ἀριθμῶν.

7. Πᾶν ψηφίον ὅθεν ἀριθμοῦ τινος ἐμπεριέχει δύο ἀξίας, τὴν μὲν ὡς ἐκ τοῦ σχήματός του, ἥτις καλεῖται ἀπόλυτος, τὴν δὲ ὡς ἐκ τῆς θέσεως ἣν κατέχει καὶ ἥτις καλεῖται σχετική. Οὕτω ἐν τῷ ἀριθμῷ 507 ὁ 5 ἔχει πέντε μὲν ἀπόλυτον ἀξίαν, πέντε δὲ ἑκατοντάδας ὡς σχετικήν. Τὸ 0 ὅμως οὐδεμίαν ἀξίαν ἔχει σχετικὴν ἢ ἀπόλυτον, χρησιμεύει δὲ μόνον ἵνα τὰ λοιπὰ ψηφία λάβωσι τὰς προορισμένας διὰ τὴν σχετικήν των ἀξίαν θέσεις.

8. Πρὸς ἔκφρασιν ἀριθμοῦ τινος ὑποτίθεται οὗτος διαιρούμενος εἰς τάξεις ἐκ δεξιῶν ἀνὰ τρία ψηφία, ὧν ἡ τελευταία δύναται νὰ ἔχῃ δύο ἢ καὶ ἓν μόνον. Ἀκολούθως καὶ ἀριστερῶς ἀναγινώσκονται διαδοχικῶς αἱ τάξεις μὲ τὴν ἔκφρασιν τῆς μονάδος τῆς σχετικῆς τάξεως, ἣν τὰ ψηφία ἑκάστης τούτων παριστῶσιν. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 3502032 ἀναγινώσκεται, τρία ἑκατομμύρια πεντακόσιαι δύο χιλιάδες, τριάκοντα δύο (μονάδες). Ἡ ἔκφρασις πλειόνων δεκάδων γίνεται οὕτως· εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα κλ. Ἐπίσης ἀντὶ κατὰ τὸν κανόνα δέκα ἕνα, δέκα δύο, ἐκφράζονται οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἕνδεκα, δώδεκα.

9. *Ἀρίθμησις ἀρχαίων.* Ἡ ἀρίθμησις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἧς

καὶ ἔτι συχνάκις γίνεται χρῆσις εἰς ἐπιγραφὰς κλ. ἐγένετο διὰ τῶν εἰκοσιτεσσάρων γραμμάτων, τῇ προσλήψει ἔτι καὶ τριῶν σημείων, α′ τοῦ ϛ (στ) ἐπίσημον φαῦ, ἢ ἐπίσημον ἁπλῶς καλούμενον καὶ ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸν ἀριθμὸν 6, β′ τὸ ϟ κόππα καλούμενον καὶ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 90, καὶ γ′ τὸ ϡ, σαμπὶ καλούμενον καὶ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν 900.

Ἡ κατ' ἀριθμητικὴν χρῆσιν δύναμις τῶν γραμμάτων τούτων ἐστὶν ἡ ἑξῆς·

Μονάδες	Δεκάδες	Ἑκατοντάδες
1 . . . α′	10 . . . ι′	100 . . . ρ′
2 . . . β′	20 . . . κ′	200 . . . σ′
3 . . . γ′	30 . . . λ′	300 . . . τ′
4 . . . δ′	40 . . . μ′	400 . . . υ′
5 . . . ε′	50 . . . ν′	500 . . . φ′
6 . . . ϛ′	60 . . . ξ′	600 . . . χ′
7 . . . ζ′	70 . . . ο′	700 . . . ψ′
8 . . . η′	80 . . . π′	800 . . . ω′
9 . . . θ′	90 . . . ϟ′	900 . . . ϡ

Διὰ τῶν εἰκοσιεπτὰ τούτων ὀξυτονουμένων δεξιόθεν γραμμάτων ἐκφράζονται πάντες οἱ ἀριθμοὶ μέχρι τοῦ 999. Οὕτω 11, 12, . . . γράφονται ια′, ιβ′, . . . 21, 22 . . . κα′, κβ′. Οἱ 101 . . . 201 . . . ρα′ . . . σα′ . . . Οἱ 990, 991 . . . 999 ϡϟ, ϡϟα′ . . . ϡϟθ′.

Πρὸς ἔκφρασιν τῶν χιλιάδων ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ γράμματα πλὴν ὑπογεγραμμένα. Οὕτω 1000, 2000 παρίστανται ͵α, ͵β καὶ ἄχρι τοῦ ͵ϡ = 900000, ὥστε ὁ ἀριθμὸς ͵ϡϟθϡϟθ′ = 999999.

Πέραν τοῦ ͵ρ = 100000 γίνεται χρῆσις τοῦ ἐπιθέτου μύριοι ἡνωμένου μὲ τὰ ἐπιῤῥήματα δεκάκις, εἰκοσάκις κλ., ὥστε δεκάκις μύριοι = 100000, εἰκοσάκις μύριοι = 200000 κλ. Ὑπῆρχε καὶ ἕτερος τρόπος ἀριθμογραφίας παρὰ τοῖς ἀρχαίοις, πλὴν οὗτος μὴ ὢν ἤδη ἐν χρήσει, ἐστὶν ἀντικείμενον τῶν ἀρχαιολόγων.

10. *Ἀρίθμησις Ῥωμαίων*. Τῆς Ῥωμαϊκῆς ἀριθμήσεως γίνεται ἔτι χρῆσις εἰς χρονολογίας, ἐπιγραφὰς κεφαλαίων κλ. Ἔχει δὲ ὡς ἑξῆς·

Τὰ γράμματα αὐτῶν	I	V	X	L	C	D	M
παριστῶσι τοὺς ἀριθμοὺς	1	5	10	50	100	500	1000.

Ὁ ἀριθμὸς I τιθέμενος ἅπαξ, δίς, τρίς, δεξιόθεν τῶν I καὶ V αὐξάνει τὴν ἀξίαν των κατὰ μίαν, δύο, τρεῖς μονάδας, ἀριστερόθεν δὲ τοῦ V καὶ X ἐλαττοῖ αὐτὴν κατὰ μίαν μονάδα. Οὕτω γράφονται οἱ δέκα πρῶτοι ἀριθμοί·

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

Ὁμοίως ὁ X τιθέμενος δεξιόθεν τοῦ X καὶ L ἅπαξ, δίς, τρίς, αὐξάνει τὴν ἀξίαν των κατὰ μίαν, δύο, τρεῖς δεκάδας, ἀριστερόθεν δὲ τοῦ L καὶ C ἐλαττοῖ ὁμοίως τὴν ἀξίαν τούτων κατὰ μίαν δεκάδα. Οὕτω γράφονται οἱ ἀριθμοί·

X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	C
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100.

Πρὸς παράστασιν ἀριθμοῦ τινος ἐνδιαμέσου συνακολούθων δεκάδων, ἀρκεῖ ἵνα δεξιόθεν τοῦ ἀριθμοῦ τῆς μικροτέρας δεκάδος, γραφῇ ὁ τῆς σχετικῆς μονάδος· οὕτω 85 καὶ 62 γράφονται LXXXV καὶ LXII. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁ C τιθέμενος κατόπιν ἑαυτοῦ ἢ τοῦ D ἢ πρὸ τοῦ D καὶ M, παρέχει τὴν γραφὴν τῶν ἑκατοντάδων·

C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM	M
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000.

Ἡ γραφὴ κατόπιν ἑκάστου ἀριθμοῦ τῶν ἑκατοντάδων τούτων, τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ πίνακος τῶν δεκάδων, καὶ κατόπιν τούτου τοῦ σχετικοῦ ἐκ τοῦ πίνακος τῶν μονάδων, παρέχει τὴν γραφὴν ὅλων τῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦ M = 1000. Ἡ ἐπανάληψις τοῦ M πολλαπλασιάζει τὴν χιλιάδα, καὶ οὕτω παρέχεται ἡ γραφὴ πάντων τῶν ἀριθμῶν. Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ 1856 καὶ 4584 γράφονται MDCCCLVI καὶ MMMMDLXXXIV.

11. Πᾶσα ἐργασία σκοποῦσα τὴν σύνθεσιν ἢ ἀποσύνθεσιν τῶν ἀριθμῶν καλεῖται πρᾶξις.

Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ὑπάρχουσι τέσσαρες τοιαῦται πράξεις, καλούμεναι *θεμελιώδεις*, διότι πᾶσαι αἱ ἄλλαι εἰσὶ συνδυασμοὶ τούτων, εἰσὶ δ' οὗτοι ἡ *πρόσθεσις*, ἡ *ἀφαίρεσις*, ὁ *πολλαπλασιασμὸς* καὶ ἡ *διαίρεσις*.

Τὸ σύνολον πλειόνων τοιούτων πράξεων ἐπὶ ἀριθμῶν καλεῖται *ὑπολογισμός*.

12. Καλεῖται *θεώρημα* ἀλήθειά τις γενομένη φανερὰ διὰ συλλογισμοῦ ὅστις καλεῖται *ἀπόδειξις*.

Ἀξίωμα καλεῖται ἀλήθεια καθ' ἑαυτὴν φανερά, καὶ τοιαῦτα ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ὑπάρχουσι τὰ ἑξῆς·

ά. Δύο ποσότητες ἴσαι τρίτῃ τινὶ εἰσὶ καὶ μεταξύ των ἴσαι.

β'. Ἡ ἐκτέλεσις μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πράξεως ἐπὶ δύο ἴσων ποσοτήτων, παράγει ἀποτελέσματα ἴσα.

γ'. Συνόλου τινὸς δὲν μεταβάλλεται ἡ ἀξία ἀλλασσομένης τῆς τάξεως τῶν μελῶν του.

Πρόβλημα ἐστὶ ζήτημα ἀπαιτοῦν λύσιν.

Λῆμμα ἐστὶν ἀλήθεια ἧς ἡ ἀπόδειξις δέον νὰ προηγηθῇ ὅπως χρησιμεύσῃ πρὸς ἀπόδειξιν θεωρήματος ἢ λύσιν προβλήματος τινός.

Τὸ ὄνομα *πρότασις* ἀποδίδεται κοινῶς εἴς τε τὰ θεωρήματα, λήμματα καὶ προβλήματα.

Πόρισμα ἐστὶ συνέπεια πηγάζουσα ἐκ μιᾶς ἢ πλειοτέρων προτάσεων.

Καλεῖται βάσανος πράξεώς τινος, ἑτέρα τοιαύτη σκοποῦσα τὴν ἐξακρίβωσιν τοῦ ἐκ τῆς πρώτης ἀποτελέσματος.

13. Ἐν τοῖς διαφόροις ὑπολογισμοῖς γίνεται χρῆσις τῶν ἑξῆς σημείων·

Τοῦ $=$ ὅπερ ἐστὶν ἔκφρασις ἰσότητος.

$+$ Σὺν ἢ πλέον, σημεῖον προσθέσεως.

$-$ Μεῖον, σημεῖον ἀφαιρέσεως.

$\pm$ Πρόσθεσις ἢ Ἀφαίρεσις, πλέον ἢ μεῖον.

$:$ ἢ $-$ Διά, σημεῖον διαιρέσεως.

$>$ Μεῖζον.

$<$ Ἔλαττον.

Οὕτω $7+8-6=4\times 3-\frac{6}{2}$ δηλοῖ ὅτι τῇ προσθέσει τοῦ 8 εἰς τὸ 7 καὶ τῇ ἀφαιρέσει 6, τὸ ἐξαγόμενον ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ 4 ἐπὶ 3, ἀφοῦ ἐκ τούτου ἀφαιρεθῇ τὸ 6 διαιρεθὲν διὰ 2 ἤτοι 3.

Ἡ παρένθεσις ( ) δηλοῖ ὅτι δέον νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἰδίᾳ αἱ ἐν-

τὸς αὐτῆς σημειούμεναι ἐργασίαι, καὶ κατόπιν αἱ τοῦ συνόλου. Οὕτω $18-(9-6+2\times4)$ δηλοῖ ὅτι ἐπειδὴ $9-6+2\times4=11$, $18-(9-6+2\times4)=18-11=7$.

14. Πᾶς ἀριθμὸς ἐκφράζων τὴν ἐπανάληψιν πλειόνων ὁλοκλήρων μονάδων, καλεῖται *ἀκέραιος*, ὁ δὲ παρὰ τὴν ἔκφρασιν ταύτην ἐμπεριέχων καὶ μέρος μονάδος, καλεῖται *κλασματικὸς* ἢ *κλάσμα*.

Περὶ Προσθέσεως.

15. Ἡ πρόσθεσις ἐστὶ πρᾶξις δι' ἧς δύο ἢ πλείονες ὅμοιαι ποσότητες ἑνοῦνται εἰς μίαν καὶ μόνην καλουμένην *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον*.

Προσθετέον τοὺς ἀριθμοὺς 4805, 27, 446, 9.

Πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως γράφονται οἱ ἀριθμοὶ διαδοχικῶς ὁ εἷς κάτωθι τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε νὰ εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην αἱ ὅμοιαι σχετικαὶ μονάδες κάτωθι δὲ τοῦ τελευταίου σύρεται γραμμὴ ἵνα χωρισθῇ τὸ κεφάλαιον. Κατόπιν εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς δεξιᾶς στήλης ἢ τῆς τῶν μονάδων, ὅπερ δύναται νὰ περιέχῃ καὶ δεκάδας, καὶ αἱ μὲν μονάδες γράφονται κάτωθι τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης τῶν μονάδων, αἱ δὲ ὑπάρχουσαι δεκάδες μεταφέρονται ὡς μονάδες ἀνωτέρας τάξεως εἰς τὴν ἑπομένην στήλην τῶν δεκάδων, καὶ συμπεριλαμβάνονται εἰς τὸ ἄθροισμα τῆς στήλης ταύτης· οὕτως ἐνεργεῖται διαδοχικῶς ἡ ἄθροισις ἁπασῶν τῶν στηλῶν, κάτωθεν ἑκάστης τῶν ὁποίων γράφονται αἱ ὅμοιαι αὐτῆς μονάδες, αἱ δὲ τάξεως ἀνωτέρας μεταφέρονται εἰς τὴν ἑπομένην στήλην, μέχρι τῆς τελευταίας ἧς γράφεται ὁλόκληρον τὸ ἄθροισμα. Οὕτως ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι, ἡ πρώτη στήλη περιέχει 27 μονάδας, ἤτοι δύο δεκάδας καὶ 7 μονάδας. Καὶ αὗται μὲν γράφονται κάτωθεν τῆς σχετικῆς στήλης, αἱ δὲ δύο δεκάδες μεταφέρονται εἰς τὴν ἑπομένην στήλην τῶν δεκάδων καὶ συμπεριλαμβάνονται εἰς τὸ ἄθροισμα ταύτης. Οὕτως εὑρίσκεται ὡς κεφάλαιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 5287. Ἡ ἐργασία ἄρχεται ἀπὸ τοῦ δεξιοῦ, ἕνεκα τῆς εὐκολίας τῆς μεταφορᾶς τῶν δεκάδων ἑκάστης στήλης εἰς τὴν ἀκόλουθον τῆς ἀνωτέρας τάξεως μονάδων.

```
4805
  27
 446
   9
----
5287
```

Πρὸς βάσανον καὶ ἐξακρίβωσιν τῆς προσθέσεως, ἐνεργεῖται δευ-

τέρα πρόσθεσις ἀντίθετος τῆς πρώτης, τουτέστι ἐὰν ἡ πρόσθεσις ἐνηργήθη ἀρχίσασα ἐκ τοῦ τελευταίου ψηφίου τῆς δεξιᾶς στήλης, ἡ βάσανος ἐκτελεῖται διὰ νέας προσθέσεως ἀρχομένης ἐκ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς στήλης ταύτης κατὰ τρόπον ὅλως ὅμοιον.

Περὶ Ἀφαιρέσεως.

16. Ἡ ἀφαίρεσις ἐστὶ πρᾶξις δι' ἧς εὑρίσκεται ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο ὁμοίων ποσοτήτων.

Φανερὸν ἵνα ὑπάρξῃ διαφορὰ ὅτι δέον ἡ μία τῶν ποσοτήτων τούτων νὰ ἦναι μείζων τῆς ἄλλης. Ἡ μὲν μείζων ὅθεν ποσότης καλεῖται *ἀφαιρέτης*, ἡ δ' ἐλάσσων *ἀφαιρετέος*.

Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι·

ά. Ὁ ἀφαιρέτης ἰσοῦται τῷ ἀφαιρετέῳ αὐξανομένῳ διὰ τῆς διαφορᾶς.

β'. Αὐξομειομένου τοῦ ἀφαιρετέου, ἡ διαφορὰ αὐξομειοῦται ἐπίσης.

γ'. Αὐξομειομένου τοῦ ἀφαιρέτου, ἡ διαφορὰ αὐξομειοῦται ἐπίσης.

δ'. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο ποσοτήτων δὲν μεταβάλλεται, αὐξομειομένων ἰσάκις τῶν δύο τούτων ποσοτήτων.

έ. Πρὸς ἀφαίρεσιν ἀθροίσματος ἔκ τινος ποσότητος, ἀρκεῖ ἐκ τῆς ποσότητος ν' ἀφαιρεθῇ τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ἀθροίσματος, ἀκολούθως ἐκ τῆς διαφορᾶς τὸ δεύτερον μέρος τούτου, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἄχρις οὗ ἀφαιρεθῶσιν ἅπαντα τὰ μέρη τοῦ ἀθροίσματος.

ς'. Πρὸς ἀφαίρεσιν ποσότητος ἔκ τινος ἀθροίσματος, ἀρκεῖ ἐξ ἑνὸς μόνον τῶν μερῶν τούτου ν' ἀφαιρεθῇ ἡ ἐν λόγῳ ποσότης.

17. Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ 2935 καὶ 372. Πρὸς τοῦτο γράφεται ὁ μικρότερος ἀριθμὸς κάτωθεν τοῦ μείζονος, οὕτως ὥστε νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες, καὶ διὰ γραμμῆς χωρίζονται αὗται τῆς διαφορᾶς. Ἀκολούθως ἀφαιρεῖται διαδοχικῶς ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἐκ τοῦ ἀνταποκρινομένου αὐτῷ τοῦ ἀφαιρέτου, ἡ δὲ διαφορὰ γράφεται κάτωθεν τῆς αὐτῆς στήλης. Ὁπόταν ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου ἦναι μεγαλείτερον τοῦ ἀνταποκρινομένου αὐτῷ τοῦ ἀφαιρέτου, λαμβάνεται μία μονὰς ἐκ τῆς παρακειμέ-

$$\begin{array}{r} 2935 \\ 372 \\ \hline 2563 \end{array}$$

νης ἀνωτέρας στήλης, ἥτις ἰσοδυναμεῖ μὲ δέκα ταύτης, καὶ οὕτω ἐπαυξάνεται κατὰ δέκα μονάδας ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἀφαιρέτου, καὶ ἡ ἀφαίρεσις καθίσταται δυνατή. Κατὰ τὴν ἐνέργειαν ὅμως τῆς ἀφαιρέσεως ἐν τῇ ἑπομένῃ στήλῃ ἐξ ἧς ἐλήφθη ἡ μονάς, δέον ἵνα αὕτη ἀποδοθῇ, ὅπερ γίνεται διὰ τῆς ἐπαυξήσεως τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ μίαν μονάδα. Οὕτως ἐν τῇ δευτέρᾳ στήλῃ τοῦ 7 μὴ ἀφαιρουμένου ἐκ τοῦ 3, γίνεται τὸ δάνειον μιᾶς μονάδος ἐκ τῆς ἀνωτέρας στήλης, ἤτοι 10 μονάδων ταύτης, ὥστε ὁ 7 ἀφαιρεῖται ἐκ τοῦ 13 καὶ δίδει ὑπόλοιπον 6. Κατόπιν ἐν τῇ τρίτῃ στήλῃ αὐξάνεται ὁ 3 κατὰ μίαν μονάδα καὶ ἀφαιρεῖται ἐκ τοῦ 9 δίδων ὑπόλοιπον 5.

Ἡ ἀνάγκη τῆς ἐπαυξήσεως τῶν μικροτέρων ψηφίων τοῦ ἀφαιρετέου διὰ τῆς προσλήψεως μιᾶς μονάδος ἀνωτέρας τάξεως, ἢ δέκα ταύτης, καὶ κατόπιν ἡ ἀπόδοσις ταύτης εἰς τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρέτου τῆς ἑπομένης τάξεως, εἶναι τὸ αἴτιον δι' ὃ ἡ ἀφαίρεσις ἄρχεται ἐκ τοῦ δεξιοῦ.

Πρὸς βάσανον ἢ ἐξακρίβωσιν τῆς ἀφαιρέσεως ἀρκεῖ ἵνα προστεθῇ ἡ διαφορὰ τῷ ἀφαιρετέῳ, καὶ δόσῃ τὸν ἀφαιρέτην.

Οὕτως $2563 + 372 = 2935$, ἄρα ἡ ἀφαίρεσις ἀκριβής.

Ἡ ἀφαίρεσις τοῦ ἀθροίσματος $32932 + 29848 + 3624$ ἐκ τῆς ποσότητος 135872 ἐνεργεῖται ἀφαιρουμένων διαδοχικῶς ἐκ ταύτης τῶν διαφόρων μερῶν τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν οὕτω·

$$\begin{array}{rl} 135872 & \\ 32932 & \alpha^{ον} \\ \hline 102740 & \\ 29848 & \beta^{ον} \\ \hline 72892 & \\ 3624 & \gamma^{ον} \\ \hline \end{array}$$

καὶ προκύπτει ἡ διαφορὰ 69268

Ἡ ἀφαίρεσις τῆς ποσότητος 3257 ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $6482 + 2751 + 3872$ γίνεται τῇ ἀφαιρέσει τοῦ 3257 ἐξ ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν ἀριθμῶν τοῦ ἀθροίσματος τούτου, ἀρκεῖ μόνον ἵνα οὗτος ἐστὶ μείζων τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

$$6482 + 4751 + 3872 - 3257 = \begin{array}{r} 6482 \\ 3251 \\ \hline 3225 \end{array} + 4751 + 3872.$$

Πρὸς ἀφαίρεσιν ἀθροίσματος ἐξ ἀθροίσματος ἐνεργεῖται ἡ πρόσθεσις ἑκάστου τούτων καὶ ἀφαιρεῖται τὸ ἓν κεφάλαιον ἐκ τοῦ ἑτέρου.

Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν 59243, 87564, 8252, 29848 ἀφαιρεθήτω τὸ τῶν 32932, 3624, 2808·

59243	—	32932
87564	—	3624
8252	—	2808
29848		
184907	—	39364 = 145543.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ.

18. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐστὶ πρᾶξις σκοποῦσα τὴν ἐπανάληψιν ἀριθμοῦ τινος καλουμένου *πολλαπλασιαστέου* τοσάκις, ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς ἕτερόν τινα ἀριθμὸν καλούμενον *πολλαπλασιαστήν*. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως καλεῖται *γινόμενον*, οἱ δὲ δύο ἀριθμοὶ ἐξ ὧν παρήχθη τὸ γινόμενον τοῦτο, ἤτοι ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος καλοῦνται ὁμοῦ *παράγοντες*.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς ὅθεν δὲν εἶναι ἡ πρόσθεσις, ἤτοι διὰ τούτου εὑρίσκεται συντομώτερον τὸ ἄθροισμα ὅπερ θὰ ἐλαμβάνετο διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοσάκις τοῦ πολλαπλασιαστέου ὅσας μονάδας ἐμπεριέχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτει ὅτι ὅταν εἷς τῶν παραγόντων εἶναι 0, τὸ γινόμενον ἐστὶν ἐπίσης 0, ὅταν δὲ ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι 1, τὸ γινόμενον ἰσοῦται τῷ ἑτέρῳ παράγοντι.

19. Ὁ ἑπόμενος πίναξ τοῦ Πυθαγόρου δεικνύει τὸ γινόμενον ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν ἐξ ἑνὸς μόνου ψηφίου συγκειμένων ἀνὰ δύο, εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν στηλῶν αἵτινες ἄρχονται ἐκ τῶν ἀριθμῶν ὧν τὸ γινόμενον ζητεῖται.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

20. Ἀριθμός τις λέγεται *πολλαπλάσιος* ἑτέρου, ὁπόταν ἰσοῦται μὲ τὸν τελευταῖον τοῦτον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ ἀκέραιόν τινα ἀριθμόν. Οὕτω ὁ 21 ἐστὶ πολλαπλάσιος τοῦ 7 καὶ τοῦ 3.

Ἀντιστρόφως δὲ ὅταν ἀριθμός τις ἦναι πολλαπλάσιος ἑτέρου, ὁ τελευταῖος οὗτος ἐστὶν *ὑποπολλαπλάσιος* τοῦ πρώτου.

21. Τὸ γινόμενον πλείστων ἀριθμῶν εὑρίσκεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου τῶν ἀριθμῶν τούτων ἐπὶ τὸν δεύτερον, κατόπιν τοῦ γινομένου τῶν δύο τούτων ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου.

Προκύπτει ὅθεν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, ὧν ὁ εἷς εἶναι γινόμενον ἑτέρων παραγόντων, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῶσι μεταξύ των οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί, ἀρκεῖ ἵνα γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς διαδοχικῶς ἑνὸς τῶν παραγόντων μὲ τὸν ἕτερον τῶν ἀριθμῶν, κατόπιν τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων μὲ τὸ παραχθὲν γινόμενον κλ.

Οὕτω $84 = 3 \times 4 \times 7$, ὥστε πρὸς πολλαπλασιασμὸν τοῦ 84×9

πολλαπλασιάζεται τὸ $9\times(3\times4\times7)$, ἤτοι $9\times3\times4\times7=756$ καὶ $84\times9=756$.

22. Πρὸς πολλαπλασιασμὸν ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 10 ἢ πολλαπλασίου τινὸς τούτου, τίθενται εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τοσαῦτα 0, ὅσα παρακολουθοῦσι τὴν μονάδα, διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 10 αὐξάνει κατὰ μίαν τάξιν ἑκάστην μονάδα σχετικῆς τάξεως, ἀφίνων εἰς τὴν δεξιὰν τάξιν τῶν μονάδων 0. Ἐπίσης καὶ ὁ δεύτερος πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10 ἤτοι ὁ ἀρχικὸς ἐπὶ 100 κλ. $45\times100=4500$. Ὁμοίως πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο ἢ πλειόνων ἀριθμῶν ληγόντων εἰς 0, τίθενται εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν τούτων τοσαῦτα 0 ὅσα περιέχει τὸ ἄθροισμα τῶν 0 τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν. Τοῦτο γίνεται καταφανὲς διὰ τοῦ παραδείγματος 400×6000 ὅπου $400=4\times100$ καὶ $6000=6\times1000$, ὥστε τὸ γινόμενον $4\times100\times6\times1000=4\times6\times100\times1000$, ἢ ἄλλως $4\times6\times100000=24\times100000=2400000$.

23. Πρὸς πολλαπλασιασμὸν ἀριθμοῦ τινος ἐκ πολλῶν ψηφίων 458, ἐπὶ ἕτερον ἐξ ἑνὸς 6, γράφεται ὁ πολλαπλασιαστὴς 6, κάτωθι τοῦ πολλαπλασιαστέου 458, καὶ πολλαπλασιάζεται διαδοχικῶς ἐκ δεξιῶν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου μὲ τὸν πολλαπλασιαστήν, κάτωθι δὲ τῆς συρθείσης γραμμῆς γράφονται αἱ σχετικαὶ ἑκάστης στήλης μονάδες, αἱ δὲ δεκάδες ταύτης μεταφέρονται ὡς ἁπλαῖ μονάδες εἰς τὴν ἀμέσως ἑπομένην στήλην. Τούτου ἕνεκα ἡ πρᾶξις ἄρχεται ἐκ δεξιῶν, οὕτω·

$$\begin{array}{r}458\\6\\\hline 2748\end{array}$$

Ἐπίσης πρὸς πολλαπλασιασμὸν ἀριθμοῦ τινος ἐκ πολλῶν ψηφίων 5736 ἐπὶ ἕτερον ἐπίσης ἐκ πολλῶν συγκείμενον 743, γράφεται πάλιν ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου οὕτως ὥστε ν' ἀνταποκρίνωνται αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες. Ἀκολούθως ἐνεργεῖται ὁ πολλαπλασιασμός, τὰ δὲ μερικὰ τούτου γινόμενα γράφονται διαδοχικῶς τὸ ἓν κάτωθι τοῦ ἄλλου, εἰς τρόπον ὥστε αἱ ὁμοίας τάξεως μονάδες ν' ἀνταποκρίνωνται. Τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν τούτων

γινομένων ἐστὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον. Ἡ ἐργασία διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	5736
	743
Α^{ον} γινόμενον ἐπὶ 3	17208
Β^{ον} γινόμενον ἐπὶ 4	22944
Γ^{ον} γινόμενον ἐπὶ 7	40152
Γενικὸν γινόμενον ἢ ἄθροισμα μερικῶν..	4261848.

Ὅταν ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ εὑρίσκωνται μηδενικά, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστέον εἶναι 0, παραλείπεται ὁ διὰ τούτων πολλαπλασιασμός· πλὴν τὸ πρῶτον γινόμενον τοῦ ἑπομένου τοῦ 0 ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὸ δεξιὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου γράφεται ἐν τῇ σχετικῇ αὐτοῦ τάξει, ὡς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ 0 ὑπῆρχον ψηφία.

Τουτέστι	34256
	3002
Α^{ον} γινόμενον ἐπὶ 2	68512
Δ^{ον} γινόμενον ἐπὶ 3	102768
Τελικὸν γινόμενον	102836512.

Πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς βασάνου ἢ ἐξακριβώσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀντιστρέφεται ἡ τάξις τῶν παραγόντων, τουτέστι ὁ πολλαπλασιαστέος γίνεται πολλαπλασιαστὴς καὶ οὗτος πολλαπλασιαστέος, καὶ ἐνεργηθέντος οὕτω τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δέον νὰ εὑρεθῇ τὸ αὐτὸ γινόμενον.

Ἐπίσης ἡ βάσανος δύναται νὰ ἐνεργηθῇ διὰ τῆς διαιρέσεως, διότι τὸ γινόμενον διαιρούμενον διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων, δέον ἵνα παράσχῃ τὸν ἕτερον τούτων, ὡς κατωτέρω δειχθήσεται.

Περὶ Διαιρέσεως.

24. Ἡ διαίρεσις ἐστὶ πρᾶξις δι' ἧς ἀριθμός τις δεδομένος διαιρεῖται εἰς τοσαῦτα μέρη, ὅσας μονάδας ἐμφαίνει ἕτερός τις ἀριθμός. Ὁ ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖται καλεῖται *διαιρετέος*, ὁ δ' ἐμφαίνων τὸ ποσὸν τῶν μερῶν εἰς ἃ οὗτος διαιρεῖται καλεῖται *διαιρέτης*.

Ὁ προκύπτων ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμὸς καὶ δεικνύων πόσας

μονάδας ἐμπεριέχει ἕκαστον μέρος τοῦ διαιρεθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται *πηλίκον*.

Ἡ διαίρεσις ὅθεν ἐστὶ διαδοχική τις ἀφαίρεσις τοῦ διαιρέτου ἐκ τοῦ διαιρετέου, ἐπαναλαμβανομένη ὁσάκις ἐκεῖνος ἐμπεριέχεται εἰς τοῦτον, ἢ ἄχρις οὗ μένει 0 ἢ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ διαιρέτου. Ὁ δεικνύων τὸ ποσὸν τῶν γενομένων ἀφαιρέσεων ἀριθμὸς καλεῖται πηλίκον.

Εἰς τὴν διαίρεσιν δύναται ὁ διαιρέτης νὰ ἐμπεριέχεται ἀριθμόν τινα ἀκέραιον φορῶν εἰς τὸν διαιρετέον, ἀφίνων τέλος 0. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ διαιρέτης διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον, ἢ οὗτος ἐστὶ πολλαπλάσιος ἐκείνου (20). Ἂν ὅμως ἀντὶ μηδὲν μένῃ ἀριθμός τις, ἐννοεῖται μικρότερος τοῦ διαιρέτου, *ὑπόλοιπον* καλούμενος, ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ ἐξακολουθήσῃ, καὶ ὁ διαιρετέος δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, ἢ δὲν εἶναι πολλαπλάσιος αὐτοῦ.

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως προκύπτει ὅτι ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ διαιρέτῃ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ πηλίκον. Ἐν περιπτώσει ὑπολοίπου δέον ἵνα καὶ τοῦτο προστεθῇ τῷ γινομένῳ πρὸς ἐξίσωσιν τοῦ διαιρετέου.

25. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἑαυτοῦ καὶ τῆς μονάδος. Καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιστάσει τὸ πηλίκον ἐστὶ φανερῶς ἡ μονάς, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ αὐτὸς οὗτος ὁ ἀριθμός.

26. Ἀριθμός τις ἐστὶν ἄρτιος ἢ περιττός, καθ' ὅσον διαιρεῖται ἢ οὐ διὰ τοῦ 2.

Τὰ ψηφία 2, 4, 6, 8 διαιρούμενα διὰ τοῦ 2 καλοῦνται ἄρτια, τὰ δὲ 1, 3, 5, 7 κλ. περιττά. Τὸ 0 θεωρεῖται ἄρτιον, διότι ἐμφαίνει πολλαπλάσια τοῦ δέκα, διαιρούμενα πάντοτε διὰ τοῦ 2.

Ἀριθμός τις ἐστὶν ἄρτιος ἢ περιττός, καθ' ὅσον τὸ πρῶτον πρὸς δεξιὰ ψηφίον αὐτοῦ ἐστὶν ἄρτιον ἢ περιττόν. Διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ μὲν πρῶτον ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 10 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, τὸ δὲ δεύτερον, καθ' ὅσον ἐστὶ ἄρτιον ἢ περιττόν, διαιρεθήσεται διὰ τοῦ 2 ἢ οὔ· ἐπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς

$6724 = 6720 + 4$ ἐστὶν ἀριθμὸς ἄρτιος.

$6727 = 6720 + 7$ ἐστὶν ἀριθμὸς περιττός.

27. Τὸ γινόμενον πλειόνων ἀκεραίων ἀριθμῶν διαιρεῖται δι' ἑκά-

στου τῶν παραγόντων τούτων (24) διότι ἔσεται πολλαπλάσιον ἑκάστου τούτων.

28. Πρὸς διαίρεσιν ἀθροίσματος διά τινος ἀριθμοῦ, δέον ἵνα διαιρεθῇ ἕκαστον μέλος τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Οὕτω·

$$\frac{32+12+16}{4}=\frac{32}{4}+\frac{12}{4}+\frac{16}{4}=8+3+4=15=\frac{60}{4}.$$

Ὁμοίως καὶ πρὸς διαίρεσιν διαφορᾶς διά τινος ἀριθμοῦ διαιρεῖται ἕκαστον αὐτῆς μέλος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

29. Πρὸς διαίρεσιν ἀριθμοῦ τινος ἐκ πλειόνων ψηφίων 4145824 δι' ἑτέρου ὁμοίου 845 γράφεται ὁ διαιρέτης δεξιόθεν τοῦ διαιρετέου, ἀφ' οὗ χωρίζεται διὰ κατακορύφου γραμμῆς, κάτωθι δὲ τούτου σύρεται ὁριζόντειος γραμμὴ ὑπὸ τὴν ὁποίαν γραφήσεται τὸ πηλίκον. Ἀκολούθως χωρίζονται ἐξ ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου τοσαῦτα ψηφία, ὥστε εἰς τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν νὰ ἐμπεριέχεται ὁ διαιρέτης, καὶ γράφεται εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου ὡς πρῶτον αὐτοῦ ψηφίον ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων ποσάκις ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται εἰς τὸν χωρισθέντα ἀριθμὸν τοῦ διαιρετέου, ὅπερ εὑρίσκεται εὐκόλως. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου 4 ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ὅπερ ἐστὶ 3380, ἀφαιρεῖται ἐκ τοῦ χωρισθέντος ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ διαιρετέου ἀφίνων ὑπόλοιπον 765. Ἀκολούθως καταβιβάζεται, τουτέστι γράφεται πρὸς δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ ἐκ τοῦ διαιρετέου χωρισθέντος ἀριθμοῦ 8, καὶ ὡς δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου γράφεται ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων ποσάκις ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται εἰς τὸν οὕτω εὑρεθέντα ἀριθμὸν 7658. Ἐκ τούτου πάλιν ἀφαιρεῖται τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ δίδει ὑπόλοιπον 53, δεξιόθεν τοῦ ὁποίου γράφεται τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου 2. Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης δὲν ἐμπεριέχεται εἰς τὸν ληφθέντα ἀριθμὸν 532, γράφεται ὡς τρίτον ψηφίον τοῦ πηλίκου 0, καὶ καταβιβάζεται ὁ ἑπόμενος ἀριθμὸς τοῦ διαιρετέου 4. Τέταρτον ψηφίον τοῦ πηλίκου ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων ποσάκις ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται εἰς τὸν 5324 ἤτοι 6, τὸ δὲ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5070, ἀφαιρούμενον ἐκ τοῦ 5324, δίδει ἀριθμὸν 254, μικρότερον τοῦ διαιρέτου, καὶ ὅστις δὲν δύναται ν' αὐξηθῇ, διότι ὁ διαιρετέος δὲν ἐμπεριέχει πλέον ψηφία πρὸς τοῦτο, ὥστε ἡ διαίρεσις καθίσταται

πλέον ἀνέφικτος, ὁ δὲ ἀριθμὸς 254 ἐστὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ δεικνύει ὅτι ὁ εἷς ἀριθμὸς δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἄλλου. Κατὰ τὰ ἐκτεθέντα ἡ σειρὰ τῆς ἐργασίας ἔχει ὡς ἑξῆς·

```
4145824|845
3380    4906 Πηλίκον.
 7658
 7605
  5324
  5070
   254 Ὑπόλοιπον.
```

Πρὸς εὐκολωτέραν εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δεικνύοντος ποσάκις ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται εἰς τὸν χωρισθέντα τοῦ διαιρετέου, καὶ τὰ διάφορα αὐξηθέντα ὑπόλοιπα, δοκιμάζεται ποσάκις τὸ πρῶτον ψηφίον ἐκείνου ἐμπεριέχεται εἰς τὸ πρῶτον ἢ τὰ δύο πρῶτα τούτου, καὶ ἂν τὸ γινόμενον τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, τῇ προσθέσει εἰς τοῦτο καὶ τοῦ ἐκ τοῦ προηγουμένου γινομένου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ τὸ δεύτερον τοῦ γινομένου, μεταφερομένων μονάδων, εἶναι μικρότερον τοῦ πρώτου ἢ τῶν δύο πρώτων ψηφίων τοῦ διαιρετέου ἢ τῶν αὐξηθέντων ὑπολοίπων, κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου, τότε ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐστὶν ὁ διὰ τὸ πηλίκον ζητούμενος.

Τὰ γινόμενα ἐπίσης τῶν διαφόρων ψηφίων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην δύνανται ν' ἀφαιρῶνται ἐκ τοῦ διαιρετέου, καὶ τῶν διαφόρων εἰς διαιρετέους μεταβληθέντων ὑπολοίπων, χωρὶς νὰ γράφωνται. Οὕτω ἡ ἐργασία διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

```
4145824|845
   7658 4906
    5324
     254.
```

Ἐπειδή, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, τὸ πηλίκον δεικνύει ποσάκις ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται εἰς τὸν διαιρετέον, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν διαιρέτην θέλει δώσει τὸν διαιρετέον, ἂν οὗτος ἐστὶ πολλαπλάσιος ἐκείνου, ἄλλως δέον εἰς τὸ γινόμενον νὰ προστεθῇ τὸ ὑπόλοιπον (23). Διὰ τὴν βάσανον ὅθεν ἡ ἐξακρί-

βωσιν τῆς διαιρέσεως δέον ἵνα εἰς τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην προστεθῇ τὸ ὑπόλοιπον, καὶ ἂν ἡ ἐργασία ἀκριβὴς θέλει δώσει τὸν διαιρετέον. Οὕτω·

$$4906 \times 845 + 254 = 4145570 + 254 = 4145824.$$

30. Πρὸς διαίρεσιν ἀριθμοῦ τινος διὰ τῆς μονάδος, ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, χωρίζονται διὰ διαστολῆς δεξιόθεν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τοσαῦτα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ παρακολουθοῦσι τὴν μονάδα. Διότι ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διὰ 10,100 κλ. καταβιβάζει τὴν σχετικὴν ἀξίαν ἑκάστου ψηφίου κατὰ μίαν, δύο κλ. τάξεις. Πρὸς διαίρεσιν ὅθεν διὰ 10 δέον ἵνα τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων κατέλθῃ εἰς τὴν τάξιν τῶν μονάδων, τὸ δὲ τῶν μονάδων χωρίζεται· ἐπίσης πρὸς διαίρεσιν διὰ 100 τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων κατέρχεται δύο τάξεις, ἤτοι εἰς τὴν τάξιν τῶν μονάδων, τὰ δὲ τῶν μονάδων καὶ δεκάδων χωρίζονται, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε $\frac{84372}{100} = 843,72$.

Διὰ τῆς ἀφαιρέσεως μηδενικοῦ δεξιόθεν ἀριθμοῦ τινος, ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τῆς μονάδος παρακολουθουμένης ὑπὸ ἰσαρίθμων τῶν ἀφαιρεθέντων μηδενικῶν (22). Ὅθεν $\frac{8500}{100} = 85$.

31. Πρὸς διαίρεσιν ἀριθμοῦ τινος δι' ἑτέρου ἐκ πλειόνων παραγόντων συγκειμένου, διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς οὗτος διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων, κατόπιν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθεξῆς ἄχρι τοῦ τελευταίου, διότι (21) πρὸς πολλαπλασιασμὸν ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ ἕτερον ἐκ πλειόνων παραγόντων, πολλαπλασιάζεται οὗτος διαδοχικῶς διὰ τούτου· καὶ ἀντιστρόφως, ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται διαδοχικῶς πρὸς εὕρεσιν τοῦ πολλαπλασιασθέντος ἀριθμοῦ ὅστις ἔσεται τὸ ἐξαγόμενον. Οὕτω $\frac{504}{2\times3\times7}$ ἐκτελεῖται $\frac{504}{2} = 252$ καὶ $\frac{252}{3} = 84$ καὶ $\frac{84}{7} = 12$· ἐπίσης $\frac{504}{2\times3\times7} = \frac{504}{42} = 12$.

32. Πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ διαιρετέου διά τινος ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἰσέρχεται ὡς παράγων εἰς τὸν νέον διαιρετέον· ἐπειδὴ δὲ δὲν μετεβλήθη ὁ διαιρέτης, ἕπεται ὅτι ὁ παράγων οὗτος μένει εἰς τὸ πηλίκον, ἄρα τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Εἰς δὲ τὴν δευτέραν, ἐξάγεται ὡς παράγων ἐκ τοῦ διαιρετέου ὁ ἀριθμὸς οὗτος· μὴ μεταβληθέντος δὲ τοῦ διαιρέτου, ὁ παράγων οὗτος ἐξάγεται φα-

νερῶς ἐκ τοῦ πηλίκου· ἄρα τοῦτο διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Οὕτω $\frac{54}{6}=9$ καὶ $\frac{54\times3}{6}=27$ καὶ $3\times9=27$. Ἐπίσης καὶ $\frac{\frac{54}{3}}{6}$ $\frac{18}{6}=3$ καὶ $\frac{9}{3}=3$.

Παρομοίως καταδείκνυται ὅτι πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ διαιρέτου διά τινος ἀριθμοῦ, ἄνευ μεταβολῆς τοῦ διαιρετέου, διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζεται τὸ πηλίκον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Ἤτοι

$$\frac{54}{6}=9 \text{ καὶ } \frac{54}{6\times3}=\frac{54}{18}=3 \text{ καὶ } \frac{9}{3}=3 \text{ ἢ } \frac{54}{\frac{6}{3}}=\frac{54}{2}=27 \text{ καὶ } 9\times3=27.$$

Ἐπίσης πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ τε διαιρετέου καὶ διαιρέτου δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται. Οὕτω

$$\frac{54}{6}=9\cdot \text{ καὶ } \frac{54\times3}{6\times3}=9 \text{ ἢ } \frac{\frac{54}{3}}{\frac{6}{3}}=\frac{18}{2}=9.$$

Προκύπτει ἐναργῶς ἐκ τούτων ὅτι, ὅταν ὑπάρχωσιν εἴς τε τὸν διαιρέτην καὶ τὸν διαιρετέον ὅμοιοι παράγοντες, δύνανται οὗτοι ν' ἀπαλειφθῶσι χωρὶς τὸ πηλίκον νὰ μεταβληθῇ, ἤτοι

$$\frac{7\times324\times23}{7\times12\times23}=\frac{324}{12}=27 \text{ καὶ } \frac{7\times324\times23}{7\times12\times23}=\frac{52164}{1932}=27.$$

Ἐπίσης προκύπτει ὅτι ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης παρακολουθοῦνται ἀπὸ ἀριθμόν τινα μηδενικῶν, δύναται ν' ἀπαλειφθῇ δεξιόθεν ἑκάστου τούτων ἴσος ἀριθμὸς μηδενικῶν, χωρὶς τὸ πηλίκον νὰ μεταβληθῇ, τουτέστι $\frac{35000}{700}=\frac{350\times100}{7\times100}=\frac{350}{7}=50$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ κλασμάτων. — Περὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν. — Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Περὶ Κλασμάτων.

33. Ἐρρέθη (14) ὅτι ἀριθμός τις ἐκφράζων σὺν τῇ ἐπαναλήψει τῆς μονάδος καὶ μέρη τινα ταύτης διαιρεθείσης, καλεῖται κλασματικὸς ἢ κλάσμα.

Οὕτω τὸ κλάσμα παρίσταται διὰ δύο ἀριθμῶν, ὧν ὁ μὲν ἐμ-

φαίνει τὰ μέρη εἰς ἃ διηρέθη ἡ μονὰς καὶ καλεῖται *παρονομαστής*, ὁ δὲ τὰ ληφθέντα ἐκ τῆς διαιρεθείσης μονάδος μέρη καὶ καλεῖται *ἀριθμητής*. Πρὸς γραφὴν κλάσματος, γράφεται ὁ παρονομαστὴς κάτωθεν τοῦ ἀριθμητοῦ, χωριζόμενος αὐτοῦ διὰ γραμμῆς.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς καλοῦνται ὁμοῦ *ὅροι* τοῦ κλάσματος.

Οὕτω $\frac{5}{8}$ ἐστὶ κλάσμα, ἐμφαῖνον ὅτι ἐκ τῆς εἰς 8 ἴσα μέρη διαιρεθείσης μονάδος λαμβάνονται τὰ πέντε.

Κλάσμα τι δύναται νὰ περιέχῃ πλείστας μονάδας καὶ μέρος ἔτι μονάδος· τότε ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ἐστὶ μεγαλείτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ δὲ κλάσμα μεγαλείτερον τῆς μονάδος. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ὁπόταν τὸ κλάσμα περιέχῃ μέρη μόνον μονάδος, ὁ ἀριθμητὴς ἐστὶ μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, ἑπομένως τὸ κλάσμα μικρότερον μονάδος.

34. Πᾶν κλάσμα ὅθεν ἐμφαίνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (24). Ἐπίσης πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα οὕτινος παρονομαστὴς ἐστὶν ἡ μονάς (25).

35. Κλάσμα τι μεγαλείτερον μονάδος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἀριθμοῦ τινος ἀκεραίου, ἐμφαίνοντος τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐμπεριεχομένων ἐν αὐτῷ ὁλοκλήρων μονάδων, πλέον ἔτι κλάσματος ἑτέρου ἐμφαίνοντος τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐμπεριεχομένων ἐν αὐτῷ μερῶν τῆς διαιρεθείσης μονάδος. Πρὸς τοῦτο διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, εἰς δὲ τὸ ἀκέραιον πηλίκον προστίθεται κλάσμα οὗ ἀριθμητὴς μὲν ἐστὶν τὸ τῆς διαιρέσεως ὑπόλοιπον, παρονομαστὴς δὲ ὁ τοῦ ἀρχικοῦ κλάσματος. Οὕτω $\frac{63}{9}=7$ ἐν ᾧ δὲν ὑπάρχει ὑπόλοιπον. Καὶ $\frac{37}{5}=7+\frac{2}{5}$ ἔνθα ὑπάρχει ὑπόλοιπον 2.

36. Πρὸς τροπὴν ἀριθμοῦ τινος ἀκεραίου εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν, ἔχοντα δεδομένον παρονομαστὴν, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν, τὸ δὲ γινόμενον τούτων ἐστὶν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος. Οὕτως ἡ τροπὴ τοῦ 7 εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν ἔχοντα παρονομαστὴν 9 ἔσεται $\frac{7\times 9}{9}=\frac{63}{9}=7$.

37. Πρὸς πολλαπλασιασμὸν κλάσματός τινος ἐπὶ ἀριθμὸν ἀκέραιον, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ-

τον, ἢ διαιρεῖται ὁ παρονομαστὴς ὅπερ τὸ αὐτὸ (32) $\frac{3}{7}\times 4=\frac{3\times 4}{7}$ $=\frac{12}{7}$ καὶ $\frac{3}{8}:4=\frac{3}{\frac{8}{4}}=\frac{3}{2}$. Ἐπίσης πρὸς διαίρεσιν κλάσματός τινος δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζεται ὁ παρονομαστής, ἢ διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου (32).

38. Κλάσμα τι δὲν μεταβάλλεται πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (32). Οὕτω

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 2}{4\times 2}=\frac{6}{8},\text{ καὶ } \frac{8}{12}=\frac{\frac{8}{2}}{\frac{12}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Ἐπειδὴ διαιρουμένων τῶν δύο ὅρων κλάσματός τινος δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα δὲν μεταβάλλει ἀξίαν, ἀλλὰ προκύπτει κλάσμα ἴσον πλὴν ἔχον μικροτέρους ὅρους, ἤτοι ἁπλούστερον, ἕπεται ὅτι διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν ὅρων δύναται τὸ κλάσμα ν' ἀντικατασταθῇ δι' ἑτέρου ἁπλουστέρου καὶ ἴσου. Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται ἀγαγεῖν τὸ κλάσμα εἰς ἁπλουστέραν μορφὴν ἢ ἔκφρασιν.

Ὅταν κλάσμα τι δὲν δύναται ν' ἀχθῇ εἰς ἁπλουστέραν μορφήν, ἤτοι ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ δὲν διαιροῦνται δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα καλεῖται *ἀνάγωγον*.

Τὸ κλάσμα $\frac{30}{45}$ ἀνάγεται εἰς $\frac{\frac{30}{3}}{\frac{45}{3}}=\frac{10}{15}$ ὥστε $\frac{30}{45}=\frac{10}{15}$.

Ἐν τῇ πράξει πρὸς ἀγωγὴν κλάσματος εἰς ἁπλουστέραν μορφήν, δοκιμάζεται ἂν οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ διαιροῦνται διὰ 2, κατόπιν πάλιν ἂν διαιροῦνται διὰ 2· ἄλλως δοκιμάζεται ὁ 3 καὶ οὕτω καθεξῆς, ἄχρις οὗ οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ δὲν διαιροῦνται πλέον δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτω

$$\frac{168}{252}=\frac{\frac{168}{2}}{\frac{252}{2}}=\frac{84}{126}=\frac{\frac{84}{2}}{\frac{126}{2}}=\frac{42}{63}=\frac{\frac{42}{3}}{\frac{63}{3}}=\frac{14}{21}=\frac{\frac{14}{7}}{\frac{21}{7}}=\frac{2}{3}.$$

39. *Ἀγωγὴ κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.* Ἀγαγεῖν δύο ἢ πλεῖστα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἐστὶν εὑρεῖν ἕτερα κλάσματα ἴσα τούτοις, ἔχοντα πάντα ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Πρὸς ἀγωγὴν δύο κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι ἑκάστου τούτων, μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου. Φανερὸν ὅτι τὰ μὲν κλάσματα δὲν μεταβάλλουσιν ἀξίαν, οἱ δὲ παρονομασταὶ αὐτῶν, ὄντες τὸ γινόμενον

τῶν δύο παρονομαστῶν τῶν ἀρχικῶν κλασμάτων εἰσὶν οἱ αὐτοί. Οὕτω· $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}=\frac{2\times6}{3\times6}$ καὶ $\frac{5}{6}=\frac{5\times3}{3\times6}$ ἢ $\frac{12}{18}$ καὶ $\frac{15}{18}$.

Παρομοίως πρὸς ἀγωγὴν πλειόνων κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζονται οἱ δύο ὅροι ἑκάστου τούτων, μὲ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν, ὥστε τὰ μὲν κλάσματα δὲν μεταβάλλουσιν ἀξίαν, ὁ δὲ κοινὸς αὐτῶν παρονομαστής, ἐστὶ τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν ἀρχικῶν κλασμάτων. Οὕτω·

$$\frac{1}{2}=\frac{3\times5\times6}{2\times3\times5\times6}=\frac{90}{180}$$
$$\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times5\times6}{2\times3\times5\times6}=\frac{120}{180}$$
$$\frac{4}{5}=\frac{4\times2\times3\times6}{2\times3\times5\times6}=\frac{144}{180}$$
$$\frac{5}{6}=\frac{5\times2\times3\times5}{2\times3\times5\times6}=\frac{150}{180}$$

Ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ἀριθμός τις διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι ἐστὶν πολλαπλάσιος πάντων τούτων, ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται νὰ ληφθῇ ὡς κοινὸς παρονομαστής, ἀριθμητὴς δὲ ἑκάστου κλάσματος ἐστὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κοινοῦ τούτου παρονομαστοῦ, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ σχετικοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν σχετικὸν ἀριθμητήν. Οὕτω ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι, ὁ 30 ἐστὶ πολλαπλάσιος πάντων τῶν παρονομαστῶν, δύναται ὅθεν νὰ ληφθῇ ὡς κοινὸς παρονομαστής. Ὅθεν·

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times\frac{30}{2}}{30}=\frac{15}{30}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times\frac{30}{3}}{30}=\frac{20}{30}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times\frac{30}{5}}{30}=\frac{24}{30}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times\frac{30}{6}}{30}=\frac{25}{30}.$$

40. *Πρόσθεσις Κλασμάτων.* Πρὸς πρόσθεσιν δύο ἢ πλειόνων κλασμάτων, ἄγονται πρῶτον ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ ἀκολούθως προστίθενται οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν, τὸ δ' ἄθροισμα τούτων ἐστὶν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος ἴσου τῷ ἀθροίσματι τῶν κλασμάτων τούτων, παρονομαστὴς δ' ἐστὶν ὁ κοινὸς μετὰ τὴν ἀγωγὴν παρονομαστής. Τοῦτο ἐξάγεται ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κλάσματος (33). Οὕτω $\frac{2}{3}+\frac{7}{5}+\frac{5}{6}$ ἀνάγονται καὶ ἀθροίζονται $\frac{20}{30}+\frac{42}{30}+$

$\frac{25}{30}=\frac{27}{30}$. Πρὸς πρόσθεσιν ἀκεραίων ἀριθμῶν μετὰ κλασματικῶν, τρέπονται οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἰς κλασματικούς (36), ἔχοντας ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν μετὰ τὴν ἀγωγὴν τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Ἀκολούθως δ' ἐνεργεῖται ἡ πρόσθεσις ὡς ἀνωτέρω. Οὕτω·

$5+3+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{5\times6}{6}+\frac{3\times6}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{53}{6}$.

41. *Ἀφαίρεσις Κλασμάτων.* Ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων ἐνεργεῖται ὡς ἡ πρόσθεσις, ἀγομένων δηλ. αὐτῶν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ ἐνεργουμένης ἀκολούθως τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀριθμητῶν. Οὕτω $\frac{3}{4}-\frac{1}{7}=\frac{3+7}{4+7}-\frac{1\times4}{4+7}=\frac{21}{28}-\frac{4}{28}=\frac{17}{18}$.
Πρὸς ἀφαίρεσιν κλάσματος ἐξ ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ ἀντιστρόφως, τρέπεται ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν (36), ἔχοντα παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος, καὶ ἐνεργεῖται κατόπιν ἡ ἀφαίρεσις τῶν δύο τούτων κλασμάτων ὡς ἄνω.

Πρὸς ἀφαίρεσιν ἀριθμοῦ ἀκεραίου μετὰ κλασματικοῦ, ἐξ ἑτέρου ἐπίσης ἀκεραίου μετὰ κλασματικοῦ, τρέπονται οἱ ἀκέραιοι οὗτοι εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς, ἀκολούθως προστίθενται εἰς τὰ προστιθέμενα αὐτοῖς κλάσματα, καὶ κατόπιν ἐνεργεῖται ἡ ἀφαίρεσις ἐπὶ τῶν δύο προκυπτόντων κλασμάτων. Οὕτω $7+\frac{3}{5}-4+\frac{1}{3}=\frac{35}{5}+\frac{3}{5}-\frac{12}{3}+\frac{1}{3}=\frac{38}{5}-\frac{13}{3}=\frac{114}{15}-\frac{65}{15}=\frac{49}{15}$ καὶ $\frac{49}{15}=3+\frac{4}{15}$.

Δύναται ἐπίσης ἡ ἀφαίρεσις νὰ ἐνεργηθῇ ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ τῶν κλασμάτων, καὶ νὰ προστεθῶσι κατόπιν αἱ διαφοραί. Οὕτω π. χ. $7+\frac{3}{5}-4+\frac{1}{3}$, ἐκτελεῖται $7-4=3$ καὶ $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{9}{15}-\frac{5}{15}=\frac{4}{15}$, ὥστε $7+\frac{3}{5}-4+\frac{1}{3}=3+\frac{4}{15}$.

42. *Πολλαπλασιασμὸς Κλασμάτων.* Ἵνα πολλαπλασιασθῇ ποσότης τις ἐπὶ κλάσμα, δέον νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὴν ποσότητα ταύτην, παρονομαστὴς δὲ τοῦ προκύπτοντος κλάσματος ἔσεται ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ ἀρχικοῦ. Διότι ὁ ἀριθμητὴς ἐμφαίνων τὸν ἀριθμὸν τῶν μερῶν τῆς μονάδος τῶν ἐν τῷ κλάσματι ἐμπεριεχομένων, μόνος ὑπόκειται εἰς ἐπανάληψιν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἰς οὐδεμίαν δὲ μεταβολὴν ὑπόκειται ὁ παρονομαστὴς, ὅστις δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν μερῶν εἰς ἃ διῃρέθη ἡ ἀρχικὴ μονάς.

Τὸ γινόμενον ὅθεν ἀκεραίου τινος ἀριθμοῦ ἐπὶ κλασματικὸν ἐνεργεῖται (37) $9\times\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$ ἢ $3\times\frac{7}{9}=\frac{7}{\frac{9}{3}}=\frac{7}{3}$. Τὸ γινόμενον δύο κλασμά-

των ἐστὶ κλάσμα, οὗτινος ἀριθμητὴς μὲν ἐστὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴς δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο τούτων κλασμάτων. Διότι πρὸς πολλαπλασιασμὸν κλάσματος ἐπὶ ἕτερον, ὁ ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου τούτου πολλαπλασιάζει τὸ πρῶτον κλάσμα· ἄρα πρὸς τοῦτο δέον νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπ' αὐτὸν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος. Ὁ παρονομαστὴς ὅμως τοῦ δευτέρου κλάσματος διαιρεῖ τὸ πρῶτον κλάσμα· ἄρα δέον νὰ πολλαπλασιασθῇ δι' αὐτοῦ ὁ παρονομαστὴς ἐκείνου (37). Οὕτω $\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{21}{40}$.

Προκύπτει ὅθεν ὅτι τὸ γινόμενον πλειόνων ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ κλασματικῶν, ἐστὶ κλάσμα, οὗτινος ἀριθμητὴς μὲν ἐστὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων ἐπὶ τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων, παρονομαστὴς δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.
Οὕτω· $5\times\frac{3}{4}\times2\times\frac{2}{7}=\frac{5\times3\times2\times2}{4\times7}=\frac{60}{28}=\frac{15}{7}$.

Πρὸς εὐκολίαν τοῦ ὑπολογισμοῦ οἱ κοινοὶ παράγοντες δέον νὰ ἐξαλείφωνται ἔκ τε τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, ἵνα τὸ προκύπτον κλάσμα ἔσεται ἁπλούστερον (32, 39). Οὕτω εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα $\frac{5+3\times2+2}{4\times7}=\frac{5+3+4}{4+7}=\frac{15}{7}$.

43. *Διαίρεσις Κλασμάτων.* Πρὸς διαίρεσιν ἀκεραίου τινος ἀριθμοῦ ἢ κλασματικοῦ, διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφονται οἱ ὅροι τοῦ διαιρέτου κλάσματος, καὶ τὸ οὕτω ἀνεστραμμένον κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν διαιρετέον ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν ἀριθμόν. Διότι τὸ διαιροῦν κλάσμα, διὰ μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ διαιρεῖ τὸν ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν διαιρετέον, ἄρα γίνεται παρονομαστὴς ἢ πολλαπλασιάζει τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ, διὰ δὲ τοῦ παρονομαστοῦ, πολλαπλασιάζει τὸν διαιρετέον ἀκέραιον ἢ κλασματικόν. Οὕτω· $7:\frac{3}{4}=7\times\frac{4}{3}=\frac{28}{3}$ καὶ $\frac{4}{7}:\frac{2}{5}=\frac{4}{7}\times\frac{5}{2}=\frac{20}{14}$. Ἐπίσης πρὸς διαίρεσιν κλάσματος δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζεται οὗτος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν (32, 37).

Πρὸς διαίρεσιν ἀθροίσματος ἀκεραίων μετὰ κλασμάτων, δι' ἑτέρου ἀθροίσματος ἀκεραίων μετὰ κλασμάτων, τρέπονται ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁ διαιρετέος, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὁ διαιρέτης εἰς κλάσματα (40, 41) καὶ ἀκολούθως ἐνεργεῖται ἡ διαίρεσις.

Οἱ ὁρισμοὶ τοῦ § 32 ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τῶν κλασμάτων, διότι τὸ κλάσμα παριστᾷ διαίρεσιν, ἧς διαιρετέος μὲν ἐστὶν ὁ ἀριθμητής, διαιρέτης δὲ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ.

Περὶ δεκαδικῶν Ἀριθμῶν.

44. Διαιρουμένης τῆς μονάδος εἰς 10 ἢ πολλαπλάσια τούτου μέρη, τὸ ἐκφράζον κλάσμα μέρη τινα τοιαύτης μονάδος καλεῖται *δεκαδικὸν* ὡς $\frac{5}{10}$.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ τοιούτου δεκαδικοῦ κλάσματος, ἢ οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς ἐστὶ μεγαλείτερος τῆς εἰς 10 ἢ πολλαπλάσια τούτου διαιρεθείσης μονάδος, καλεῖται *δεκαδικὸς ἀριθμός*, ὡς $37+\frac{5}{10}$ ἢ $\frac{375}{10}$ (36).

Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἢ κλάσμα γράφεται ἐπίσης διὰ μόνου τοῦ ἀριθμητοῦ ὡς ἀκεραίου, ἀφ' οὗ χωρίζονται δι' ὑποδιαστολῆς, ἐκ δεξιῶν, τοσαῦτα ψηφία ὅσα μηδενικὰ παρακολουθοῦσι τὴν μονάδα τοῦ παρονομαστοῦ, τουτέστι $\frac{37584}{1000}=37,584$. Ἐὰν ὅμως τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμητοῦ εἰσὶν ὀλιγώτερα τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομαστοῦ, συμπληροῦνται αἱ ἐλλείπουσαι θέσεις διὰ μηδενικῶν, γραφομένου καὶ ἑτέρου μηδενικοῦ δεξιόθεν τῆς ὑποδιαστολῆς ἐν τῇ θέσει τοῦ ἐλλείποντος ἀκεραίου, ἤτοι $\frac{35}{1000}=0,035$. Τὸ δεξιόθεν τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφίον ἐκφράζει τὰς μονάδας, τὸ πρῶτον ἀριστερόθεν, τὰς δεκαδικὰς μονάδας πρώτης τάξεως, ἤτοι δέκατα, τὸ δεύτερον τὰς δεκαδικὰς μονάδας δευτέρας τάξεως, ἤτοι ἑκατοστά, καὶ οὕτω καθεξῆς, ὥστε ἕκαστον δεξιόθεν ἑτέρου κείμενον ἐστὶ δεκαπλάσιον αὐτοῦ. Ὅθεν $37+\frac{5}{10}+\frac{8}{1000}=37,508$.

45. Ὁσαδήποτε μηδενικὰ προσθαφαιρεθῶσι δεξιόθεν δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τούτου οὐδόλως μεταβάλλεται. Διότι οὗτος γραφόμενος ὑπὸ μορφὴν κλάσματος καὶ πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων ἐπὶ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 10, δὲν μεταβάλλει ἀξίαν (32, 42). Οὕτω $32,45=32,45000$ καὶ $3,70000=3,7$.

46. Ἵνα πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ δεκαδικός τις ἀριθμὸς διὰ 10 ἢ πολλαπλασίου τινος τούτου, φέρεται ἡ ὑποδιαστολὴ πρὸς δεξιὰ ἢ πρὸς ἀριστερὰ τόσας τάξεις ὅσα μηδενικὰ παρακολουθοῦσι τὴν μονάδα, εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ πολλαπλασίου τούτου τοῦ 10.

Τοῦτο γίνεται καταφανὲς ἐκ τοῦ ὅτι, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιστάσει, τὸ πολλαπλάσιον τοῦ 10 πολλαπλασιάζει τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος γραφέντος δεκαδικοῦ, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἰδίου κλάσματος. Ἤτοι

$3,127 \times 100 = \frac{3127}{1000} \times 100 = \frac{312700}{1000} = 312,7$. καὶ $25,83 : 1000 = \frac{2583}{100} : 1000 = \frac{2583}{100 \times 1000} = \frac{2583}{100000} = 0,02583$.

47. *Πρόσθεσις δεκαδικῶν*. Ἡ πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐνεργεῖται ὡς ἡ τῶν ἀκεραίων (15)· γράφονται ὅμως οὗτοι οὕτω ὥστε αἱ ὑποδιαστολαὶ νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου, καὶ ἐπομένως αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ κεῖνται ὑπὸ τὰς ὁμοίας σχετικὰς ἐπὶ τῆς αὐτῆς στήλης. Τοῦτο ἐστὶ καταφανές, διότι ἡ πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν τούτων ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν φέρει εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο. Οὕτω

```
 37,425
  8,72
436,
  0,54
 68,034
-------
550,719.
```

48. *Ἀφαίρεσις δεκαδικῶν*. Ἐπίσης καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἐνεργεῖται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· ἐὰν ὅμως ὑπάρχωσι πλείονα δεκαδικὰ ψηφία εἰς ἕνα τῶν ἀριθμῶν τούτων, δέον ἵνα εἰς τὸν ἔχοντα τὸν ὀλιγώτερον ἀριθμὸν τοιούτων, νὰ συμπληρωθῶσιν αἱ ἀνταποκρινόμεναι θέσεις διὰ 00.

Οὕτω 57,82—48,5723 ἀφαιρεῖται

```
57,8200
48,5723
-------
 5,2477.
```

49. *Πολλαπλασιασμὸς δεκαδικῶν*. Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐνεργεῖται ὡς ὁ τῶν ἀκεραίων, χωρὶς νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ὑποδιαστολή, ἀκολούθως δ' ἐκ τοῦ γινομένου χωρίζονται δεξιόθεν τοσαῦτα ψηφία, ὅσα περιέχει τὸ ἄθροισμα τῶν δεκαδικῶν τοῦ τε πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ. Τοῦτο καταδείκνυται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὑπὸ μορφὴν κλάσματος, ἤτοι

$3,27 \times 4,005 = 13,09635$ διότι $\frac{327}{100} \times \frac{4005}{1000} = \frac{1309635}{100000} = 13,09635$.

50. *Διαίρεσις δεκαδικῶν*. Πρὸς διαίρεσιν δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου, διατίθενται οὗτοι ὡς ἐγένετο διὰ τὴν διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (29). Ἡ διαίρεσις τοῦ πρὸς δεξιὰ μέρους τῆς ὑποδιαστολῆς τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου διαι-

ρέτου, δίδει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου, ὅπερ χωρίζεται δι' ὑποδιαστολῆς· ἀκολούθως εἰς τὸ ὑπόλοιπον καταβιβάζεται τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐκτελουμένης τῆς διαιρέσεως εὑρίσκεται τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον τοῦ πηλίκου. Καταβιβαζομένου τοῦ δευτέρου δεκαδικοῦ ψηφίου τοῦ διαιρετέου, εὑρίσκεται τὸ δεύτερον τοῦ πηλίκου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὅταν πλέον δὲν ὑπάρχωσιν ἕτερα δεκαδικὰ ψηφία εἰς τὸν διαιρετέον, τρέπεται τὸ ὑπόλοιπον τῇ προσθήκῃ 0 εἰς δεκαπλασίας μονάδας κατωτέρας τάξεως, καὶ ἐξακολουθούσης τῆς διαιρέσεως, εὑρίσκεται ἕτερον δεκαδικὸν ψηφίον τοῦ πηλίκου ἑπομένης τάξεως. Τοῦτο δύναται ἐξακολουθῆναι ἄχρις οὗ τὸ ὑπόλοιπον ἐστὶ 0. Καταδείκνυται δὲ τοῦτο διὰ τῆς ὑπὸ μορφὴν κλάσματος διαιρέσεως τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου, $35,427 : 12 = \frac{35427}{1000} : 12 = \frac{\frac{35427}{12}}{1000} = \frac{2952}{1000} = 2,952$ καὶ κατὰ τὰ ἐκτεθέντα

```
35,427| 12
114    2,95225
  62
   27
    30
     60
      0.
```

Πρὸς διαίρεσιν ἀκεραίου τινος ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δι' ἑτέρου δεκαδικοῦ, ἐξαλείφεται ἡ ὑποδιαστολὴ τοῦ διαιρέτου, πολλαπλασιάζεται δὲ ὁ διαιρετέος ἐπὶ τὴν μονάδα, παρακολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν ἰσαρίθμων τοῖς δεκαδικοῖς ψηφίοις τοῦ διαιρέτου, καὶ οὕτω ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν. Διότι ἐξαλειφομένης τῆς ὑποδιαστολῆς τοῦ διαιρέτου, πολλαπλασιάζεται οὗτος ἐπὶ τὴν μονάδα παρακολουθουμένην ὑπὸ ἰσαρίθμων τοῖς δεκαδικοῖς αὐτοῦ ψηφίοις μηδενικῶν (46), ἐπομένως πολλαπλασιαζομένων τοῦ τε διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται (32),

ὥστε $3,3756 : 0,45 = 337,56 : 45 = \frac{337,56}{45} = 7,501$.

Οἱ ὁρισμοὶ τοῦ § 32, ἐφαρμοζόμενοι ἐπὶ τῶν κλασμάτων (43), ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν, διότι οὗτοι εἰσὶ κλάσματα.

51. Πᾶν κλάσμα δύναται ν' ἀχθῇ ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τῆς δεκαδικῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονο-

μαστοῦ (50) $\frac{27}{8}=3,375$. Πρὸς εὐκολωτέραν ἐκτέλεσιν τῆς ἐργασίας ταύτης, τὸ κλάσμα δύναται ἀχθῆναι πρότερον ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν αὐτοῦ μορφὴν (39).

Ὁ ἔκ τινος κλάσματος προκύψας δεκαδικὸς ἀριθμός, δύναται νὰ παρουσιάσῃ τὴν κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἐπανάληψιν ἑνὸς ἢ πλειόνων δεκαδικῶν ψηφίων ἀορίστως. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καλεῖται *περιοδικός*, ὡς $\frac{27}{99}=0,272727\cdots\cdots$

52. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ἁπλῶν κλασμάτων καὶ δεκαδικῶν ἀνάγονται, ἕνεκα τῆς κλασματικῆς ἰδιότητος τῶν τελευταίων τούτων, εἰς ὁμοίας ἐργασίας, ὡς τὰς τῶν ἁπλῶν κλασμάτων. Ἐπίσης καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις κλάσματός τινος διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἀνάγονται εἰς τὰς αὐτὰς ὡς ἐπὶ τῶν κοινῶν κλασμάτων ἐργασίας· δέον ὅμως τὸ προκύπτον κλάσμα νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν δεκαδικήν (51).

Περὶ συμμιγῶν Ἀριθμῶν.

53. Ἡ γενικὴ σχεδὸν χρῆσις τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος κατέστησε σπανίους τοὺς ὑπολογισμοὺς ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν· σύντομος ὅμως ἐξέτασις τούτων δὲν θέλει εἶσθαι ἄσκοπος, θέλει δὲ μᾶλλον καταδείξει τὴν μεγίστην ἐπ' αὐτῶν ὑπεροχὴν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

Πᾶς ἀριθμὸς συγκείμενος ἐκ διαφόρων μερῶν, ὧν ἕκαστον ἀναφέρεται εἰς διάφορον μονάδα, ὑποδιαίρεσιν οὖσαν τῆς πρώτης, καλεῖται *συμμιγής*, $15^{\text{ὀργ.}}\ 4^{\text{πόδ.}}\ 7^{\text{δάκ.}}$, ἐν ᾧ ὁ ποὺς ἐστὶν ὑποδιαίρεσις τῆς ὀργυιᾶς, ὁ δάκτυλος ὑποδιαίρεσις τῆς μονάδος τοῦ ποδός.

Πᾶς ἀριθμὸς ἀναφερόμενος εἰς ἓν μόνον εἶδος μονάδος, καλεῖται *ἀμιγὴς* ὡς $15^{\text{ὀκάδ.}}$

54. Ἐν τῷ συμμιγεῖ ἀριθμῷ $15^{\text{ὀργ.}}\ 4^{\text{πόδ.}}\ 7^{\text{δάκ.}}$ ἐπειδὴ $1^{\text{ὀργ.}}=6^{\text{πόδ.}}$ ἕπεται ὅτι $15^{\text{ὀργ.}}+4^{\text{πόδ.}}=94^{\text{πόδ.}}$, ὥστε ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἰσοῦται μὲ $94^{\text{πόδ.}}\ 7^{\text{δάκ.}}$ Ἐπίσης $1^{\text{ποῦς}}=12^{\text{δάκ.}}$, ἄρα $94^{\text{πόδ.}}+7^{\text{πόδ.}}=1141^{\text{δάκ.}}$, ὥστε ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς $15^{\text{ὀργ.}}\ 4^{\text{πόδ.}}\ 7^{\text{δάκ.}}$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς $1141^{\text{δάκ.}}$ καὶ ἐπειδὴ $1^{\text{ὀργ.}}=72^{\text{δάκ.}}$, ὁ δάκτυλος ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{1}{72}{}^{\text{ὀργ.}}$, ἤτοι ὁ προκείμενος συμμιγὴς ἀριθμὸς ἐστὶ τὰ $\frac{1141}{72}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Ἕπεται ὅθεν ὅτι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν

ἀρχικῶν μονάδων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως, καὶ τῇ προσθήκῃ εἰς τὸ γινόμενον τῶν μονάδων τούτων, τρέπεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνωτέρων μονάδων εἰς μονάδας τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως. Παρομοίως τρέπεται εἰς μονάδας, δευτέρας, τρίτης, κλ. ὑποδιαιρέσεως, ὥστε ὁ συμμιγὴς τραπεὶς εἰς μονάδας τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως, ἄγεται ὑπὸ μορφὴν κλάσματος, οὗ τινος ἀριθμητὴς μὲν ἐστὶν ὁ ἰσοδύναμος αὐτῷ ἀριθμὸς τῆς μικροτέρας ὑποδιαιρέσεως, παρονομαστὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ποσοῦ τῶν μονάδων τῆς μικροτέρας ὑποδιαιρέσεως, αἵτινες ἐμπεριέχονται εἰς ἑκάστην ἀρχικὴν μονάδα.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ δεδομένου τινος κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ὡρισμένης μονάδος, εὑρίσκεται ὁ ἰσοδύναμος συμμιγής.

Πρὸς τοῦτο διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ πηλίκον ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρχικῶν μονάδων τοῦ αἰτουμένου συμμιγοῦς. Τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐμφαίνοντα τὸ ποσὸν τῶν μονάδων τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως, αἵτινες ἐμπεριέχονται εἰς ἑκάστην ἀρχικὴν μονάδα, καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τούτου, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος, εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως τοῦ αἰτουμένου συμμιγοῦς. Δι' ὁμοίας ἐργασίας, ἤτοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστου ὑπολοίπου, διὰ τοῦ ἐμφαίνοντος ἀριθμοῦ τὸ ποσὸν τῶν μονάδων, ἃς ἑκάστη μονὰς ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως ἐμπεριέχει ἐκ τῆς ἀμέσως ἐπομένης, καὶ τῆς διαιρέσεως διαδοχικῶς ἑκάστου γινομένου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος, εὑρίσκονται διαδοχικῶς ἅπαντα τὰ μέρη τοῦ ἰσοδυνάμου τῷ δοθέντι κλάσματι συμμιγοῦς. Ἀναχθήτω ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{615}{23}$ τῆς ὀργυιᾶς εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ. Ἡ ἐργασία διατάσσεται ὡς ἀπέναντι

615 | 23
155 | 26 ὀργ. 4 πόδ. 5 δάκ. 2 γραμ.
17 πόδ.
6=1 ὀργ.
102
10 δάκ.
12 =1 πούς
120
5 ὀργ.
12 = δάκ.
60
14

Ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν $26^{\text{ὀργ.}}\ 4^{\text{πόδ.}}\ 5^{\text{δάκ.}}\ 2^{\text{γραμ.}}$ καὶ $\frac{14}{24}$ τῆς γραμμῆς.

55. *Πρόσθεσις συμμιγῶν*. Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν ἐνεργεῖται ὡς ἡ τῶν ἀκεραίων. Γράφονται οἱ ἀριθμοὶ ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου, ὥστε αἱ ὅμοιαι μονάδες ν' ἀνταποκρίνωνται· προστίθενται αἱ μονάδες ἑκάστης στήλης, καὶ ὅσας μονάδας ἕκαστον ἄθροισμα ἀπαρτίζει ἀνωτέρας τάξεως, αὗται μεταφέρονται εἰς τὴν τάξιν ταύτην, γράφονται δὲ εἰς τὴν σχετικὴν στήλην αἱ μονάδες τῆς στήλης ταύτης, αἵτινες εἰσὶν ἀνεπαρκεῖς ἵν' ἀπαρτίσωσι μίαν μονάδα ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως. Ἡ πρᾶξις ὅθεν ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς·

25στατ.	32ὀκάδ.	275δράμ.
18	27	320
12	42	252
	103	847
57στατ.	15ὀκάδ.	47δράμ.

56. *Ἀφαίρεσις συμμιγῶν*. Ἐπίσης καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται ὡς ἡ τῶν ἀκεραίων, ἀφαιρουμένων τῶν ὁμοίων μονάδων μεταξύ των. Ἐν περιπτώσει δὲ καθ' ἣν ἀριθμός τις μονάδων τοῦ ἀφαιρέτου ἐστὶ μεγαλείτερος τοῦ σχετικοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, λαμβάνεται μία μονὰς ἐκ τῆς ἀνωτέρας τάξεως, ἥτις ἀναλυομένη εἰς τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς στήλης ταύτης, προστίθεται εἰς τὰς μονάδας ταύτας τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ἐκτελεῖται ἡ ἀφαίρεσις. Ἡ ληφθεῖσα μονὰς ἔκ τινος στήλης τοῦ ἀφαιρετέου ἀποδίδεται κατόπιν εἰς τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρέτου τῆς αὐτῆς στήλης. Κατὰ ταῦτα ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς·

Ἐκ τοῦ συμμιγοῦς	39ὀργ.	4πόδ.	7δάκ.	5γραμ.
ἀφαιρετέον τὸν	27	4	11	7
	11ὀργ.	4πόδ.	7δάκ.	10γραμ.

Αἱ βάσανοι ἐκτελοῦνται ὡς αἱ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

57. *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγῶν*. Ἔστω κατὰ πρῶτον ὅτι τοῦ πολλαπλασιαστέου ὄντος συμμιγοῦς, ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐστὶν ἁπλοῦς ἀριθμός.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, πολλαπλασιάζεται ἐκ δεξιῶν ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ὅσας δὲ μονάδας ἕκαστον μερικὸν γινόμενον πε-

ριέχει ὑποδιαιρέσεως ἀνωτέρας, αὗται μεταφέρονται εἰς τὴν ἐπομένην τάξιν τῶν σχετικῶν μονάδων, γράφονται δὲ εἰς τὴν θέσιν τῶν μερικῶν γινομένων μόνον αἱ μονάδες αἱ μὴ ἀποτελοῦσαι μίαν μονάδα ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως. Οὕτω·

$48^{\text{στατ.}}\ 37^{\text{ὀκ.}}\ 322^{\text{δράμ.}}$
8

$392^{\text{ὀκ.}}\quad 302\quad 2576 = 6^{\text{ὀκ.}}\,76^{\text{δράμ.}}$
$36^{\text{ὀκ.}}\quad 176^{\text{δράμ.}}$

Ἐὰν ὅμως ὁ πολλαπλασιαστὴς σύγκηται ἐκ πλειόνων ψηφίων, οἱ ὑπολογισμοὶ δύνανται ἁπλοποιηθῆναι ὡς ἑξῆς·

$784^{\text{πήχ.}}\ 7^{\text{ὄγδοα}}\ 1^{\text{δέκατον ἕκτον}}$
857

5488
3920
6272
Διὰ $4^{\text{ὀγδ.}}$ .... 428 ...... $4^{\text{ὄγδοα}}$
2 .... 214 2
1 .... 107 1
$1^{\text{δέκ. ἕκτ.}}$ ...... 53 ...... 4 .... $1^{\text{δέκ. ἕκτ.}}$

$672691^{\text{πήχ.}}$ .. $3^{\text{ὀγδ.}}$ .. $1^{\text{δέκατον ἕκτον}}$

Μετὰ τὸν εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο πολλαπλασιασμὸν τοῦ $784^{\text{πήχ.}}$ ἐπὶ 857, παρατηρητέον ὅτι εἰ ἀντὶ $7^{\text{ὀγδ.}}$ ὑπῆρχον $8 = 1^{\text{πήχ.}}$, ἤθελεν ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστὴς 857 μίαν ἔτι φοράν, πλὴν $7 = 4 + 2 + 1$, ὥστε διὰ 4 ὄγδοα $= \frac{1}{2}$ πήχ. ἐπαναλαμβάνεται ἡμισεία ἔτι φορά, ἤτοι $428^{\text{πήχ.}}\ 4^{\text{ὀγδ.}}$ καὶ ἔτι διὰ $2^{\ 4\text{ὀγδ.}}$ τὸ ἥμισυ τούτου $214^{\text{πήχ.}}\ 2^{\text{ὀγδ.}}$ Ἐπίσης διὰ $1^{\text{ὀγδ.}}$ τὸ ἥμισυ, 107... 1 καὶ διὰ $1^{\text{δέκ. ἕκτ.}}$ τὸ ἥμισυ τούτου ἤτοι 53... 4... Τὸ ἄθροισμα τούτων δίδει τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ὁ πολλαπλασιασμός, ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ὅ τε πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἰσὶ συμμιγεῖς, ἐκτελεῖται ἐπίσης κατὰ τ' ἀνωτέρω, διότι μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρχικῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως ἀναλύεται εἰς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ κλ. μονάδας τῆς πρώτης, καὶ λαμβάνεται τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{4}$ κτλ. τοῦ πολλαπλασιαστέου συνεπῶς. Ἐπίσης ἐνεργεῖται καὶ διὰ τὰς μονάδας τῆς δευ-

ρας, τρίτης κτλ. ὑποδιαιρέσεως τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ δὲ γενικὸν ἄθροισμα δίδει τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν δύο συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι ὅτι ἐργάτης κατασκευάζει $15^{\text{ὀργ.}}\ 4^{\text{πόδ.}}\ 8^{\text{δακ.}}$ ὑφάσματός τινος εἰς $1^{\text{ὥρ.}}$ Εἰς $12^{\text{ὥρ.}}\ 35'$ καὶ $45''$ πόσας ὀργυιὰς θέλει κατασκευάσει; Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν δύο ἀριθμῶν δίδει τὸ ζητούμενον·

$$15^{\text{ὀργ.}}\quad 4^{\text{πόδ.}}\quad 8^{\text{δάκ.}}$$
$$12^{\text{ὥρ.}}\quad 35'\quad 45''$$

30
15

Διὰ $\begin{cases} 3^{\text{πόδ.}} \ldots\ldots 6^{\text{ὥρ.}} \\ 1 \ldots\ldots 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 6^{\text{δάκ.}} \ldots\ldots 1 \\ 2 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 2^{\text{πόδ.}} \end{cases}$

$\begin{cases} 30 \ldots\ldots 7 \ldots\ldots 5 \ldots\ldots 4^{\text{δάκ.}} \\ 5^{\lambda.} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 1 \ldots 10 \ldots\ldots 8^{\text{γρ.}} \end{cases}$

$(1) \ldots\ldots (0) \ldots (1) \ldots (6) \ldots\ldots (11+\frac{1}{5})$ Βοηθητικὸν

$\begin{cases} 30^{\lambda.} \ldots\ldots 0 \ldots 0 \ldots 9 \ldots\ldots 5+\frac{1}{2}+\frac{1}{10} \\ 15^{\lambda.} \ldots\ldots 0 \ldots 0 \ldots 4 \ldots\ldots 8+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20} \end{cases}$

$$198^{\text{ὀργ.}}\quad 4^{\text{πόδ.}}\quad 4^{\text{δάκτ.}}\quad 10^{\text{ὀργ.}}+\tfrac{2}{3}.$$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγεῖ, δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ, τρεπομένου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς κλάσμα τῆς ἐλαχίστης ὑποδιαιρέσεως, καὶ πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστέον, τοῦ δὲ γινομένου διαιρουμένου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (54).

58. *Διαίρεσις συμμιγῶν.* Ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ, ἐκτελεῖται ὡς παντὸς ἑτέρου ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ τὸν παρονομαστήν, καὶ διαιρουμένου διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ. Ἐν περιπτώσει ὅμως διαιρέσεως συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς, παρουσιάζονται δύο περιστάσεις ὡς ἑξῆς·

α'. Ὁπόταν ὅ τε διαιρετέος καὶ διαιρέτης εἰσὶν ὁμοειδεῖς συμμιγεῖς ἀριθμοί, ἤτοι ὁπόταν ἀμφότεροι περιέχουσι τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν τῆς ὑποδιαιρέσεως μονάδα. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὅ τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τρέπονται εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης ἐν αὐτοῖς ὑποδιαιρέσεως, καὶ διαιρεῖται ὁ τοιοῦτος εὑρεθεὶς ἀριθμὸς

τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ὁμοίου τοιούτου τοῦ διαιρέτου. Οὕτως ἡ διαίρεσις τοῦ $13^{οργ.}\ 4^{ποδ.}\ 7^{δακτ.}$ διὰ $5^{οργ.}\ 4^{ποδ.}\ 8^{δακτ.}$ ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κλασμάτων (54) $\frac{991}{72}:\frac{416}{72}$ ἤτοι (57) $\frac{991}{72}\times\frac{72}{416}$ ἤτοι 991: 416.

ϐ'. Ὁπόταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἰσὶ συμμιγεῖς μὲν πλὴν ἑτεροειδεῖς, ἤτοι ἀναφέρονται εἰς διάφορον ἀρχικὴν μονάδα. Τὸ πηλίκον ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔσεται ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ, διότι οὗτος ὡς γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, δέον νὰ ἦναι ὁμοειδὴς ἑνὶ τῶν παραγόντων του, μὴ ὢν δ' ὁμοειδὴς τῷ διαιρέτῃ, ἔσεται ὁμοειδὴς τῷ πηλίκῳ.

Πρὸς ἐκτέλεσιν ὅθεν τῆς διαιρέσεως, τρέπεται ὁ διαιρέτης εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἀριθμὸν (54) καὶ διὰ τούτου διαιρεῖται ὁ συμμιγὴς διαιρετέος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν, καὶ διαιρουμένου τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ.

Πρὸς διαίρεσιν 685 ὥρ. 45 λ. διὰ 75 ὀργ. 3 ποδ. 4 δακ. 9 γραμ., τρέπεται ὁ διαιρέτης εἰς κλασματικὸν τῆς ὀργυιᾶς, ἤτοι $\frac{65289}{864}$, πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 864, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 65289, εὑρίσκεται δ' οὕτω πηλίκον 9 ὥρ. 4'. 29''. $+\frac{10153}{21763}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ δυνάμεως, τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ῥίζης.—Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν.—Σχέσεις τῶν διαφόρων εἰδῶν μέτρων, μήκους, βάρους, νομισμάτων κτλ.

Τετράγωνον καὶ τετραγωνικὴ ῥίζα.

59. Καλεῖται *τετράγωνον* παντὸς ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ τὸν ἴδιον ἑαυτόν του. Ὁ δ' ἀρχικὸς ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐφ' ἑαυτὸν πρὸς παραγωγὴν τετραγώνου, καλεῖται *τετραγωνικὴ ῥίζα* τούτου. Οὕτω $5\times5=25$, ὅπου 25 ἐστὶ τετράγωνον τοῦ 5, οὗτος δ' ὁ 5 τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 25. Πρὸς παράστασιν ὅτι ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἑαυτόν, ἤτοι ὑψοῦται εἰς τὸ τετράγωνον, ἢ εἰς τὴν δευτέραν αὐτοῦ δύναμιν, σημειοῦται δεξιόθεν ἄνωθεν αὐτοῦ ὁ ἀριθμὸς 2, ὅστις καλεῖται ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἐκθέτης. Οὕτω $5^2=5\times5=25$, καὶ $7^2=49$.

Πρὸς κατάδειξιν ὅτι ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος, ἤτοι εὑρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐφ' ἑαυτὸν δίδει τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, σημειοῦται οὗτος ὑπὸ τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$, οὕτω $\sqrt{49}=7$ καὶ $\sqrt{64}=8$.

60. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ὅθεν τοῦ τετραγώνου, τὰ τετράγωνα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν εἰσὶν

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ἀριθμοί·

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 τετράγωνα·

καὶ ἀντιστρόφως, αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας ταύτης σειρᾶς, εἰσὶν οἱ ἐννέα πρῶτοι τῆς ἀριθμήσεως ἀριθμοί. Παντὸς δ' ἀριθμοῦ μεταξὺ δύο τούτων εὑρισκομένου, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα φανερὸν ὅτι ἐμπεριέχεται μεταξὺ τῶν δύο ἀκολούθων ῥιζῶν τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν· ἄρα σύγκειται ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος. Οὕτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 18, ὅστις ἐμπεριέχεται μεταξὺ τοῦ 16 οὗ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶ 4, καὶ 25 οὗ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶ 5, ἐστὶ 4 πλέον κλάσματός τινος.

61. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν, ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου, πλέον τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τοῦ δευτέρου, πλέον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου. Τοῦτο γενικευθήσεται κατωτέρω, πλὴν πρὸς κατάδειξιν ἔστω ὑψῶσαι $(3+5)^2$ ἤτοι $(4+5)\times(3+5)$. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζονται ἅπαντα τὰ μέρη τοῦ ἑνὸς παράγοντος μὲ τὰ τοῦ ἄλλου, οὕτω

$$\begin{array}{l} 3+5 \\ \underline{3+5} \\ 3^2+3\times5+3\times5+5^2=3^2+2(3\times5)+5^2=64. \end{array}$$

Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος συγκειμένου ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων, ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῶν δεκάδων, πλέον τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων. Οὕτω τὸ $54^2=(50+4)^2=2500+400+16=2916$.

Ἐπίσης προκύπτει ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀκολούθων ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τοῦ μικροτέρου τούτων πλέον μονάδος, ἤτοι $(26+1)^2-26^2=2^2-26(29\times1)+1^2=26=2\times26+1=53$.

62. Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος ἐξ ἑνὸς ψηφίου, σύγκειται ἐξ

ἑνὸς ἢ δύο ψηφίων. Ἐκεῖνο ἀριθμοῦ ἐκ δύο ψηφίων, σύγκειται ἐκ τριῶν ἢ τεσσάρων, ἐκεῖνο ἐκ τριῶν, σύγκειται ἐκ πέντε ἢ ἓξ, καὶ ἀντιστρόφως. Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δεδομένου τινὸς ἀριθμοῦ, διαιρεῖται οὗτος εἰς τάξεις ἐκ δεξιῶν ἀνὰ δύο, ὁ δ' ἀριθμὸς τῶν τάξεων τούτων, ὧν ἡ τελευταία δύναται νὰ περιέχῃ καὶ ἓν μόνον ψηφίον, ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς τῆς ζητουμένης ῥίζης.

63. Ἡ εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ ἐκ πλειόνων ψηφίων ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς. Ἐξαχθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 6084.

Χωρίζονται κατὰ πρῶτον τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἐκ δεξιῶν, δι' ὑποδιαστολῆς. Ὁ 60 ἐμπεριέχεται μεταξὺ τῶν δύο τετραγώνων 49 καὶ 64 τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 8, ὥστε καὶ ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἡ μικροτέρα ὅθεν τῶν ῥιζῶν τούτων ἐστὶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης, τοῦτο δὲ γράφεται δεξιόθεν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἐξ οὗ χωρίζεται διὰ καθέτου γραμμῆς.

Τὸ τετράγωνον τούτου 49 ἀφαιρεῖται ἐκ τοῦ δεξιοῦ τμήματος 60, δίδον ὑπόλοιπον 11, παρὰ τὸ ὁποῖον καταβιβάζεται ἢ γράφεται τὸ ἑπόμενον τμῆμα 84. Τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 χωρίζεται, ὁ δ' ἀριθμὸς 118 διαιρεῖται διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων $2 \times 7 = 14$ καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης 8 ἔσεται τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης. Γραφόμενος ὁ ἀριθμὸς οὗτος πλησίον τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων 14, καὶ πολλαπλασιαζομένου τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 148 ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν 8, προκύπτει ἐξαγόμενον 1184, ὅπερ γραφόμενον κάτωθεν τοῦ 1184, καὶ ἀφαιρούμενον ἐκ τούτου, δίδει ὑπόλοιπον 0. Ὁ ἀριθμὸς ὅθεν 6084 ἐστὶ τέλειον τετράγωνον, ἡ δὲ τετραγωνική του ῥίζα ἐστὶν 78. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ τελευταῖον εὑρεθέντος πηλίκου 8, ἔδιδε γινόμενον μεγαλείτερον τοῦ 1184, ἔδει τότε νὰ ληφθῇ ἀριθμὸς μικρότερος τούτου, ὡς ψηφίον τῶν μονάδων, καὶ δοκιμασθῇ παρομοίως· ἂν ὅμως τὸ γινόμενον τοῦτο ἦτο μικρότερον τοῦ 1184, καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἐκ τούτου ἄφινεν ὑπόλοιπον, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δὲν θὰ ἦτο τέλειον τετράγωνον, ἡ δ' εὑρεθεῖσα ῥίζα θ' ἀπετέλει τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ζητουμένης, θὰ ὑπελείπετο δὲ μόνον

3

ἡ εὕρεσις τοῦ κλασματικοῦ μέρους, ὅπερ μὴ ἔχον πρακτικὴν ἐφαρμογὴν εἰς τὰς καθημερινὰς ἀνάγκας, δὲν εἶναι τοῦ παρόντος.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως κατὰ τὰ λεχθέντα ἔχει ὡς ἑξῆς·

60'84	78
49	148
118,4	8
118 4	1184
0	

Παρομοίως ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀριθμοῦ ἐξ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ψηφίων.

7,45,29	273		ἢ κάλλιον	7,45,29	272
4	47	543		34‚5	48
3 4‚ 5	7	3		1	47
4 2 9	329	1629		1629	543
162,9				0	
162 9					

Κῦβος καὶ κυβικὴ ῥίζα.

64. Ἐρρέθη (59) ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν δίδει τὸ τετράγωνον ἢ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου· ὁ πολλαπλασιασμὸς ὅθεν ἤδη τοῦ τετραγώνου τούτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν πάλιν ἀρχικὸν ἀριθμὸν, δίδει τὴν τρίτην δύναμιν, ἥτις καλεῖται *κῦβος* τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ὁ δ' ἀριθμὸς ὅστις ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ πρὸς παραγωγὴν τοῦ κύβου τούτου, καλεῖται *κυβικὴ* ῥίζα αὐτοῦ.

Πρὸς παράστασιν τοῦ κύβου ἀριθμοῦ τινος γράφεται δεξιά, ἄνωθεν αὐτοῦ, ὁ ἀριθμὸς 3, ὅστις καλεῖται ἐπίσης ἐκθέτης τῆς δυνάμεως, ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου $\sqrt[3]{\ }$. Οὕτω $5^3=5\times5\times5=5\times5^2=5\times25=125$, ὁ 125 ἐστὶ κῦβος τοῦ 5, οὗτος δὲ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 125.

65. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ὅθεν τοῦτον, εὑρίσκονται οἱ κῦβοι τῶν δέκα πρώτων ἀριθμῶν, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστου τετραγώνου (60) ἐπὶ τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμόν.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	8	27	54	125	216	343	512	729	1000.

Ἐπειδὴ ὁ κῦβος ἀριθμοῦ τινος ἀκεραίου ἐξ ἑνὸς ψηφίου, σύγκειται ἐξ ἑνός, δύο ἢ τριῶν ψηφίων, ὁ κῦβος ἀριθμοῦ ἐκ δύο ψηφίων, σύγκειται ἐκ τεσσάρων, πέντε, ἢ ἕξ, καὶ ἀντιστρόφως, ἕπεται ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, διαιρετέον τοῦτον ἐκ δεξιῶν εἰς τμήματα, ὧν τὸ τελευταῖον δύναται νὰ περιέχῃ δύο ἢ καὶ μόνον ἓν ψηφίον, ὁ δ' ἀριθμὸς τῶν τμημάτων τούτων δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

66. Κατὰ τὸ (64) $(4+5)^2=4^2+2\times5\times4+5^2=4^2+40+5^2$, ὅθεν $(4+5)^3=(4+5)^2\times(4+5)=(4^2+2\times5\times4+5^2)\times(4+5)=4^3+3\times4^2\times5+5\times3\times4\times5^2+5^3=64+240+300+125=729$.

Τουτέστιν ὁ κῦβος ἀθροίσματος ἐκ δύο μερῶν, σύγκειται ἐκ τοῦ κύβου τοῦ πρώτου, πλέον τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ δεύτερον, πλέον τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, πλέον τοῦ κύβου τοῦ δευτέρου. Ἡ ἀρχὴ αὕτη καταδειχθήσεται γενικώτερον ἀκολούθως.

67. Ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο συνακολούθων ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἰσοῦται τῷ τριπλασίῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου, πλέον τοῦ τριπλασίου τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ πλέον μονάδας. Ἤτοι $(26+1)^3-26^3=26^2\times3+3\times26+1$.

68. Ἡ κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ ἐκ τριῶν ψηφίων, ἐὰν μὲν οὗτος εἶναι τέλειος κῦβος, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ πίνακος τῶν κύβων τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν (65), ἐὰν δὲ δὲν εἶναι τέλειος κῦβος, ἡ κυβική του ῥίζα εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ῥιζῶν τῶν δύο συνακολούθων κύβων μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐμπεριέχεται ὁ ἐν λόγῳ ἀριθμός. Οὕτως ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 425, ἐμπεριεχομένη μεταξὺ τῶν δύο τελείων κύβων 343 καὶ 512, ὧν αἱ ῥίζαι εἰσὶν 7 καὶ 8, εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν.

Ἡ εὕρεσις τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ πλειόνων τῶν τριῶν ψηφίων ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 103823 οὗτινος εὑρεῖν τὴν κυβ. ῥίζαν. Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐμπεριεχομένου μεταξὺ 1000 κύβου τοῦ 10 καὶ 1000000 κύβου τοῦ 100, ἡ ῥίζα ἐμπεριεχομένη μεταξὺ 10 καὶ 100, σύγκειται ἀναγκαίως ἐκ δύο ψηφίων, ἤτοι δεκάδων καὶ μονάδων. Χωρίζεται ὅθεν πρῶτον ὁ

ἀριθμὸς εἰς τμήματα ἐκ δεξιῶν ἀνὰ τρία ψηφία, ὧν τὸ τελευταῖον δύναται νὰ περιέχῃ δύο ἢ ἓν μόνον. Εὑρίσκεται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ πρὸς ἀριστερὰν τμήματος 103, οὗτινος ἐμπεριεχομένου μεταξὺ $4^3=64$ καὶ $5^3=125$, ἡ κυβικὴ ῥίζα ἐμπεριέχεται μεταξὺ 4 καὶ 5, καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 103823 ἐμπεριεχομένου μεταξὺ $40^3=64000$ καὶ $50^3=125000$, ἐμπεριέχεται μεταξὺ 40 καὶ 50, ὥστε τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης ἐστὶ 4.

Ἀφαιρουμένου ἤδη τοῦ κύβου τῶν δεκάδων $4^3=64$ ἐκ τοῦ 103 μένει ὑπόλοιπον 39, παρ' ᾧ καταβιβάζεται ἢ γράφεται τὸ τμῆμα 823, ὅπερ δίδει τὸν ἀριθμὸν 39823, οὗ χωρίζονται τὰ δύο τελευταῖα ψηφία 23, ὁ δὲ μένων ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τῶν δεκάδων, ἤτοι $3\times4^2=48$, δίδει πηλίκον 8, ὅπερ ἐστὶν ἢ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης ἢ μεγαλείτερον αὐτοῦ. Πρὸς δοκιμασίαν τούτου ὑψοῦται τὸ 48 εἰς τὸν κῦβον, ἤτοι $48^3=110592$, ἐπειδὴ δὲ προκύπτει ἀριθμὸς μείζων τοῦ 103823, δέον νὰ ληφθῇ μικρότερον ψηφίον τοῦ 8· δοκιμάζοντες ὅθεν διὰ τοῦ 7 ἤτοι $47^3=103823$, εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς 47 ὡς κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 103823. Ἡ διάταξις τῆς ἐργασίας ἔχει ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 103,823 & 4 \\ \underline{64} & \overline{48} \\ 398,\ 28 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ \underline{48} \\ 2304 \\ \underline{48} \\ 110592 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 \\ \underline{47} \\ 2209 \\ \underline{47} \\ 103823. \end{array}$$

Τετράγωνα καὶ τετραγωνικαὶ ῥίζαι, Κῦβοι καὶ κυβικαὶ ῥίζαι Κλασματικῶν καὶ Δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

69. Ὁ πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα (42) παρέχει τὸν τρόπον τῆς ὑψώσεως κλάσματος εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὸν κῦβον. Οὕτω $(\frac{4}{5})^2=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4\times4}{5\times5}=\frac{4^2}{5^2}=\frac{16}{25}$ καὶ $(\frac{4}{5})^3=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4\times4\times4}{5\times5\times5}=\frac{4^3}{5^3}=\frac{64}{125}$. Καὶ ἀντιστρόφως $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ ἔνθα $\sqrt{16}=4$ καὶ $\sqrt{25}=5$ ἤτοι $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$ καὶ $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\frac{4}{5}$ ἔνθα $\sqrt[3]{64}=4$ καὶ $\sqrt[3]{125}=5$ ἤτοι $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{4}{5}$

Ἄρα πρὸς ὕψωσιν κλάσματος εἰς τὸ τετράγωνον ἢ τὸν κῦβον ὑψοῦται εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ὅ τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ἢ κυβικῆς ῥίζης κλάσματός τινος, ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ἢ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

70. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ἢ κυβικῆς ῥίζης κλάσματός τινος δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ἢ κυβικῆς ῥίζης ἑνὸς καὶ μόνου ἀριθμοῦ, πολλαπλασιαζομένων ἅπαξ ἢ δὶς τῶν δύω ὅρων τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (32, 42), ἤτοι·

$$\sqrt{\tfrac{4}{7}}=\sqrt{\tfrac{4\times7}{7\times7}}=\frac{\sqrt{4\times7}}{\sqrt{7\times7}}=\sqrt{\tfrac{28}{7}},\text{ καὶ }\sqrt[3]{\tfrac{4}{5}}=\sqrt[3]{\tfrac{4\times5\times5}{5\times5\times5}}=$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{100}{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{100}}{5}$$

Ἡ μὲν ἐξαγωγὴ ὅθεν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ κλάσματος $\frac{4}{7}$, ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀκεραίου ἀριθμητοῦ 48, ἡ δὲ τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$, εἰς τὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ 100.

71. Ἡ ὕψωσις δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ εἰς τὸ τετράγωνον ἢ τὸν κῦβον, ἐξάγεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τοιούτων ἀριθμῶν (49). Οὕτω·

$$3,546^2=3,546\times3,546=12,574116 \text{ καὶ } 23,70^3=23,70\times23,70\times23,70=13312,053.$$

Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ, ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ, θεωρουμένου ὡς ἀκεραίου, χωρίζονται δ' ἐκ δεξιῶν τῆς εὑρεθείσης ῥίζης τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ· ἤτοι $\sqrt{54{,}76}=$

$$\sqrt{\tfrac{5476}{100}}=\frac{\sqrt{5476}}{\sqrt{100}}=\tfrac{74}{10}=7,4.$$

Παρομοίως πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἐξάγεται ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα θεωρουμένου ὡς ἀκεραίου, καὶ ἐκ τῆς ῥίζης ταύτης χωρίζονται δεκαδικὰ ψηφία ἰσάριθμα μὲ τὸ τρίτον τῶν ψηφίων τοῦ προκειμένου ἀριθμοῦ, ἤτοι $\sqrt[3]{3,048625}=$

$$\sqrt[3]{\tfrac{3048625}{1000000}}=\frac{\sqrt[3]{3048625}}{\sqrt[3]{1000000}}=\tfrac{145}{100}=1,45.$$

72. Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης γινομένου τινος τῶν παραγόντων, ἐξάγεται πρὸς εὐκολίαν ἡ σχετικὴ ῥίζα ἑκάστου παράγοντος· ἤτοι $\sqrt{4\times9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times3=6$.

73. Πρὸς ὕψωσιν εἰς δύναμιν ἢ ἐξαγωγὴν ῥίζης ἀθροίσματός τινος ἀριθμῶν, λαμβάνεται τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, καὶ ἐκτελεῖται ἐπ' αὐτοῦ ἡ ὕψωσις ἢ ἡ ἐξαγωγή· ἤτοι

$(3+4+5)^2=12^2=144$ καὶ $(3+4+5)^3=12^3=1278$.

Ἐπίσης $\sqrt{87+57}=\sqrt{144}=12$ καὶ $\sqrt[3]{722+506+500}=\sqrt[3]{1728}=12$.

Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

74. Καλεῖται λόγος τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως δύο ὁμοίων ποσοτήτων. Ἡ σύγκρισις γίνεται, ἢ δι' ἀφαιρέσεως, λαμβανομένης τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τούτων ποσοτήτων, ἢ διὰ διαιρέσεως, λαμβανομένου τοῦ πηλίκου αὐτῶν. Καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιστάσει ὁ λόγος καλεῖται ἀριθμητικός, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ γεωμετρικὸς ἢ ἁπλῶς λόγος.

Οὕτω 18 πρὸς 6, ἔχει ἀριθμητικὸν μὲν λόγον 12, σημειοῦται δὲ 18.6 ἢ 18—6=12, γεωμετρικὸν δὲ λόγον 3, ὅστις σημειοῦται 18: 6 ἢ $\frac{18}{6}$

Ὁπόταν ἡ δευτέρα ποσότης ἐστὶ μεγαλειτέρα τῆς πρώτης, ἐκτελεῖται ἡ ἀφαίρεσις τῆς μικροτέρας ἐκ ταύτης, πλὴν προτάσσεται τῆς διαφορᾶς τὸ σημεῖον —, ὡς 6—18=—12. Ὁ ἀριθμητικὸς οὗτος λόγος καλεῖται ἀρνητικός.

Εἰς ἀμφοτέρους τοὺς λόγους τούτους αἱ δύο συγκρινόμεναι ποσότητες καλοῦνται ὅροι· καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἡγούμενος, ὁ δὲ δεύτερος ἑπόμενος.

Τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου ὄντος διαφορᾶς δύο ποσοτήτων, ἐφαρμόζονται ἐπ' αὐτοῦ οἱ ὁρισμοὶ τῆς ἀφαιρέσεως (16, 17)· ἐπίσης τοῦ γεωμετρικοῦ λόγου ὄντος πηλίκου διαιρέσεως, ἐφαρμόζονται ἐπ' αὐτοῦ οἱ ὁρισμοὶ τῆς διαιρέσεως (32). Οὕτω π. χ. ὁ γεωμετρικὸς λόγος δὲν μεταβάλλεται, πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν δύο ὅρων, ἐπὶ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα.

75. Τὸ σύνολον δύο ἴσων ἀριθμητικῶν λόγων ἀποτελεῖ ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν ἢ ἰσοδιαφοράν. Οὕτω 8—4=4 καὶ 13—9=4 γράφεται 8—4=13—9 ἢ 8. 4: 13, 9.

Ἐπίσης τὸ σύνολον δύο ἴσων γεωμετρικῶν λόγων ἀποτελεῖ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν ἢ ἁπλῶς ἀναλογίαν, ὡς $\frac{8}{4}=2$, $\frac{12}{6}=2$ ἢ $\frac{8}{4}=\frac{12}{6}$, σημειοῦται δὲ 8: 4:: 12: 6.

Εἰς τὰ δύο ταῦτα εἴδη τῶν ἀναλογιῶν, αἱ συγκρινόμεναι ποσότητες τῶν δύο λόγων καλοῦνται ὅροι τῆς ἀναλογίας. Καὶ οἱ μὲν δύο πρῶτοι ὅροι τῶν δύο λόγων καλοῦνται ἡγούμενοι, οἱ δὲ δύο ἕτεροι ἑπόμενοι. Οὕτω 8 ἐστὶ πρῶτος ἡγούμενος, 12 δὲ δεύτερος ἡγούμενος, 4 δὲ πρῶτος καὶ 6 δεύτερος ἑπόμενος. Ἐπίσης ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος καλοῦνται ἄκροι, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τρίτος μέσοι.

76. Τέσσαρες ποσότητες 8, 4, 12, 6 εὑρίσκονται εἰς ἀναλογίαν, ὁπόταν ὁ λόγος μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας, ἐστὶν ἴσος τῷ λόγῳ μεταξὺ τῆς τρίτης καὶ τῆς τετάρτης, ὡς $\frac{8}{4}=\frac{12}{6}$ ἢ 8 : 4 :: 12: 6. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει αἱ ποσότητες εἰσὶν εἰς εὐθὺν λόγον μεταξύ των. Ὅταν ὅμως ὁ λόγος μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας, ἐστὶν ἴσος τῷ μεταξὺ δευτέρας καὶ τρίτης, ὡς 8 : 4 :: 6: 12, τότε αἱ ποσότητες εἰσὶν εἰς ἀντίστροφον λόγον μεταξύ των.

77. Εἰς ἀριθμητικήν τινα ἀναλογίαν, ἧς οἱ δύο μέσοι ὅροι εἰσὶν οἱ αὐτοί, ὡς 5. 7: 7. 9, ὁ μέσος οὗτος ὅρος 7 καλεῖται μέσος ἀριθμητικὸς μεταξὺ 5 καὶ 9, ὁ δὲ 9 καλεῖται τρίτος ἀνάλογος μεταξὺ 5 καὶ 7.

Παρομοίως ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ 4: 12 :: 12: 36, ὁ μέσος ὅρος 12, ἐστὶ μέσος γεωμετρικὸς ἀνάλογος μεταξὺ 12 καὶ 36, οὗτος δὲ ὁ τελευταῖος τρίτος ἀνάλογος μεταξὺ 4 καὶ 12.

Ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς σπανιώτατα γίνεται χρῆσις τῶν ἀριθμητικῶν ἀναλογιῶν, αἱ γεωμετρικαὶ ὅμως ἢ ἁπλῶς ἀναλογίαι εἰσὶν εἰς καθημερινὴν χρῆσιν, ἔχουσι δ' αὗται διαφόρους ἰδιοτήτας, αἵτινες διευκολύνουσι τὴν τῶν προβλημάτων λύσιν.

78. Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων ὅρων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν δύο μέσων. Καὶ ὄντως 8: 4:: 12: 6 ἢ $\frac{8}{4}=\frac{12}{6}$ ἢ $\frac{8\times6}{4\times6}=\frac{12\times4}{4\times6}$ ἐξ οὗ $8\times6=4\times12$.

Διὰ τὸν λόγον ὅθεν τοῦτον, ὁπόταν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ἑτέρων δύο, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.

Προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι, ἀγνώστου ὄντος ἑνὸς ὅρου μιᾶς ἀναλο-

γίας καὶ γνωστῶν τῶν τριῶν ἑτέρων, εὐκόλως εὑρίσκεται ὁ τέταρτος ἄγνωστος. Ἔστω ὁ ὅρος οὗτος X ἐν τῇ ἀναλογίᾳ 8 : 4 : : 12 : X. Ἐκ ταύτης $8 \times X = 4 \times 12$ καὶ $\frac{8 \times X}{8} = \frac{4 \times 12}{8}$ ἤτοι $X = \frac{4 \times 12}{8} = 6$.

Ἤτοι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου ὅρου ἀναλογίας τινος, ἐὰν μὲν οὗτος ἐστιν ἄκρος, διαιρεῖται τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου, ἐὰν δ' οὗτος ἐστὶ μέσος, διαιρεῖται τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.

79. Ἐὰν οἱ δύο μέσοι εἰσὶν οἱ αὐτοί (77), ἤτοι ἡ 4 : 12 : : 12 : 36, ἡ ἀναλογία καλεῖται συνεχής. Ἐν περιπτώσει δὲ καθ' ἣν ὁ μέσος οὗτος ἐστὶν ἄγνωστος, εὑρίσκεται εὐκόλως, διότι $4 : \chi : : \chi : 36$, ὅθεν $\chi^2 = 4 \times 36$ καὶ $\chi = \sqrt{4 \times 36} = 12$, ἤτοι ὁ μέσος γεωμετρικὸς ἀνάλογος δύο ἀριθμῶν, ἐστὶν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου αὐτῶν.

80. Οἱ ὅροι ἀναλογίας τινὸς δύνανται ν' ἀλλάξωσιν παντοιοτρόπως θέσιν, ἐν ὅσῳ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων πάσης προκυπτούσης ἀναλογίας μένει ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων. Ἤτοι 8 : 2 : : 12 : 3, 8 : 12 : : 2 : 3, 3 : 2 : : 12 : 8, 3 : 12 : : 2 : 8, 2 : 8 : : 3 : 12, 2 : 3 : : 8 : 12, 12 : 8 : : 3 : 2, 12 : 3 : : 8 : 2 εἰς ἃς πάντοτε $8 \times 3 = 2 \times 12$.

81. Ἐὰν ἀναλογίας τινος πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν οἱ ὅροι ἅπαντες, ἢ εἷς ἄκρος καὶ εἷς μέσος, ἐπί τινα ἀριθμόν, αὕτη δὲν μεταβάλλεται. Ἔστω ἡ ἀναλογία 8 : 4 : : 12 : 6 ἢ $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$. Ἐκ ταύτης $\frac{8 \times 3}{4 \times 3} = \frac{12 \times 3}{6 \times 3}$ ἢ $8 \times 3 : 4 \times 3 : : 12 \times 3 : 6 \times 3$. Ἐπίσης $\frac{8 \times 3}{4 \times 3} = \frac{12}{6}$ ἢ $8 \times 3 : 34 \times 3 : : 12 : 6$.

Προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι διὰ τοῦ μέσου τούτου καθίσταται εὔκολος ἡ ἁπλοποίησις τῶν ὅρων ἀναλογίας τινος, διὰ τῆς διὰ τῶν κοινῶν παραγόντων διαιρέσεως, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ ἐξάλειψις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἔκ τινων ὅρων. Οὕτω 3 : 9 : : 15 : 45 ἤτοι $\frac{3}{3} : \frac{4}{3} : \frac{15}{3} : \frac{45}{3}$ ἢ 1 : 3 : : 5 . 15.

82. Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων, ἐστὶ πρὸς τὸν δεύτερον ἢ τὸν πρῶτον, ὡς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο δευτέρων πρὸς τὸν τέταρτον ἢ τρίτον. Τουτέστιν ἡ 8 : 4 : : 6 : 3 δίδει $8 \pm 4 : 8 : : 6 \pm 3 : 6$ ἢ $8 \pm 4 : 4 : : 6 \pm 3 : 3$. Καὶ τοῦτο διότι αὐξομειουμένου ἑκάστου ἡγουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου του, αὐξομειοῦται κατὰ μονάδα ὁ λόγος αὐτοῦ, ὥστε οἱ λόγοι μένουσιν ἴσοι καὶ μετὰ τὴν αὐξομείωσιν.

Δι' ἀλλαγῆς θέσεως τῶν ὅρων προκύπτει ὅτι $8 \pm 4 : 6 \pm 3 :: 4 : 3$ ἢ $8 \pm 4 : 6 \pm 3 :: 8 : 6$, ἤτοι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων, ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δύο δευτέρων, ὡς οἱ δύο ἡγούμενοι ἢ οἱ δύο ἑπόμενοι μεταξύ των.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $8+4 : 4 :: 6+3 : 3$ καὶ $8-4 : 4 :: 6-3 : 3$, ἐξ ὧν καὶ $(8+4)\,4 = (6+3)\,3$ καὶ $(8-4)\,4 = (6-3)\,3$, διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν ἰσοτήτων τούτων $\frac{(8+4)4}{(8-4)4} = \frac{(6+3)3}{(6-3)3}$ ἢ $8+4 : 8-4 :: 6+3 : 6-3$, προκύπτει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἐστὶ πρὸς τὴν διαφοράν των ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δευτέρων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν. Δι' ὁμοίας ἐργασίας, καὶ τῇ ἀλλαγῇ τῆς θέσεως τῶν διαφόρων ὅρων, προκύπτουσι διάφοροι ἀναλογίαι, ὡς ἑξῆς·

$$8+4 : 8-4 :: 6+3 : 6-3$$
$$8 \pm 6 : 6 :: 4 \pm 3 : 3 \text{ ἢ } 8 \pm 6 : 8 :: 4 \pm 3 : 4.$$
$$8+6 : 4+3 :: 8-6 : 4-3$$
$$8 \pm 6 : 4 \pm 3 :: 8 : 4 \text{ ἢ } 6 : 3.$$

83. Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν σχετικῶν ὅρων μεταξύ των, πλειόνων ἀναλογιῶν, παρέχει ἐπίσης ἀναλογίαν. Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι $4 : 2 :: 6 : 3$, $7 : 5 :: 14 : 10$, $3 : 9 :: 6 : 18$, ἢ ἄλλως $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$, $\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$, $\frac{3}{9} = \frac{6}{18}$, ἅτινα πολλαπλασιαζόμενα δίδουσι $\frac{4}{2} \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{6}{3} \times \frac{14}{10} \times \frac{6}{18}$, ἤτοι $\frac{4 \times 7 \times 3}{2 \times 5 \times 9} = \frac{6 \times 14 \times 6}{3 \times 10 \times 18}$, καὶ ἄλλως $4 \times 7 \times 3 : 2 \times 5 \times 9 :: 6 \times 14 \times 6 : 3 \times 10 \times 18$.

Προκύπτει ὅθεν ἐκ τούτου φανερῶς ὅτι, διὰ τῆς ὑψώσεως τῶν ὅρων ἀναλογίας τινὸς εἰς τὸ τετράγωνον ἢ τὸν κῦβον, ἢ δι' ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ἢ κυβικῆς ῥίζης αὐτῶν, ἀποτελεῖται διὰ τοῦ ἐξαγομένου ἀναλογία, ἤτοι

$4 : 2 :: 6 : 3$, ἐξ ἧς $4 \times 4 :: 2 \times 2 :: 6 \times 6 : 3 \times 3$ ἢ $4^2 : 2^2 :: 6^2 : 3^2$ ἢ $4^3 : 2^3 :: 6^3 : 3^3$, τουτέστι $16 : 4 :: 36 : 9$ καὶ $64 : 8 :: 276 : 27$, καὶ ἐκ τούτων πάλιν $\sqrt{16} : \sqrt{4} :: \sqrt{36} : \sqrt{9}$ καὶ $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8} :: \sqrt[3]{216} : \sqrt[3]{27}$, τουτέστιν ἡ ἀρχικὴ $4 : 2 :: 6 : 3$.

Περὶ μέτρων μήκους.

84. Ἡ μονὰς τοῦ μήκους πρὸς ἣν συγκρίνονται αἱ διάφοροι ποσότητες, διαφέρει κατὰ καιροὺς καὶ τόπους, μόνον δὲ ἐσχάτως ὡρίσθη ἐν Γαλλίᾳ ἀρχική τις σταθερὰ μονάς, στηριζομένη ἐπὶ σταθερῶν

καὶ ἀμεταβλήτων δεδομένων. Ἡ μονὰς αὕτη ἐστὶ τὸ $\frac{1}{10000000}$ τοῦ τεταρτημορίου τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ, καλεῖται δὲ *Μέτρον*. Διαιρεῖται δὲ αὕτη καὶ πολλαπλασιάζεται δεκαδικῶς, πρὸς ἐκτίμησιν τῶν διαφόρων μικροτέρων ἢ μεγαλειτέρων ταύτης ποσοτήτων. Τὸ μετρικὸν τοῦτο σύστημα, ἕνεκα τῆς σταθερᾶς καὶ ἀμεταβλήτου αὐτοῦ μονάδος καὶ τῆς εὐκολίας τῶν δεκαδικῶν διαιρέσεων, ἐγένετο δεκτόν, ἐκτὸς τῆς Γαλλίας, καὶ ἐν Βελγίῳ, Ὁλλανδίᾳ, Ἑλβετίᾳ, Ἰταλίᾳ, Ἱσπανίᾳ, Πορτογαλλίᾳ, καὶ διὰ διατάγματος μόνον ἐν Ἑλλάδι (Διάταγμα τῆς 16 Ὀκτωβρίου 1836), ἔτι δὲ εἰς πλεῖστα κράτη τῆς Ν. Ἀμερικῆς· κατ' ἀρχὴν δὲ εἰσήχθη ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις.

Ἡ μονὰς αὕτη ὠνομάσθη ἐν Ἑλλάδι *Βασιλικὸς Πῆχυς*, διαιρεῖται δὲ δεκαδικῶς κατὰ τὸ μνημονευθὲν διάταγμα ὡς ἑξῆς·

Πολλοστὰ	Παλάμη=0,1 ἢ $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχ....	Ὑποδεκάμετρον
	Δάκτυλος=0,01 ἢ $\frac{1}{100}$ τοῦ πήχ.	Ὑφεκατόμ.(Πόντος)
	Γραμμή=0,001 ἢ $\frac{1}{1000}$ » »	Ὑποχιλιόμετρον
Πολλαπλᾶ	Στάδιον=1000 Β. Πήχ.....	Χιλιόμετρον
	Σχοινὶς=10000 Β. »	Μυριάμετρον

Τὰ τελευταῖα ταῦτα εἰσὶ μέτρα ὁδοιπορικά.

85. Ἐν Ἑλλάδι εἰσήχθησαν, ἕνεκα τῶν διαφόρων δουλειῶν ἃς ὑπέστη, διάφορα κατὰ καιροὺς μέτρα, ὧν τὰ Τουρκικὰ εὑρίσκονται ἔτι καὶ σήμερον ἐν κοινῇ παρ' ἐμπόροις χρήσει. Αἱ σχέσεις τοῦ τουρκικοῦ μέτρου μήκους ἢ πήχεως, καθὼς καὶ τοῦ ἐν χρήσει παρὰ τέκτοσι τεκτονικοῦ λεγομένου πήχεως, ὅστις εἶναι ἐν χρήσει ἔτι καὶ πρὸς καταμέτρησιν τῶν οἰκοπέδων, εἰσὶν αἱ ἑξῆς·

Ὁ Βασιλικὸς Πῆχυς	τοῦ μικροῦ πήχεως Ἐνδεζὲ ἰσοῦται..	1,543	α
ἢ	τοῦ μεγάλου » Ἀρσχὶν » ,.	1,494	
Μέτρον	τοῦ κοινοῦ τεκτονικοῦ » ..	1,333	

Καὶ ἀντιστρόφως

Εἷς μικρὸς πῆχυς Ἐνδεζὲ ἰσοῦται	πρὸς	0,648	Β. πήχεως		β
» μέγας » Ἀρσχὶν	» »	0,669	»	»	
» τεκτονικὸς πῆχυς	» »	0,75	»	»	

Οἱ πήχεις οὗτοι διαιροῦνται εἰς ὄγδοα καλούμενα κοινῶς ῥούπια.

Πρὸς τροπὴν Β. πήχεως εἰς ἕτερον πῆχυν, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς τοῦ Β. Π. ἐπὶ τὴν ἀνάλογον σχέσιν ἐκ τῶν (α), ἢ διαιρεῖται διὰ τῆς ἀναλόγου ἐκ τῶν (β). Ἤτοι·

5 Β. Π. $=$ 5×1,543 ἢ $\frac{5}{0,648}$=7,71, ἤτοι 7 $\frac{11}{16}$ πήχεως Ἐνδεζέ.
5 Β. Π. $=$ 5×1,494 ἢ $\frac{5}{0,669}$=7,47, ἤτοι 7 $\frac{7}{16}$ πήχεως Ἀρσχίν.
5 Β. Π. $=$ 5×1,333 ἢ $\frac{5}{0,75}$=6,666, ἤτοι 6 $\frac{5}{8}$ τεκτονικοῦ πήχεως.

Καὶ ἀντιστρόφως πρὸς τροπὴν πήχεων τοιούτων εἰς Βασιλικούς, διαιρετέον διὰ τῆς ἀναλόγου ἐκ τῶν σχέσεων (α), ἢ πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὴν τῶν (β). Ἤτοι·

10 Ἐνδεζὲ = $\frac{10}{1,543}$ ἢ 10×0,648=6,48 Βασιλικοῦ πήχεως.
10 Ἀρσχὶν = $\frac{10}{1,494}$ ἢ 10×0,669=6,69 » »
10 Τεκτονικοὶ = $\frac{10}{1,333}$ ἢ 10×0,75=7,50 » »

Ἡ ἐν Ἀγγλίᾳ ἐν χρήσει μονὰς τοῦ μήκους ἐστὶν ἡ ὑάρδα, διαιρουμένη εἰς 3 πόδας, ἕκαστος τῶν ὁποίων διαιρεῖται εἰς 36 δακτύλους. Διὰ τὰ μεγαλείτερα μήκη ἐστὶν ἐν χρήσει τὸ φάδωμ (Fathome)=2 ὑάρδας, ὁ πῆχυς (Pole)=5 $\frac{1}{3}$ ὑάρδας, τὸ ἐπίμηκες (Furlong)=220 ὑάρδας, καὶ τὸ Ἀγγλικὸν Μίλλιον=1760 ὑάρδ.

Ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι καταδείκνυνται αἱ σχέσεις μεταξὺ τοῦ Βασιλικοῦ πήχεως, τοῦ τεκτονικοῦ πήχεως καὶ τῆς Ἀγγλικῆς ὑάρδας, σχέσεις αἵτινες εἰσὶ τῆς καθημερινῆς ἐν Ἑλλάδι ἀνάγκης. Ἐπίσης ἐκ τοῦ πίνακος τούτου εὐκόλως εὑρίσκεται καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἤτοι ἡ τροπὴ τῶν ὑαρδῶν εἰς Βασιλικοὺς ἢ τεκτονικοὺς πήχεις κλ.

Ἀγγλικὴ μονὰς	Βασ. Πῆχυς ἢ Γαλλ. Μέτρ.	Τεκτονικὸς Πῆχυς	Τεκτονικὸς 32α	Παρατηρήσεις
Ὑάρδα	0,914	1	6	Ὁ Πῆχυς διαιρεῖται εἰς ὄγδοα, δέκατα ἕκτα, τριακοστὰ δεύτερα κλ. Ἐν τῇ παρακειμένῃ στήλῃ ὑπελογίσθησαν τὰ 32α.
Ποῦς=$\frac{1}{3}$ ὑάρδας	0,304	—	12	
Δάκτυλος=$\frac{1}{12}$ ποδὸς	0,025	—	3	
Φαδὼμ=2 ὑάρδας	1.828	2	12	
Πὼλ=5 $\frac{1}{3}$ ὑάρδας	5,029	6	30	
Φυρλὸγγ=220 ὑάρδας	201,164	261	8	
Μίλλιον=1760 ὑάρδας	1609,314	2090	—	

Τετραγωνιζόμενα τὰ μέτρα μήκους, δίδουν τὰ τῶν ἐπιφανειῶν, ἔνθα ἡ μονάς ἐστι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, 1000 δὲ τετρ. μέτρα καλεῖται Στρέμμα Βασιλικόν. Αἱ σχέσεις εὑρίσκονται εὐκόλως.

86. *Μέτρα Βάρους.* Μονὰς τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ *Δράχμιον* (Gramme ἢ γράμμον) (Β. Διάταγμα τῆς 16 Ὀκτωβρίου 1836).

Ἐστὶ δὲ τοῦτο τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου, πλευρᾶς 0,01, καθαροῦ ἀπεσταγμένου ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 4^0.

Ἡ μονὰς αὕτη διαιρεῖται καὶ πολλαπλασιάζεται δεκαδικῶς, πρὸς κοινὴν εἰς τὰς ἀνάγκας χρῆσιν, ὡς ἑξῆς·

Ὀβολὸς $= \frac{1}{10}$ Δραχμίου.

Κόκκος $= \frac{1}{10}$ ὀβολοῦ ἢ $\frac{1}{100}$ Δραχμίου.

Μνᾶ $=$ 1500 Δράχμια.

Τάλαντον $=$ 100 μνᾶς $=$ 150000 Δράχμια.

Τόννος $=$ 10 τάλαντα $=$ 1000 Μναῖ.

Τὸ σύστημα ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι ἔτι εἰς κοινὴν χρῆσιν, ἀλλ' εἰσέτι γίνεται τοιαύτη κοινῶς τῆς ὀκᾶς ὡς μονάδος.

Αἱ σχέσεις τῆς ὀκᾶς πρὸς τὰ Β. Σταθμὰ εἰσὶν αἱ ἑξῆς·

Β. Σταθμὰ εἰς ὀκάδας.

(α)
- Δράχμιον $=$ 0,3125 δραμίου.
- Μνᾶ $=$ 1,7719 ὀκᾶς.
- Τάλαντον $=$ 117 ὀκάδες 76 δράμια.
- Τόννος $=$ 1171 ὀκάδες καὶ 360 δράμ.

Ὀκάδες εἰς Β. Σταθμά.

(β)
- Δράμμιον $=$ 3,205 Δραχμίου.
- Ὀκᾶ $=$ 0,8533 Μνᾶς ἢ 1280 Δράχμια.
- Στατὴρ (καντάρι) $=$ 0,3754 Ταλάντου.
- Παλαιὸς Τόννος $=$ 0,695 τοῦ νέου Β. Τόννου.

Πρὸς τροπὴν νέων Β. Σταθμῶν εἰς παλαιὰ ἤτοι ὀκάδας, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς τούτων, ἐπὶ τὴν ἀνάλογον σχέσιν ἐκ τῶν (α), καὶ τ' ἀνάπαλιν, πρὸς τροπὴν παλαιῶν εἰς νέα σταθμά, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἀνάλογον ἐκ τῶν σχέσεων (β).

Τὸ χιλιαπλάσιον τοῦ δραχμίου, ἤτοι τὸ βάρος τῆς κυβικῆς παλάμης 0,1 πλευρᾶς ἀπεσταγμένου ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 4^0, καλεῖται χιλιοδράχμιον ἢ χιλιόγραμμον (Kilogramme).

Ἐπειδὴ ἡ Μνᾶ$=$1500 δραχμίοις, ἕπεται ὅτι τὸ χιλιόγραμμον ἐστὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς μνᾶς, ἤτοι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν 468 $\frac{3}{4}$ δραμίων, ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι, 1 χιλιόγραμμον$=$312 $\frac{1}{2}$ δράμια, καὶ 1 ὀκᾶ$=$1 χιλιόγραμμον καὶ 279,88 γραμ.

87. *Μέτρα χωρητικότητος.* Ἡ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μέτρου τῆς

χωρητικότητος, ἐστὶν ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης 0,01 πλευρᾶς, ἤτοι τὸ χιλιοστημόριον τοῦ κυβ. μέτρου. Καλεῖται δὲ ἡ μονὰς αὕτη *Λίτρα*.

Αἱ διαιρέσεις τῆς μονάδος ταύτης εἰσί,

Κοτύλη (Δεκατόλιτρον) $= \frac{1}{10}$ τῆς Λίτρας.

Μύστρον (Ἑκατοστόλιτρον) $= \frac{1}{100}$ λίτρας, ἤτοι εἷς κυβ. δάκτυλ.

Κοιλόν. Διὰ τὰ γεννήματα· ἰσοῦται μιᾷ κυβικῇ παλάμῃ, ἢ τῷ δεκάτῳ τοῦ κυβικοῦ Βασιλικοῦ πήχεως.

Οὐδὲ τὰ σταθμὰ ταῦτα εἰσὶν ἔτι ἐν κοινῇ χρήσει, ἀλλὰ γίνεται χρῆσις τῆς ὀκάδος ὡς μονάδος, ἧς αἱ σχέσεις πρὸς ταῦτα εἰσί,

Βασ. Μέτρα πρὸς ὀκάδας.

(α)
Λίτρα = 0,75 τῆς ὀκᾶς ἢ 300 δράμ.
Κοτύλη = 0,075 τῆς ὀκᾶς ἢ 30 δράμ.
Μῦστρον = 0,075 ὀκᾶς ἢ 3 δράμ.
Κῦβος = 0,0075 ὀκᾶς ἢ 0,3 δράμ.
Κοιλὸν = 3,015 τοῦ παλαιοῦ κοιλοῦ ἢ 75 ὀκάδες.

Ὀκάδες πρὸς Βασ. Μέτρα.

(β)
Ὀκᾶ = 1,333 ἢ 1 καὶ $\frac{1}{3}$ Λίτρας.
Δράμιον $= \frac{1}{300}$ τῆς Λίτρας ἢ $\frac{1}{3}$ Μύστρου.
Παλαιὸν κοιλὸν = 0,3316 τοῦ νέου βασ. κοιλοῦ, ἔχει δὲ χωρητικότητα 24 ὀκάδ. καὶ 350 δραμ.

Ἡ τροπὴ νέων μέτρων εἰς παλαιά, ἢ τ' ἀνάπαλιν, γίνεται εὐκόλως, ὡς ἄνωθεν διὰ τὰ μέτρα μήκους ἐῤῥέθη.

88. Παρὰ τοῖς φαρμακοπώλαις γίνεται χρῆσις μονάδος καλουμένης Λίτρας καὶ ἰσοδυναμούσης πρὸς 360 δράχμια.

Ἡ διαίρεσις τῆς μονάδος ταύτης ἐστὶν ἡ ἑξῆς·

Μία λίτρα = 12 οὐγγίας, καὶ 1 οὐγγία = 36 δράχμια.

Μία οὐγγία = 8 γράμμα, καὶ 1 γραμ. = 3,75 δραχμ.

Ἓν γράμμον = 3 σιτάρια, καὶ 1 σιτάρι = 1,25 δραχμ.

1 Σιτάρι = 20 κόκκους, καὶ 1 κόκκος = 0,0625 δραχ.

Ὁ πίναξ (90) δίδει τὰς σχέσεις τῶν διαφόρων μέτρων καὶ σταθμῶν τῶν κυριωτέρων Εὐρωπαϊκῶν κρατῶν πρὸς τὰ Ἑλληνικά.

89. *Νομίσματα.* Ὡς μονὰς τοῦ νομίσματος λαμβάνεται ἐν Γαλλίᾳ τὸ φράγκον, ἔχον βάρος 5 γράμμων, καὶ συγκείμενον ἐξ ἀργύρου καὶ ποσότητος τινὸς χαλκοῦ. Αἱ ὑποδιαιρέσεις ἀκολουθοῦσι

τὸ δεκαδικὸν σύστημα, καθὼς καὶ τὰ πολλαπλάσια. Ἐσχάτως ἡ μονὰς αὕτη εἰσήχθη καὶ ἐν Ἑλλάδι καλουμένη νέα Ἑλληνικὴ δραχμή, αἱ δὲ δεκαδικαὶ ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς καλοῦνται τὰ μὲν δέκατα *διώβολα*, τὰ δὲ ἡμίσεα τούτων *ὀβολοί*, καὶ τὰ ἑκατοστὰ *λεπτά*. Τὰ δὲ πολλαπλάσια *πεντάδραχμα*, *εἰκοσάδραχμα* κλπ.

Ὁ δεύτερος τῶν πινάκων (90) δεικνύει τὰς σχέσεις τῶν νομισμάτων τῶν κυριωτέρων τῆς Εὐρώπης κρατῶν πρὸς τὰ Ἑλληνικά.

---

90. ΠΙΝΑΞ

Μέτρων καὶ σταθμῶν διαφόρων Εὐρωπαϊκῶν Κρατῶν πρὸς τὰ Ἑλληνικά.

Ἔθνη	Μέτρα Μήκους	Β. Πήχεις ἢ Μέτρα	Χιλιοστὰ ἢ Γραμμαὶ	Σταθμὰ	Μναῖ	Δράχμια	Ὀκάδες	Δράμια
ΓΑΛΛΙΑ	Ποῦς	—	324	Γράμμον	—	1	—	0,312
	Ὀργυιὰ	1	949	Ἑκατοστόγραμμον	—	100	—	31,25
	Μέτρον	1	—	Χιλιόγραμμον	—	1000	—	312,50
	Μυριάμετρον	10000	—	Τόννος	668	666	781	265
	Λεύγα	4444	—					
ΑΓΓΛΙΑ	Δάκτυλος	—	0,25	Οὐγγία	—	28	—	8,86
	Ποῦς	—	304	Λίτρα	—	453	—	142
	Ὑάρδα	—	914	Τόννος	676	780	794	—
	Φαδὼμ	1	828					
	Πῶλ	5	0,29					
	Φυρλὸγγ	201	164					
	Μίλλιον	1609	314					
ΑΥΣΤΡΙΑ	Ποῦς	—	316	Λότιον	—	35	—	10,9
	Πῆχυς μέγας	—	676	Φούντιον	—	369	—	175
	Πῆχυς μικρὸς	—	641	Στατὴρ	37	545	43	—
	Ἄουνα	—	777					
	Μίλλιον Γερμ.	7407	—					
	Λεύγα	8348	—					
ΡΩΣΣΙΑ	Ποῦς	—	354	Φούντιον ἢ	—	409	—	128
	Ποῦς Ἀγ. Ῥωσ.	—	705	Λίτρα				
	Πήχ. Ἀρσχὶν	—	711	Πούντα	10	138	12	320
	Παλ. Βρέστιον	1389	—					
	Νέον Βρέστιον	1067	—					
Ἑνετίας ἐν χρήσει ἐν Ἑπτανήσῳ	Ποῦς	—	346	Λίτρα ψιλὴ	—	301	—	94
	Πῆχυς	—	667	Λίτρα χονδρὴ	—	477	—	150
	Πήχ. μικρὸς	—	625					
	Βῆμα	—	755					
ΙΤΑΛΙΑ (Παλαιὰ)	Πῆχυς	—	583	Λίτρα Τοσκαν.	—	339	—	106
	Κάννα	2	918	Λίτρα Παλαιὰ	—	350	—	110
	Μίλ. Ἰταλικὸν	1851	—					
ΤΟΥΡΚΙΑ	Πήχ. Ἐνδεζὲ	—	648	Δράμιον	—	3	—	1
	» Ἀρσχὶν	—	669	Ὀκὰ	—	1280	1	—
	» Τεκτον.	—	750	Στατὴρ	37	545	44	
	Μίλλιον κοινὸν	1666	666	Τόννος=1]2 Καλ.	695	—	814	

ΠΙΝΑΞ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ

Εἶδος Νομίσματος	Ἀξία εἰς Δραχμάς			
	Παλαιάς		Νέας	
	Δρ.	Λ.	Δρ.	Λ.
ΧΡΥΣΑ				
Γαλλικὸν Εἰκοσάφραγκον	22	33	20	00
Γαλλικὸν Λουΐγγιον νέον	26	53	23	75
Ἀγγλικὴ Λίρα Στερλίνα (20 σελίγγια)	28	12	25	00
Τὸ ἥμισυ αὐτῆς	14	06	12	50
Ἱσπανικὸν τετραπλοῦν (1772-1786)	92	60	82	91
Τὸ ἥμισυ αὐτοῦ	46	30	41	46
Τὸ τέταρτον αὐτοῦ ἤτοι Πιστόλα	23	15	20	72
Τὸ ὄγδοον ἤτοι ἡμιπιστόλα	11	46	10	26
Τὸ δέκατον ἕκτον ἤτοι μικρὸν χρυσοῦν τάλληρον	5	96	4	44
Αὐστριακὸν Σουφερίνιον (Βελγικὸν)	38	88	34	81
Τὸ ἥμισυ αὐτοῦ	19	44	17	40
Ὁλλανδικὸν φλωρίον	13	00	11	64
Ἐνετικὸν Σεκίνι	13	24	11	85
Δούπια Πορτογαλλίας τῶν 12806 ρεΐς	100	50	89	09
Τὸ ἥμισυ αὐτῆς » 6400 »	50	25	44	54
Μεξικανικὸν τῶν 20 ταλλήρων διπλοῦς ἀετὸς	115	70	103	59
» » 10 » ἀετὸς	57	85	51	79
» » 5 » ἥμισυ ἀετοῦ	28	92	25	89
» » 2 1]2 » τέταρτον ἀετοῦ	14	46	12	94
» » 1 » Δολλάρ.	5	78	5	18
Τουρκίας φλωρίον χρυσοῦν 100 γροσίων	25	42	22	76
Τὸ ἥμισυ αὐτοῦ	12	71	11	38
Ῥωσσικὸν δουκάτον ἀετοῦ	13	15	11	78
» » (1763)	12	94	11	59
» Παύλου Α' καὶ Ἀλεξάνδρου Α', 10 ρουβλίων	58	49	52	38
» Τῶν 5 ρουβλίων (1849)	23	07	20	66
ΑΡΓΥΡΑ				
Γαλλικὸν φράγκον	1	11	1	00
» πεντάφραγκον	5	58	5	00
Ἀγγλικὴ κορῶνα 5 σελιγγίων (1816)	6	40	6	25
Ἀγγλικὸν σελίγγιον	1	28	1	25
» ἡμισελίγγιον		64		62
Ῥωσσικὸν ρούβλιον ἀργυροῦν (1796)	4	41	3	95
» » » (1799)	4	50	4	02
» » » (1802)	4	54	4	05
Τὸ ἥμισυ ρουβλίου (1778)	2	21	1	98
» » (1800)	2	25	2	01
Σολοτνὶκ	1	11	1	00
Ῥωσσικὸν εἴκοσι καππικίων (1767)		99		89
Ἱσπανικὸν δίστηλον	6	00	5	37
Τὸ ἥμισυ αὐτοῦ (1780)	3	00	2	69
» » (1792)	2	97	2	65
Γερμανικὸν τάλληρον, Αὐστριακὸν, Βαυαρικὸν	5	77	5	16
Αὐστριακὸν θηρεσιανὸν τάλληρον	5	79	5	18
Γερμανικὸν εἰκοσάρι (σβάντσικα)		95		85
Κορῶνα Βαυαρίας καὶ Βρεβάντ	6	36	5	69
Διφιορίνιον	5	51	4	93
Φιορίνιον	2	75	2	46
Τέταρτον φιορινίου		68		60
Τάλληρον Ἐνετίας τῶν 10 λιρῶν (1797)	5	87	5	25
Ἐνετικὴ λίρα (1800)		27		24
» » (1802)		49		43
Τὸ ἥμισυ αὐτῆς		24		21
Τοσκανικὸν τάλληρον (φραντσεσκόνι)	6	21	5	56
Ῥωμαϊκὸν τάλληρον 10 παῦλα	5	97	5	34
Τάλληρον Βολωνίας 10 παῦλα	5	99	5	36
Τάλληρον Νεαπόλεως (1805)	5	72	5	12
Τάλληρον Τουρκικὸν 20 γροσίων	4	95	4	43

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Ὁρισμοὶ καὶ Ἀλγεβρικὰ σύμβολα.—Ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων τῶν πολυωνύμων.—Αἱ τέσσαρες πράξεις.—Ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

Ὁρισμοὶ καὶ Ἀλγεβρικὰ σύμβολα.

91. Ἡ ἄλγεβρα σκοπὸν ἔχει, οὐχὶ τὴν λύσιν μερικῆς τινος προτάσεως, ἀλλὰ διὰ γενικοῦ τινος τρόπου τὴν λύσιν πασῶν τῶν ὁμοίων τοιούτων. Τούτου ὅθεν ἕνεκα, ἐκλήθη γενικὴ Ἀριθμητική.

Ἐν τῇ Ἀλγέβρῃ αἱ γνωσταὶ καὶ ἄγνωστοι ποσότητες ἐκφράζονται διὰ γραμμάτων, καὶ διὰ σημείων, αἱ ἐκ τῆς ἐκφράσεως τῆς προτάσεως διδόμεναι μεταξὺ τῶν ποσοτήτων ἢ γραμμάτων τούτων σχέσεις. Ἀκολούθως, τῇ συνδρομῇ κανόνων τινῶν, ἀποτελούντων τὸν ἀλγεβρικὸν ὑπολογισμόν, αἱ σχέσεις αὗται τρέπονται διαδοχικῶς εἰς ἄλλας ἁπλουστέρας, ἄχρις οὗ εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἑκάστης ἀγνώστου, ὑπὸ γενικήν τινα μορφήν, εἰς τὴν ὁποίαν, ἐν ἑκάστῃ παρουσιαζομένῃ περιστάσει, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀγνώστου δὲν ὑπολείπεται παρὰ ἡ ἀντικατάστασις τῶν γραμμάτων διὰ τῶν σχετικῶν τιμῶν των, καὶ ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἐνδεικνυομένων ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν. Ἡ γενικὴ αὕτη μορφή, ὑφ' ἣν παρουσιάζεται ἡ ἀξία τῆς ἀγνώστου, καλεῖται *τύπος*.

Συνήθως ἐν τοῖς ἀλγεβρικοῖς ὑπολογισμοῖς, αἱ γνωσταὶ ποσότητες παριστάνονται διὰ τῶν πρώτων τοῦ ἀλφαβήτου γραμμάτων α, ϐ, γ,... αἱ δὲ ἄγνωστοι διὰ τῶν τελευταίων αὐτοῦ, χ, ψ, ω κτλ. Ὁ τονισμὸς τῶν γραμμάτων α' α'' α''' ὡς καὶ ἡ γραφὴ α_1 α_2 α_3 κτλ. ἐμφαίνει ὅτι ταῦτα παριστῶσιν ἀναλόγους μὲν ποσότητας, διαφόρου ὅμως ἀξίας.

Ἐν τῇ ἀλγέβρῃ γίνεται χρῆσις τῶν ἰδίων ὡς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ σημείων (13), πρὸς γραφὴν ὅμως γινομένου ἐκ διαφόρων γραμμάτων συνήθως τίθεται ἀντὶ τοῦ σημείου $\times$ στιγμή, ἢ καὶ αὕτη παραλείπεται. Οὕτω $\alpha\times\beta\times\gamma$ γράφεται καὶ α. β. γ. ἢ ἁπλῶς αϐγ.

Ἐπίσης $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐμφαίνει τὴν διαίρεσιν α διὰ β ἢ τὸν λόγον μεταξὺ α καὶ β.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐμφαίνων τὴν ἐπανάληψιν πλειστάκις γράμματος διὰ προσθέσεως καλεῖται *συντελεστής*· οὕτω $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha=4\times\alpha=4\alpha$, ὅπου 4 ἐστὶν ὁ συντελεστὴς τοῦ α. Ὁ συντελεστὴς δύναται νὰ ἦναι καὶ κλάσμα. Οὕτω $\frac{3}{4}\times\alpha=\frac{3}{4}\alpha$.

92. Ἡ παράστασις τῆς ὑψώσεως ἀριθμοῦ τινος εἰς τὸ τετράγωνον ἢ τὸν κῦϐον, γίνεται ὡς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ (59, 64) ἤτοι α^2, α^3.

Ἐὰν τὸ α^3 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ α, τὸ ἐξαγόμενον ἐστὶν ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ α, σημειοῦται δὲ α^4. Ἐπίσης $\alpha^4\times\alpha=\alpha^5$, ὅπερ ἐμφαίνει τὴν πέμπτην δύναμιν τοῦ α, ἤτοι ὅτι τὸ α πολλαπλασιάζεται πεντάκις ἐφ' ἑαυτό. Πᾶς νέος ὅθεν πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ α, αὐξάνει τὸν ἐκθέτην κατὰ μονάδα, ἐπειδὴ $\alpha^3\times\alpha\times\alpha=\alpha^3\times\alpha^2=\alpha^5$, καὶ ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς μὴ ἔχων ἐκθέτην, ἔχει τοιοῦτον τὴν μονάδα, ἕπεται ὅτι πρὸς πολλαπλασιασμὸν δύο ἴσων ποσοτήτων, ὑψωμένων εἰς δύναμίν τινα, γράφεται ἅπαξ ἡ ποσότης, μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν. Ἤτοι $\alpha^6\times\alpha^2=\alpha^{6+2}=\alpha^8$.

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^4}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2\times\alpha^2}{\alpha^2}=\alpha^2$, ἕπεται ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἴσων ποσοτήτων ὑψουμένων εἰς διάφορον δύναμιν, ἰσοῦται τῇ ποσότητι ταύτῃ φερούσῃ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν, ὡς $\frac{\alpha^5}{\alpha^3}=\alpha^{5-3}=\alpha^2$.

Ἐν τῇ περιπτώσει $\frac{\alpha^5}{\alpha^5}=1$, κατὰ τ' ἀνωτέρω $\frac{\alpha^5}{\alpha^5}=\alpha^{5-5}=$

α^0 ἕπεται ὅτι $\alpha^0=1$, ὅπερ δεικνύει ὅτι ποσότης τις φέρουσα ἐκθέτην 0, ἰσοῦται τῇ μονάδι.

Ἐπίσης $\frac{\alpha^2}{\alpha^3}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2\times\alpha}=\frac{1}{\alpha}$, καὶ ἐπειδὴ $\frac{\alpha^2}{\alpha^3}=\alpha^{2-3}=\alpha^{-1}$, ἕπεται ὅτι $\alpha^{-1}=\frac{1}{\alpha}$, ἤτοι ποσότης ὑψουμένη εἰς ἀρνητικὴν δύναμιν, ἰσοδυναμεῖ τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τῆς μονάδος διὰ τῆς ποσότητος ταύτης.

93. Παρομοίως ὡς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ (59, 63), ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ῥίζης γίνεται διὰ τῆς γραφῆς τῆς σχετικῆς ποσότητος ὑπὸ τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$, ῥιζικὸν καλούμενον.

Ὡς τὸ τετράγωνον καὶ ὁ κῦβος, οὕτω καὶ ἡ τετάρτη, πέμπτη κτλ. δύναμις ποσότητός τινος, ἐστὶ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ποσότητος ταύτης, τετράκις πεντάκις κλ. ἐφ' ἑαυτήν, ἡ δ' ἀρχικὴ πολλαπλασιασθεῖσα ποσότης, ἐστὶν ἡ τετάρτη, πέμπτη, κλ. ῥίζα τῆς ὁμοίας δυνάμεως. Σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου μὲ τὸν ἀνάλογον ἀριθμὸν $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, κλ.

Ἐπειδὴ $\sqrt[2]{3^6}=\sqrt[2]{3^{2\times3}}=3^3=3^{\frac{6}{2}}$, ἕπεται ὅτι ἡ ῥίζα ποσότητός τινος ὑψουμένης εἴς τινα δύναμιν, ἰσοῦται τῇ ποσότητι ταύτῃ, φερούσῃ ἐκθέτην κλάσμα, οὗτινος ἀριθμητὴς μὲν ἐστὶν ὁ ἐκθέτης τῆς ποσότητος, παρονομαστὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς τῆς δυνάμεως τοῦ ῥιζικοῦ.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $\sqrt[6]{\frac{1}{\alpha}}=\sqrt[6]{\alpha^{-1}}$ (92), ἕπεται κατὰ τ' ἀνωτέρω ὅτι $\sqrt[6]{\frac{1}{\alpha}}=\alpha^{-\frac{1}{6}}$. Τουτέστιν, ἡ ῥίζα κλάσματος οὗτινος ἀριθμητὴς μὲν ἐστὶν ἡ μονάς, παρονομαστὴς δὲ ποσότης τις, ἰσοῦται τῇ ἐμφαινούσῃ τὸν παρονομαστὴν ποσότητι, φερούσῃ ἀρνητικὸν κλασματικὸν ἐκθέτην, οὗτινος ἀριθμητὴς μὲν ἐστὶν ἡ μονάς, παρονομαστὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς τῆς δυνάμεως τοῦ ῥιζικοῦ.

Οἱ διάφοροι οὗτοι τρόποι τῆς γραφῆς τῶν αὐτῶν ποσοτήτων, εἰσὶ λίαν ἐν χρήσει ἐν τοῖς ἀλγεβρικοῖς ὑπολογισμοῖς.

94. *Ἀλγεβρικὴ ποσότης* καλεῖται πᾶσα ποσότης παριστανομένη δι' ἀλγεβρικῆς ἐκφράσεως, τουτέστι διὰ πλειόνων γραμμάτων παριστώντων ἀριθμούς, καὶ συνδεδεμένων μεταξύ των δι' ἀλγεβρικῶν σημείων.

Ἡ ἀλγεβρικὴ ποσότης καλεῖται *λογικὴ* ὁπόταν δὲν περιέχῃ ῥιζικόν, ὡς ἡ $5\alpha\beta^2-\frac{3\alpha+6}{\gamma}+2\beta\gamma$.

Καλεῖται δ' *ἄλογος*, ὅταν περιέχῃ ἓν ἢ πλειότερα ῥιζικά, ὡς ἡ $4\alpha^2\beta - \sqrt{\alpha\beta^3}$.

Καλεῖται *ἀκεραία*, ὅταν δὲν περιέχῃ ῥιζικὸν οὔτε σημεῖον διαιρέσεως, ὡς ἡ $4\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\gamma - 3\gamma^4$.

Καὶ τέλος καλεῖται *κλασματική*, ὅταν ἐμπεριέχῃ τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, ὡς $2\alpha\beta^2 + \frac{\alpha - 3\beta}{2}$.

95. Καλεῖται *ἀλγεβρικὸς ὅρος*, πᾶσα ἀλγεβρικὴ ποσότης, ἧς τὰ μέρη δὲν χωρίζονται διὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$, ὡς ἡ $4\alpha\beta^3\gamma^2$.

Μονώνυμον, δυώνυμον, τριώνυμον κλ., πολυώνυμον, καλεῖται ἡ ἀλγεβρικὴ ἔκφρασις, ἡ συγκειμένη ἐξ ἑνός, δύο, τριῶν ἢ πολλῶν ὅρων.

Ὅρος τις καλεῖται θετικὸς ἢ ἀρνητικός, καθόσον προηγεῖται αὐτοῦ τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$.

96. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς τινος ἐκφράσεως, ἐστὶ τὸ λαμβανόμενον ἀποτέλεσμα διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν γραμμάτων διὰ τῶν παριστανομένων δι' αὐτῶν ἀριθμῶν, καὶ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἐνδεικνυομένων ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν. Οὕτω τῇ ὑποθέσει $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=4$, ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta\gamma^2 - \gamma^2$ ἐστὶ $2^2 + 2\times3 + 3^2\times4 - 4^2 = 18$.

Προκύπτει ὅθεν προφανῶς ἐκ τούτου, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ πολυωνύμου τινος δὲν μεταβάλλεται, ἀλλασσομένης τῆς τάξεως τῶν ὅρων διατηρούντων τὰ σχετικὰ αὐτῶν σημεῖα.

97. Ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως ὅρου τινος ἢ μονωνύμου, σχετικῶς πρὸς ἓν τῶν γραμμάτων αὐτοῦ, δείκνυται διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ γράμματος τούτου, ὁ δὲ βαθμὸς τῆς δυνάμεως αὐτοῦ, σχετικῶς πρὸς ἅπαντα τὰ γράμματα αὐτοῦ, δείκνυται διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν. Οὕτω τὸ μονώνυμον $7\alpha^2\beta^3$, ἐστὶ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ γράμμα α, τοῦ τρίτου δὲ ὡς πρὸς τὸ β, ὡς πρὸς τὰ γράμματα ὅμως ὁμοῦ α καὶ β ἐστὶ τοῦ 5ου βαθμοῦ. Ἐπίσης ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως πολυωνύμου τινος, σχετικῶς πρὸς γράμμα τι αὐτοῦ, δείκνυται διὰ τοῦ μεγαλειτέρου ἐκθέτου τοῦ γράμματος τούτου, πρὸς πλείονα ὅμως τῶν γραμμάτων του, δείκνυται διὰ τοῦ μεγαλειτέρου ἀθροίσματος τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων τούτων τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς ἕνα τινα αὐτοῦ ὅρον. Οὕτω τὸ πολυώνυμον $5\alpha\beta^3 + 6\alpha^2\beta^5 - 9\alpha^4\beta^3$, ἐστίν, ὡς πρὸς μὲν τὸ γράμ-

μα α τοῦ 4ου βαθμοῦ, ὡς πρὸς τὸ β τοῦ 3ου καὶ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β τοῦ $4+3=7$ου βαθμοῦ.

Ὁπόταν μονώνυμόν τι ἢ πολυώνυμον δὲν ἐμπεριέχῃ γράμμα τι, θεωρεῖται ὅτι ἐμπεριέχει τοῦτο εἰς τὴν 0 δύναμιν (92).

98. Πολυώνυμόν τι ἐστὶν ὁμογενὲς, σχετικῶς πρὸς ἓν ἢ πλείονα αὐτοῦ γράμματα, ὁπόταν πάντες οἱ ὅροι αὐτοῦ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, σχετικῶς πρὸς τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα ταῦτα. Οὕτω τὸ πολυώνυμον $5\alpha^2\beta\gamma^3+6\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta\gamma^3$ ἐστὶν ὁμογενὲς καὶ τοῦ 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ γράμμα α, καὶ ὁμογενὲς τοῦ 4ου βαθμοῦ, ὡς πρὸς τὰ γράμματα β καὶ γ.

Πολυώνυμόν τι λέγεται ἁπλῶς ὁμογενές, ὁπόταν πάντες οἱ ὅροι αὐτοῦ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, ὡς τὸ $3\alpha^2\beta^3\gamma+5\alpha^3\beta\gamma^2-\alpha^4\beta^2$ οὗ τινος πάντες οἱ ὅροι εἰσὶ τοῦ 6ου βαθμοῦ.

99. *Ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων*. Καλοῦνται ὅμοιοι ὅροι, οἱ συγκείμενοι ἐκ τῶν αὐτῶν γραμμάτων μετὰ τῶν αὐτῶν ἐκθετῶν, διαφέροντες δὲ μόνον κατὰ τοὺς συντελεστάς, καὶ τὰ προτασσόμενα σημεῖα. Οὕτω $\alpha\beta$ καὶ $4\ \alpha\beta$, ἢ $6\ \alpha^2\ \beta^3$ καὶ $-2\alpha^2\beta^3$ εἰσὶν ὅροι ὅμοιοι.

Ἡ εἰς ἕνα καὶ μόνον ὅρον συνένωσις ἑκάστου συνόλου ὁμοίων ὅρων πολυωνύμου τινός, καλεῖται ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ πολυωνύμου τούτου.

Πρὸς ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων πολυωνύμου τινός, ἀντικαθίσταται ἕκαστον σύνολον ὁμοίων ὅρων, δι' ἑνὸς καὶ μόνου ὁμοίου τούτοις, ἔχοντος συντελεστὴν ἴσον τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀθροίσματος τῶν θετικῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν, προτάσσεται δὲ αὐτοῦ τὸ σημεῖον τοῦ μεγαλειτέρου τῶν συντελεστῶν τούτων ἀθροίσματος. Οὕτω τὸ πολυώνυμον

$$3\alpha\beta^2-4\alpha^2\gamma+3\alpha^2\gamma-\alpha\beta^2-5\alpha^2\gamma+7\beta\gamma$$

γράφεται (96)

$$3\alpha\beta^2-\alpha\beta^2+3\alpha^2\gamma-4\alpha^2\gamma-5\alpha^2\gamma+7\beta\gamma,$$

καὶ ἐπειδὴ $3\alpha\beta^2-\alpha\beta^2=2\alpha\beta^2$ καὶ $3\alpha^2\gamma-4\alpha^2\gamma-5\alpha^2\gamma=3\alpha^2\gamma-9\alpha^2\gamma=-6\alpha^2\gamma$

τὸ ἀρχικὸν πολυώνυμον ἀποβαίνει

$$2\alpha\beta^2-6\alpha^2\gamma+7\beta\gamma.$$

Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὁμοίων ὅρων δύνανται νὰ γραφῶσι καὶ ἐντὸς

παρενθέσεως, διατηρουμένων τῶν σχετικῶν αὐτῶν σημείων. Οὕτω τὸ πολυώνυμον

$$7\chi + \alpha\chi - \alpha\beta\chi + \alpha\psi^2 - \gamma\psi^2 - \gamma\delta\psi^2$$

γράφεται $(7+\alpha-\alpha\beta)\chi + (\alpha-\gamma-\gamma\delta)\,\psi^2$.

Τῶν πράξεων τούτων γίνεται συχνὴ χρῆσις ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς.

Περὶ προσθέσεως.

100. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ πλειόνων ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων, μονωνύμων ἢ πολυωνύμων, γράφονται αὗται ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης, διατηροῦσαι ἐν ἑκάστῳ ὅρῳ τὸ ἀρχικὸν αὐτοῦ σημεῖον, ἀκολούθως δὲ ἐνεργεῖται ἡ τῶν ὁμοίων ὅρων ἀναγωγή, ἂν τοιοῦτοι ὑπάρχουσιν Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων $3\alpha^2+4\alpha\beta$, $6\alpha\beta-\alpha^2$, $5\beta^3-3\alpha\beta$ καὶ $-2\beta\gamma$ ἐστὶ $3\alpha^2+4\alpha\beta+6\alpha\beta-\alpha^2+5\beta^3-3\alpha\beta-2\beta\gamma$

καὶ δι' ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων (99) $2\alpha^2+7\alpha\beta+5\beta^2-2\beta\gamma$.

Εὐκολώτερον ὅμως εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα διὰ τῆς γραφῆς τῶν διαφόρων ἐκφράσεων, τῆς μιᾶς κάτωθεν τῆς ἄλλης, ὁπότε ἐκτελῆται κατὰ τὴν γραφὴν τοῦ ἀθροίσματος καὶ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, ἤτοι·

$$\begin{array}{l} 4\alpha^3+5\alpha^2\beta+\gamma \\ 2\alpha^3-7\alpha^2\beta-4\gamma \\ 6\alpha^2\beta+\gamma+\beta\gamma+25 \\ \hline 6\alpha^3+4\alpha^2\beta-2\gamma+\beta\gamma+25. \end{array}$$

Παρατηρητέον ὅτι ἡ πρόσθεσις ἀρνητικῆς ποσότητος εἰς ἑτέραν τινα ἐλαττοῖ ταύτην, ὥστε ἐν τῇ ἀλγέβρῃ ἡ πρόσθεσις δὲν συνεπάγει πάντοτε τὴν ἰδέαν τῆς ἐπαυξήσεως.

Περὶ ἀφαιρέσεως.

101. Πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων, γράφεται ἡ ἀφαιρουμένη ποσότης δεξιόθεν ἐκείνης ἐξ ἧς γενήσεται ἡ ἀφαίρεσις, ἀντιστρέφονται δὲ τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς ἀφαιρουμένης ταύτης ποσότητος, ἀκολούθως δ' ἐνεργεῖται ἡ τῶν ὁμοίων ὅρων ἀναγωγή, ἂν τοιοῦτοι ὑπάρχωσιν. Οὕτως ἡ ἀφαίρεσις τοῦ $3\alpha^2-2\alpha\beta+\beta\gamma+\beta^2$ ἐξ $7\alpha^2-2\alpha\beta$ ἐκτελεῖται

$$7\alpha^2-2\alpha\beta-3\alpha^2+2\alpha\beta-\beta\gamma+\beta^2$$

καὶ δι' ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων προκύπτει

$$4\alpha^2-\beta\gamma+\beta^2.$$

Ἡ γραφὴ ὅμως τῆς ἀφαιρετέας ποσότητος ἢ ἀφαιρέτου, κάτωθεν τοῦ ἀφαιρετέου, μετὰ τὴν ἀντιστροφὴν τῶν σημείων, παρέχουσα τὴν πρόχειρον ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὐκολύνει τὴν πρᾶξιν. Οὕτως ἡ ἀφαίρεσις $2\alpha+3\beta^2\gamma-7$ ἐξ $8\alpha-5\beta^2\gamma-4$ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 8\alpha-5\beta^2\gamma-4 \\ -2\alpha-3\beta^2\gamma+7 \\ \hline 6\alpha-8\beta^2\gamma+3. \end{array}$$

Ἡ ἀφαίρεσις δύναται ἔτι νὰ σημειωθῇ, τιθεμένου τοῦ ἀφαιρετέου ἐντὸς παρενθέσεως τηρουμένων τῶν σχετικῶν σημείων τῶν ὅρων, καὶ προηγουμένου τῆς παρενθέσεως τοῦ σημείου —, ὡς

$$8\alpha-5\beta^2\gamma-4-(2\alpha+3\beta^2\gamma-7).$$

Ὥστε πρὸς ἐξάλειψιν τῆς παρενθέσεως δέον ν' ἀντιστραφῶσι τὰ σημεῖα τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων.

Παρατηρητέον ὅτι καθ' ὅσον ἀφαιρεῖται ἔκ τινος ἀλγεβρικῆς ἐκφράσεως θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ποσότης, ἡ διαφορὰ ἐλαττοῦται ἢ αὐξάνει. Ἕπεται ὅθεν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις, ἐν τῇ ἀλγέβρῃ, δὲν συνεπιφέρει πάντοτε μείωσιν.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.

102. Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ μονωνύμου τινὸς ἐπὶ μονώνυμον, διακριτέον τέσσαρα τινα, ὡς ἑξῆς·

1ον Κανὼν σημείων. Τὸ γινόμενον δύο μονωνύμων φερόντων τὸ αὐτὸ σημεῖον, φέρει τὸ σημεῖον +, τὸ δὲ τῶν φερόντων σημεῖον ἐναντίον, φέρει τὸ σημεῖον —. Οὕτω + ἐπὶ + καὶ — ἐπὶ — δίδουσι +, καὶ + ἐπὶ — δίδει —.

2ον Κανὼν συντελεστῶν. Ὁ συντελεστὴς γινομένου τινος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν συντελεστῶν τῶν παραγόντων.

3ον Κανὼν γραμμάτων. Πᾶν γράμμα, εἰς τὸν ἕνα ἢ τοὺς δύο παράγοντας περιεχόμενον, γράφεται μόνον ἅπαξ εἰς τὸ γινόμενον.

4ον Κανὼν ἐκθετῶν. Ὁ ἐκθέτης παντὸς γράμματος ἐν τῷ γινομένῳ, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐκθετῶν τοῦ γράμματος τούτου ἐν τοῖς παράγοσι. Γράμμα τι μὴ φέρον ἐκθέτην, ὑποτίθεται φέ-

ρον τοιοῦτον τὴν μονάδα, τὸ δὲ μὴ ἐμπεριεχόμενον εἰς ὅρον τινα, ὑποτίθεται ὑπάρχον μ' ἐκθέτην 0.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τεσσάρων τούτων κανόνων δίδει

$$+3\alpha^{\mu}\times\alpha=+3\alpha^{\mu+1}$$
$$-2\alpha\times-3\alpha^2\beta^2=+6\alpha^3\beta^2$$
$$+4\alpha^2\beta^3\gamma\times-\beta^2\gamma=-4\alpha^2\beta^5\gamma^2$$
$$-2\beta^2\gamma\delta\times+4\gamma^2\delta^3\varepsilon^2=-8\beta^2\gamma^3\delta^4\varepsilon^2.$$

103. Τὸ γινόμενον πλειόνων μονωνύμων εὑρίσκεται διὰ τοῦ μεταξύ των πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο, ἀκολούθως τοῦ γινομένου τούτων ἐπὶ ἕτερον, τοῦ προκύπτοντος γινομένου ἐπὶ ἕτερον κλπ, ἄχρι τοῦ τελευταίου.

Ἐκ τοῦ κανόνος τούτου, καὶ τοῦ (102) προκύπτει ὅτι, 1ον ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρνητικῶν μονονύμων παραγόντων ἐστὶ 0 ἢ ἄρτιος, τὸ γινόμενον φέρει τὸ σημεῖον +, ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγόντων τούτων ἐστὶ περιττός, τὸ γινόμενον φέρει τὸ σημεῖον —.

2ον Ὁ συντελεστὴς τοῦ γινομένου, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν συντελεστῶν τῶν παραγόντων.

3ον Γράμμα τι ἐμπεριεχόμενον τοὐλάχιστον εἰς ἕνα τῶν παραγόντων, γράφεται μόνον ἅπαξ εἰς τὸ γινόμενον.

4ον Ὁ ἐκθέτης ἑκάστου γράμματος τοῦ γινομένου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐκθετῶν τοῦ ἐν τοῖς παράγοσι γράμματος τούτου. Κατὰ ταῦτα

$$2\alpha\times3\alpha^2\beta\times-\beta^3\gamma^2\times-5=30\alpha^3\beta^4\gamma^2$$

καὶ $3\alpha^2\times-2\alpha\beta^2\times-5\alpha^4\beta\gamma^3\times-5\gamma=-150\alpha^7\beta^3\gamma^4.$

104. Πρὸς ὕψωσιν μονωνύμου εἰς τὸ τετράγωνον, ὑψοῦται εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ὁ συντελεστής, καὶ διπλασιάζεται ὁ ἐκθέτης ἑκάστου γράμματος. Διότι (102)

$$(3\alpha^2\beta^2\gamma)^2=3\alpha^2\beta^2\gamma\times3\alpha^2\beta^2\gamma=9\alpha^4\beta^4\gamma^2.$$

Τὸ σημεῖον τοῦ τετραγώνου ἐστὶ πάντοτε τὸ +.

Πρὸς ὕψωσιν μονωνύμου εἰς τὸν κῦβον, ὑψοῦται εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ὁ συντελεστὴς αὐτοῦ, οἱ δ' ἐκθέται ἑκάστου γράμματος τριπλασιάζονται. Τὸ σημεῖον τοῦ κύβου ἐστὶ τὸ τοῦ ἀρχικοῦ μονωνύμου. Οὕτω

$$(3\alpha^2\beta^3\gamma)^3=(3\alpha^2\beta^3\gamma)^2\times(3\alpha^2\beta^3\gamma)=9\alpha^4\beta^6\gamma^2\times3\alpha^2\beta^3\gamma=27\alpha^6\beta^9\gamma^3.$$

Καὶ

$(-3\alpha^2\beta^3\gamma)^3 = (-3\alpha^2\beta^3\gamma)^2 \times (-3\alpha^2\beta^3\gamma) = 9\alpha^4\beta^6\gamma^2 \times -3\alpha^2\beta^3\gamma = -27\alpha^6\beta^9\gamma^3$.

105. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ποσοτήτων ἰσοῦται με τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης, πλέον τοῦ διπλασίου γινομένου τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν, πλέον τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας (61), ἤτοι $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

Ὁμοίως ἔχει καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, πλὴν τὸ σημεῖον τοῦ διπλασίου γινομένου τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν ποσότητα ἐστὶ —, οὕτω $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

Ἡ διαφορὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος δύο ποσοτήτων, καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς διαφορᾶς των, ἰσοῦται τῷ τετραπλασίῳ γινομένῳ τῶν δύο τούτων ποσοτήτων, ἤτοι·

$$(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta.$$

Ὁ κῦβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ποσοτήτων ἰσοῦται τῷ κύβῳ τῆς πρώτης, πλέον τὸ τριπλάσιον τοῦ γινομένου τοῦ τετραγώνου τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν, πλέον τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς πρώτης ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας, πλέον τοῦ κύβου τῆς δευτέρας (66), ἤτοι·

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.$$

Παρομοίως ἔχει καὶ διὰ τὸν κῦβον τῆς διαφορᾶς δύο ποσοτήτων, πλὴν ὁ δεύτερος καὶ τέταρτος ὅρος φέρουσι σημεῖον —

ἤτοι $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$.

Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ποσοτήτων ἐπὶ τὴν διαφοράν των, ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ἤτοι·

$$(\alpha+\beta) \times (\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2.$$

106. Ἡ διάταξις πολυωνύμου τινὸς πρὸς γράμμα τι αὐτοῦ, γίνεται γραφομένων τῶν ὅρων αὐτοῦ οὕτως ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος τούτου νὰ προβαίνωσι μειούμενοι ἢ τ' ἀνάπαλιν· δύναται δὲ νὰ γραφῇ ὁ τυχὼν ὑπάρχων κοινὸς συντελεστὴς ἢ τὸ κοινὸν εἰς πάντας τοὺς ὅρους καὶ εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν γράμμα ἔξωθεν παρενθέσεως ἐν ᾗ γράφεται τὸ πολυώνυμον. Οὕτω τὸ πολυώνυμον

$$3\alpha\beta^4 + 6\alpha^3\beta - 15\alpha^2\beta^2 + 3\alpha^4$$

τάσσεται πρὸς τὸ γράμμα α κατιόντως

$$3\alpha^4 + 6\alpha^3\beta - 15\alpha^2\beta^2 + 3\alpha^4 \;\text{ἢ}\; 3\alpha(\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2 + \beta^4).$$

107. Ὁ πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον ἐκτελεῖ-

ται πολλαπλασιαζομένων πάντων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας κανόνας. Οὕτω·

$$\begin{array}{l} 3\alpha^2+4\alpha\beta-\beta\gamma \\ \underline{2\alpha\beta^2\qquad\qquad\qquad} \\ 6\alpha^3\beta^2+8\alpha^2\beta^3-2\alpha\beta^4\gamma. \end{array}$$

Πρὸς ἔνδειξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὰ πολυώνυμα τίθενται ἐντὸς παρενθέσεως.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον στηρίζεται ἐπὶ τῶν αὐτῶν κανόνων, πλὴν δὲν ἔχει πρακτικὸν σκοπὸν ἐν τῷ παρόντι.

Περὶ διαιρέσεως.

108. Ἐν τῇ διαιρέσει μονωνύμου τινὸς δι' ἑτέρου, διακριτέον τέσσαρά τινα, ὡς καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ.

1ον Τὸ πηλίκον φέρει σημεῖον + ἢ —, καθ' ὅσον ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης φέρουσι σημεῖα ὅμοια ἢ ἀντίθετα. Οὕτω + διὰ + καὶ — διὰ —, δίδουσι + εἰς τὸ πηλίκον, + δὲ διὰ — καὶ — διὰ +, δίδουσι —.

2ον Ὁ συντελεστὴς τοῦ πηλίκου ἐστὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου δι' ἐκείνου τοῦ διαιρετέου.

3ον Τὰ γράμματα τοῦ τε διαιρετέου καὶ διαιρέτου δὲν γράφονται ἢ ἅπαξ εἰς τὸ πηλίκον.

4ον Ὁ ἐκθέτης ἑκάστου γράμματος τοῦ πηλίκου ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν τοῦ γράμματος τούτου ἔν τε τῷ διαιρετέῳ καὶ διαιρέτῃ.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν κανόνων τούτων δίδει

$$\frac{24\alpha^3\beta^3\gamma^2\delta}{6\alpha\beta^2\gamma}=4\alpha^2\beta\gamma\delta \text{ καὶ } \frac{15\alpha^5\beta^6\gamma\delta^3}{-3\alpha^3\beta^5\delta^2}=-5\alpha^2\beta^3\gamma\delta.$$

Ἵνα μονώνυμόν τι ἐστὶ διαιρετέον δι' ἑτέρου, δέον ἵνα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν συντελεστῶν ἐστὶν ἀκέραιον, ἕκαστον δὲ γράμμα τοῦ διαιρέτου νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸν διαιρετέον, μὲ ἐκθέτην κατ' ἐλάχιστον ἴσον τῷ ἐν τῷ διαιρέτῃ ἐκθέτῃ τοῦ γράμματος τούτου.

Ὅταν τὸ πηλίκον τῶν συντελεστῶν δὲν ἦναι ἀκέραιον, καὶ ἡ διαίρεσις τῶν γραμμάτων δυνατή, ἐκτελεῖται αὕτη καὶ ὁ συντελεστὴς μένει κλασματικός, ὡς $\frac{6\alpha^4\beta^2}{9\alpha^2\beta}=\frac{2}{3}\alpha^2\beta$.

109. Ἡ διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου ἐκτελεῖται διὰ τῆς διαιρέσεως ἑκάστου ὅρου τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου. Οὕτω·

$$\frac{4\alpha^2\beta+2\alpha^4\beta^2\gamma-5\alpha^3\beta^3\gamma^2}{\alpha^2\beta}=4\alpha^2+2\alpha^2\beta\gamma-5\alpha\beta^2\gamma^2.$$ Καὶ ὁμοίως

$$\frac{4\alpha^5\beta+3\alpha^4\beta^2\gamma-5\alpha\beta^3}{2\alpha^2\beta}=\frac{4\alpha^5\beta}{2\alpha^2\beta}+\frac{3\alpha^4\beta^2\gamma}{2\alpha^2\beta}-\frac{5\alpha\beta^3}{2\alpha^2\beta}=2\alpha^3+\tfrac{3}{2}\,\alpha^2\beta\gamma-\frac{5\beta^2}{2\alpha}.$$

Ἡ διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου ἐκτελεῖται στηριζομένη ἐπὶ τῶν ἄνω ἀρχῶν, πλὴν οὐδένα πρακτικὸν σκοπὸν ἐν τῷ παρόντι ἔχει.

110. *Ἀλγεβρικὰ κλάσματα.* Ἀλγεβρικὸν κλάσμα ἐστὶν ἡ ἔκφρασις τοῦ πηλίκου δύο ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων (34), ὡς $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha^3+\beta^4}{\alpha+\beta}$.

Πάντες οἱ τεθέντες ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων κανόνες ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν. Οὕτω·

$$\alpha=\frac{\alpha}{\beta}(35)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\gamma=\frac{\alpha\gamma}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta:\gamma}\ (37)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}:\gamma=\frac{\alpha}{\beta\gamma}=\frac{\alpha:\gamma}{\beta}\ (37)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}=\frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}\ (38)$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}\ \text{καὶ}\ \frac{2\alpha\beta^3\gamma^4}{3\beta^3\gamma^6}=\frac{4\alpha\beta}{\gamma^2}\ (38,\ 108).$$

Κλάσμα τι δὲν μεταβάλλεται, ἀλλασσομένων τῶν σημείων τῶν δύο αὐτοῦ ὅρων, διότι τοῦτο ἐστὶν ὡς εἰ οἱ δύο αὐτοῦ ὅροι ἐπολλαπλασιάζοντο ἐπὶ -1, ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-\alpha}{-\beta}$ ἢ $\frac{\alpha+\beta-3\gamma}{2\alpha-\delta+\varepsilon}=\frac{-\alpha-\beta+3\gamma}{-2\alpha+\delta-\varepsilon}$.

Ἡ ἀγωγὴ τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἐκτελεῖται ὡς ἡ τῶν ἀριθμητικῶν (39). Ὁμοίως καὶ αἱ τέσσαρες ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων θεμελιώδεις πράξεις ἐκτελοῦνται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν (40, 41, 42, 43),

ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta \pm \beta\gamma}{\beta\delta}$ καὶ $\alpha \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma \pm \beta}{\gamma}$.

$$\alpha \times \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \text{ καὶ } \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

$$\alpha : \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\beta} \text{ καὶ } \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha:\gamma}{\beta:\delta}.$$

Ἐξ οὗ $1 : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$.

111. Ἡ ὕψωσις εἰς δύναμίν τινα, καὶ ἡ ἐξαγωγὴ ῥίζης, τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων, ἐκτελεῖται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν (69, 92, 93). Οὕτω·

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha^3}{\beta^3} \text{ καὶ } \left(\frac{3\alpha}{\beta^2}\right)^2 = \frac{9\alpha^2}{\beta^4} \text{ καὶ}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2}} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \sqrt{\frac{9\alpha^2}{\beta^4}} = \frac{\sqrt{9\alpha^2}}{\sqrt{\beta^4}} = \frac{3\alpha}{\beta^4}.$$

112. Ἡ εἰς δύναμίν τινα ὕψωσις γινομένου πλειόνων παραγόντων, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ὑψώσεως ἑκάστου παράγοντος, καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης γινομένου τινος, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ῥιζῶν τῶν παραγόντων τούτων (72). Ὥστε·

$$(3\alpha^2\beta^3\gamma)^2 = 9\alpha^4\beta^6\gamma^2 \text{ καὶ}$$

$$\sqrt{36\alpha^2\beta^3\gamma^5} = \sqrt{36} \times \sqrt{\alpha^2} \times \sqrt{\beta^3} \times \sqrt{\gamma^5} = 6\alpha\sqrt{\beta^3\gamma^5}.$$

Προκύπτει ὅθεν ὅτι παράγοντες τινὲς δύνανται νὰ γραφῶσιν ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἐξαγομένης τῆς ῥίζης τῆς δυνάμεως αὐτῶν. Παράγοντες δ' ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, δύνανται νὰ γραφῶσιν ὑπὸ τοῦτο, ὑψούμενοι εἰς δύναμιν ἴσην τῷ τοῦ ῥιζικοῦ. Οὕτω·

$$\sqrt{\frac{25\alpha^2\beta}{4\beta^2\gamma}} = \frac{\sqrt{25\alpha^2\beta}}{\sqrt{4\beta^2\gamma}} = \frac{5\alpha\sqrt{\beta}}{2\beta\sqrt{\gamma}} \text{ ἢ } \frac{5\alpha}{2\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

Τὸ ῥιζικὸν σημεῖον δύναται νὰ ἐξαλειφθῇ ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ ἀλγεβρικοῦ τινος κλάσματος, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὸν παρανομαστὴν αὐτοῦ (70). Οὕτω·

$$\frac{3\alpha\sqrt{\beta}}{2\gamma\sqrt{\delta}} = \frac{3\alpha\sqrt{\beta} \times \sqrt{\delta}}{2\gamma\sqrt{\delta} \times \sqrt{\delta}} = \frac{3\alpha\sqrt{\beta\delta}}{2\gamma\sqrt{\delta^2}} = \frac{3\alpha\sqrt{\beta\delta}}{2\gamma\delta} \text{ ἢ } \frac{3\alpha}{2\gamma\delta}\sqrt{\beta\delta},$$

ὥςε ἡ ἔκφρασις ἀντικαθίσταται δι' ἑτέρας ἐχούσης ἓν μόνον ῥιζικόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

Πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις. — Δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις.

Πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον.

113. Δύο ἴσαι ποσότητες, συνδεόμεναι διὰ τοῦ σημείου $=$ ἀπαρτίζουσιν *ἰσότητα*. Αἱ ποσότητες αὗται ἀπαρτίζουσι τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος.

Αἱ ἰσότητες αἱ περιέχουσαι ἓν ἢ πλείονα γράμματα, παριστάνοντα ποσοτήτας ἀγνώστους, καλοῦνται *ἐξισώσεις*· ὡς

$$3+\chi=7,\ \chi+\psi=\frac{\alpha}{\beta}$$

ἔνθα ἰσότης δὲν ὑφίσταται παρὰ δι' ὡρισμένας τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Πᾶσα ἰσότης ἧς τὸ ἓν μέλος ἐστὶ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἕτερον, ἢ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν ἐνδεικνυομένων ἐν τῷ ἑτέρῳ πράξεων, καλεῖται ταυτότης· ὡς $2\chi+4=2\chi+4$, ἢ $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Πᾶσα ἐξίσωσις δέον ν' ἀποτελέσῃ ταυτότητα, ὁπόταν αἱ ἐν αὐτῇ ἄγνωστοι ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν σχετικῶν αὐτῶν τιμῶν.

114. Ἡ ἐξίσωσις καλεῖται ἀριθμητική, ὁπόταν μόνον αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων παριστάνονται διὰ γραμμάτων, ἀλγεβρικὴ δέ, ὅταν ἐπίσης διὰ γραμμάτων παριστάνονται καὶ αἱ γνωσταὶ ποσότητες.

115. Ὅταν τὸ ἓν μέλος ἐξισώσεώς τινος συνίσταται ἐκ μόνης τῆς ἀγνώστου, τὸ δ' ἕτερον, μὴ περιέχον τὴν ἄγνωστον, δεικνύει τὰς ἐργασίας αἵτινες ἐκτελούμεναι δίδουσι τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου, ἡ ἐξίσωσις καλεῖται *τύπος* (91)· ὡς

$$\chi=\alpha^2+4\frac{\beta}{\gamma}.$$

Τουτέστιν ἡ ἔκφρασις τῆς τιμῆς τῆς ἀγνώστου.

116. Καλεῖται *ἐπίλυσις* ἐξισώσεώς τινος, ἢ συστήματος πλειόνων ἐξισώσεων, ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, αἵτινες πληροῦσι τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις ταύτας, τουτέστι καθιστῶσιν αὐτὰς ταυτότητας.

Ἡ ἐπίλυσις ἐξισώσεώς τινος ἢ συστήματος ἐξισώσεων, στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς ἀρχῶν.

1ον Ἐξίσωσίς τις δὲν μεταβάλλεται, αὐξομειουμένων τῶν δύο αὐτῆς μελῶν κατὰ κοινήν τινα ποσότητα.

Προκύπτει ὅθεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις δύναται ἁπλοποιηθῆναι, διὰ τῆς ἀπαλείψεως τῶν εἰς τὰ δύο αὐτῆς μέλη κοινῶν ὅρων.

2ον Ἐξίσωσίς τις δὲν μεταβάλλεται, μεταφερομένου ὅρου τινὸς ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῆς μέλους εἰς τὸ ἕτερον, ἀντιστρεφομένου τοῦ σημείου τοῦ ὅρου τούτου, διότι εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἄγει ἡ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως πρόσθεσις ἢ ἀφαίρεσις τοῦ ὅρου τούτου, καθ' ὅσον οὗτος φέρει τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$.

Προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι, δύνανται ν' ἀντιστραφῶσι τὰ σημεῖα ἁπάντων τῶν ὅρων ἐξισώσεώς τινος.

3ον Ἐξίσωσίς τις δὲν μεταβάλλεται, πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν δύο αὐτῆς μελῶν, ἐπὶ κοινήν τινα γνωστὴν ποσότητα. Δύναται ὅθεν ἐξίσωσίς τις ν' ἁπλοποιηθῇ διὰ τῆς ἀπαλείψεως τῶν εἰς τὰ δύο αὐτῆς μέλη κοινῶν παραγόντων.

4ον Διὰ τῆς ἀπαλείψεως τῶν παρονομαστῶν, τουτέστι διὰ τῆς ἀγωγῆς ἁπάντων τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν (39), καὶ τῆς ἀπολείψεως τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ, προκύπτει νέα ἐξίσωσις, καθ' ὅλα ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ.

Μετὰ τὴν ἀπάλειψιν τῶν παρονομαστῶν, ἐὰν εὑρεθῶσι μία ἢ πλείονες λύσεις, αἵτινες ἐκμηδενίζουσι τὸν κοινὸν τοῦτον παρονομαστήν, αὗται ἀποῤῥίπτονται καὶ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν μόνον ἡ μὴ μηδενίζουσα τὸν κοινὸν τοῦτον παρονομαστήν.

5ον Ἐξίσωσίς τις δὲν μεταβάλλεται, ἐκτελουμένων τῶν διὰ τῶν διαφόρων ἐν αὐτῇ σημείων ἐνδεικνυομένων ἐργασιῶν.

6ον Σύστημά τι ἐξισώσεων δὲν μεταβάλλεται, ἀντικαθισταμένης μιᾶς ἐξ αὐτῶν, διὰ τῆς παραγομένης ἐξισώσεως ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἀρχικῶν ἐξώσεων, μέλος πρὸς μέλος, διὰ προσθαφαιρέσεως.

7ον Ὑψουμένης ἐξισώσεώς τινος εἰς τὸ τετράγωνον, ὡς τῆς $\chi=5$ ἡ προκύπτουσα $\chi^2=5^2=25$, ἐκτὸς τῶν ἐπιλύσεων τῆς ἐξισώσεως $\chi-5=0$ ἢ $\chi=5$ περιέχει καὶ ἐκείνας τῆς ἐξισώσεως $\chi+5=0$ ἢ $\chi=-5$, διότι (124) $\chi^2-25=(\chi+5)(\chi-5)=0$, ἐξ ἧς $\chi+5=0$ καὶ $\chi-5=0$.

117. Ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως ἐξισώσεώς τινος δείκνυται διὰ τοῦ μεγαλειτέρου ἀθροίσματος τῶν ἐν ὅρῳ τινὶ ἐκθετῶν τῶν ἀγνώστων. Οὕτως αἱ ἐξισώσεις $2\chi-\psi=7$, $3\chi\psi=18$ καὶ $\chi^5\psi^2=1-\chi^6$ εἰσὶ τοῦ αου, βου καὶ ζου βαθμοῦ.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ἄγνωστοι εἰς τοὺς παρονομαστάς, δέον νὰ γίνῃ πρῶτον ἡ ἀπάλειψις τούτων, καὶ κατόπιν νὰ ἐκτιμηθῇ ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ὅστις ἐστὶ καὶ ὁ τῆς ἀρχικῆς.

118. Πρὸς ἐπίλυσιν ἤδη ἐξισώσεώς τινος τοῦ $\alpha^{ου}$ βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον

$1^{ον}$ Ἐκτελεῖται ἡ τῶν παρονομαστῶν ἀπάλειψις ἂν τοιοῦτοι ὑπάρχωσι.

$2^{ον}$ Μεταφέρονται πάντες οἱ περιέχοντες τὴν ἄγνωστον ὅροι εἰς τὸ ἓν μέλος τῆς ἐξισώσεως, τὸ πρῶτον συνήθως, οἱ δὲ γνωστοὶ εἰς τὸ ἕτερον.

$3^{ον}$ Ἐκτελεῖται ἡ τῶν ὁμοίων ὅρων ἀναγωγὴ (99), τουτέστι δίδεται ὡς συντελεστὴς εἰς τὴν ἄγνωστον τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων οἵτινες περιέχουσι ταύτην, οὕτω δὲ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς ἕνα μόνον ὅρον.

$4^{ον}$ Τέλος διαιρεῖται τὸ γνωστὸν μέλος τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἀγνώστου, καὶ οὕτω εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου ταύτης.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $6\chi-2=2\chi-6$.

Διὰ μεταφορᾶς τῶν ὅρων προκύπτει $6\chi-2\chi=6+2$ ἢ

$$(6-2)\chi=8 \text{ ἢ } 4\chi=8 \text{ ἐξ ἧς } \chi=\tfrac{8}{4}=2.$$

Ἐπίσης ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha\chi}{6}+\frac{\chi}{\gamma}-2=8-\frac{\chi}{\delta}$.

Ἡ ἀπόλειψις τῶν παρονομαστῶν δίδει

$$\alpha\gamma\delta\chi+6\delta\chi-26\gamma\delta=86\gamma\delta-6\gamma\chi$$

καὶ διὰ μεταθέσεως καὶ ἀναγωγῆς τῶν ὅρων

$$(\alpha\gamma\delta+6\delta+6\gamma)\chi=86\gamma\delta+26\gamma\delta=106\gamma\delta,$$

$$\text{ἐξ ἧς } \chi=\frac{106\gamma\delta}{\alpha\gamma\delta+6\delta+6\gamma}.$$

Ἐκ τούτου ὅθεν προκύπτει ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ $\alpha^{ου}$ βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον, ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi=6 \text{ ἐξ ἧς } \chi=\frac{6}{\alpha}$$

α καὶ 6 οὐσῶν γνωστῶν ποσοτήτων.

119. Πρὸς ἐπίλυσιν ἀλγεβρικοῦ τινος προβλήματος δέον

$1^{ον}$ Νὰ τεθῇ τοῦτο εἰς ἐξίσωσιν, τουτέστι νὰ παρασταθῶσιν ἀλ-

γεβρικῶς οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος θεωρουμένου ὡς λελυμένου, ὅπερ συνίσταται εἰς τὸ νὰ σημειωθῶσι διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων αἱ πράξεις, αἵτινες δέον νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, ὡς εἰ ἐπρόκειτο νὰ δοκιμασθῶσιν ἂν πληροῦσιν εἰς τὸ ζήτημα.

2ον Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων, ἤτοι νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἢ αἱ τιμαὶ τῆς ἀγνώστου, ἢ ἑκάστης τοιαύτης, οὕτως ὥστε νὰ περιέχωνται εἰς ταύτας μόνον γνωσταὶ ποσότητες.

3ον Νὰ ἐνεργηθῇ ἡ ἐξακρίβωσις, ἥτις συνίσταται εἰς τὴν δοκιμασίαν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, ἂν πληροῦσιν εἰς τὸ ζήτημα (116).

Ἔστω πρόβλημά τι πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω.

Εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, οὗ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεως, τοῦ τρίτου, τοῦ τετάρτου καὶ 45 ἐστὶ 448.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς οὗτος παρασταθῇ διὰ χ, ἡ ἔκφρασις αὐτὴ τοῦ προβλήματος δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$\tfrac{1}{2}\chi+\tfrac{1}{3}\chi+\tfrac{1}{4}\chi+45=448.$$

Ἡ ἐπίλυσις ἤδη τῆς ἐξισώσεως ἐκτελεῖται ὡς ἄνω (118).

Ἡ ἀπάλειψις τῶν παρονομαστῶν δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$6\chi+4\chi+3\chi+12\times45=12\times448, \text{ ἐξ ἧς}$$

$$13\chi=5376-540=4836 \text{ καὶ } \chi=\tfrac{4836}{13}=372.$$

Ἡ ἐξακρίβωσις ἐκτελεῖται διὰ τῆς εἰς τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν ἀντεισαγωγῆς τῆς τιμῆς $\chi=372$· προκύπτει ὅθεν

$$\tfrac{372}{2}+\tfrac{372}{3}+\tfrac{372}{4}+45=448, \text{ ἤτοι}$$

$$186+124+93+45=448 \text{ καὶ}$$

$$448=448.$$

120. Ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων παρέχει ἐνίοτε εἰς τὰς ἀγνώστους τιμάς τινας, ἐφ' ὧν δέον νὰ δοθῇ ἰδιαιτέρα τις προσοχή.

α'. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$55+\chi=3(23+\chi)$$

ἥτις ἐπιλυομένη δίδει

$$\chi=\tfrac{55-69}{2}=-7.$$

Ἡ τοιαύτη τιμὴ τῆς χ καλεῖται *ἀρνητική*, ἐμφαίνει δὲ ὅλως τὸ ἀντίθετον τῆς θετικῆς. Οὕτως ἐὰν πρόκηται περὶ μέλλοντος χρόνου, ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ ἐμφαίνει ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος παρῆλθε κατ' ἴσον διάστημα, ἐὰν πρόκηται περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ ποσοῦ

πληρωμῆς τινος, ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ ἐμφαίνει ὅτι οὐδὲν ὀφείλεται, ἀλλ' ἀπεναντίας δέον ἴσον ποσὸν νὰ πληρωθῇ. Τοῦτο κατανοεῖται διότι αἱ ἀρνητικαὶ ποσότητες βαίνουσι κατ' ἀντίστροφον ἐκ τοῦ 0 τάξιν τῶν θετικῶν, ὡς

. . . . . —5. —4. —3. —2. —1. 0. 1. 2. 3. 4. 5. . . . . .

β'. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+5=\tfrac{5}{6}\chi+7.$$

Ἐκ ταύτης $3\chi+2\chi+30=5\chi+42$ καὶ

$(3+2-5)\chi=42-30$ ἐξ ἧς $\chi=\frac{12}{5-5}$.

Τουτέστι $0\times\chi=12$ καὶ $\chi=\frac{12}{0}$.

Ἡ τιμὴ αὕτη παριστᾷ τὸ ἄπειρον, ὅπερ σημειοῦται $\frac{12}{0}=\infty$, δηλοῖ δὲ ὅτι οὐδεμία ὑπάρχει τιμή, ἥτις διδομένη εἰς τὴν ἄγνωστον χ πληροῖ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Γενικῶς ὅθεν $\frac{a}{0}=\infty$ ἐξ ἧς $\frac{a}{\infty}=0$.

γ'. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+7=\frac{5}{6}\chi+7$.

Ἐκ ταύτης $3\chi+2\chi+42=5\chi+42$

καὶ $(5-5)\chi=42-42$ ἐξ ἧς $\chi=\frac{42-42}{5-5}=\frac{0}{0}$.

Ἡ τιμὴ $\frac{0}{0}$ καλεῖται *ἀόριστος*, ἐμφαίνει δὲ ὅτι οἱαδήποτε τιμὴ δοθῇ εἰς τὴν ἄγνωστον, θέλει πληροῖ εἰς τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν. Τοῦτο γίνεται καταφανὲς διὰ τῆς διαδοχικῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ χ, διὰ διαφόρων τιμῶν ἐν τῇ ἀρχικῇ ἐξισώσει.

121. Προβλήματα. α'. Διανεμηθήτωσαν 48 δραχμαὶ μεταξὺ δύο ἀνθρώπων, οὕτως ὥστε ὁ εἷς νὰ λάβῃ 13 πλείονας τοῦ ἄλλου.

Ἐὰν ὁ λαμβάνων τὰς πλειοτέρας λάβῃ $\chi^{\delta\rho.}$, ὁ ἕτερος θὰ λάβῃ 48—χ, οὗτος ὅμως λαμβάνει 13 δραχμὰς ὀλιγωτέρας τοῦ ἄλλου ὥστε τῇ προσθέσει τούτων δίδεται ἡ σχέσις

$$\chi=48-\chi+13 \text{ καὶ } \chi=\tfrac{48+13}{2}=30{,}50^{\delta\rho.}$$

β'. Εὑρεθήτωσαν δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα νὰ ἦναι 42 ἡ δὲ διαφορὰ 8.

Ἐὰν ὁ μείζων τῶν ἀριθμῶν τούτων παρασταθῇ διὰ χ, ὁ ἕτερος ἔσεται χ—8, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτων ἐστὶ 42, ὅθεν $\chi+\chi-8=42$, ἐξ ἧς $\chi=25$ καὶ $\chi-8=25-8=17$.

γ'. Εὑρεθήτω ἀριθμὸς ὅστις αὐξανόμενος κατὰ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα τοῦτο νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν 85 ὅσον ὁ 92 ὑπερβαίνει αὐτόν.

Ἐὰν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ χ, ἕπεται, ὅτι

$\chi+\frac{1}{2}\chi-85=92-\chi$, ἐξίσωσις ἥτις ἐπιλυομένη δίδει $\chi=70\frac{4}{5}$ ἢ 70, 80.

δ'. Διανεμηθήτω ὁ ἀριθμὸς 32 εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ μὲν μεῖζον διαιρούμενον διὰ 5, τὸ δ' ἔλασσον διὰ 6 νὰ δίδωσι πηλίκα, ὧν τὸ ἄθροισμα νὰ ἦναι 6.

Ἐὰν τὸ ἔλαττον εἶναι χ τὸ μεῖζον ἔσεται 32—χ, ὅθεν·

$$\frac{\chi}{6}+\frac{32-\chi}{5}=6$$

ἐξ ἧς $\chi=12$ καὶ $32-\chi=32-12=20$.

ε'. Ἐμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 7 τάλληρα τοὺς 5 πήχεις, μεταπωλήσας δ' αὐτὸ πρὸς 11 τάλληρα τοὺς 7 πήχεις, ἐκέρδησεν 100 τάλ. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγορασθέντων πήχεων.

Ἔστω οὗτος χ, δι' οὓς φανερῶς ἐπλήρωσεν $\frac{7\chi}{5}$ τάλληρα, τοὺς μετεπώλησεν $\frac{11\chi}{7}$ τάλ. καὶ ἐκέρδησεν 100, ὅθεν $\frac{11\chi}{7}-\frac{7\chi}{5}=100$ καὶ $\chi=583\frac{1}{3}$.

ς'. Δύο ἀποθῆκαι περιέχουσιν ὁμοῦ 344 κοιλὰ γέννημα, ἡ ἑτέρα ὅμως περιέχει 64 κοιλὰ πλέον τῆς ἄλλης. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν ἑκάστῃ κοιλῶν· ἡ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος δίδει τὴν ἐξίσωσιν $2\chi-64=344$ ἐξ ἧς $\chi=204$, καὶ $204-64=140$.

ζ'. Εὑρεθήτω ἀριθμὸς ὅστις προστιθέμενος εἰς 13 καὶ 17 νὰ παράγῃ ἀθροίσματα ὡς 4 : 5.

Ἡ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος δίδει τὴν ἐξίσωσιν,

$$\chi+13:\chi+17::4:5$$ ἤτοι

$$5(\chi+13)=4(\chi+17)$$ ἐξ ἧς $\chi=3$.

η'. Ἐργολάβος ἀγοράζει ξύλα, ἅτινα πωλήσας 2000 δραχμὰς ἄνω τῆς ἀγορᾶς των ἐκέρδησε 10 τοῖς %. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς.

Ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ προβλήματος $\frac{\chi+2000}{10}=2000$, ἐξ ἧς $\chi=18000$.

θ'. Εὑρεθήτω ἀριθμός, ὅστις διαιρούμενος διὰ 6 νὰ δίδῃ πηλίκον, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην, νὰ παράγῃ ἄθροισμα 69.

Ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ προβλήματος $\frac{\chi}{6}+\chi+6=69$, ἐξ ἧς $\chi=54$.

Πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις μὲ πλείονας ἀγνώστους.

122. Ἐξίσωσίς τις περιέχουσα πλείονας ἀγνώστους, ἐπιδέχεται ἀπείρους ἐπιλύσεις, διότι διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τούτων ἐκτὸς μιᾶς, διὰ κατ' ἀρέσκειαν τιμῶν, ἡ ἐπίλυσις τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως δίδει διὰ τὴν τελευταίαν ταύτην ἄγνωστον τιμὴν ἀνταποκρινομένην εἰς τὰς κατ' ἀρέσκειαν εἰς τὰς ἄλλας δοθείσας, αἵτινες μεταβαλλόμεναι μυριοτρόπως, τοσαύτας παρέχουσιν ἐπιλύσεις τῆς ἐξισώσεως διὰ τὴν τιμὴν τῆς διατηρουμένης ἀγνώστου.

Δέον ὅθεν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων συστήματός τινος, νὰ ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν ἀγνώστων, ἵνα αἱ ἐπιλύσεις τούτων εἰσὶν ὁρισμέναι.

Καλεῖται σύστημα ἐξισώσεων, τὸ σύνολον τῶν τοιούτων, ὧν γίνεται χρῆσις πρὸς προσδιορισμὸν τῆς τιμῆς τῶν ἀγνώστων· περιέχει δὲ τὸ σύστημα ἐξισώσεις ἰσαρίθμους ταῖς ἀγνώστοις. Ἡ ἐπίλυσις πολλῶν ἐξισώσεων τοῦ αου βαθμοῦ μὲ πολλὰς ἀγνώστους, συνίσταται κυρίως εἰς τὴν μετάβασιν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐξισώσεων εἰς ἄλλας κατὰ μίαν ὀλιγωτέρας, καὶ περιεχούσας μίαν ἄγνωστον ὀλιγώτερον. Ἡ μετάβασις αὕτη καλεῖται μέθοδος δι' *ἀπαλείψεως*, γίνεται δὲ κατὰ τρεῖς διαφόρους τρόπους.

1ον *Μέθοδος ἀντικαταστάσεως ἢ ἀντεισαγωγῆς.* Συνίσταται αὕτη εἰς τὴν εὕρεσιν ἐκ δεδομένου τινος συστήματος, δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους χ καὶ ψ, τῆς ἐκ τῆς μιᾶς τούτων τιμῆς τῆς μιᾶς ἀγνώστου συνεκθέσει τῆς ἄλλης, τουτέστι εἰς τὴν ὁποίαν νὰ περιέχεται ἡ ἄλλη ἄγνωστος· τὴν ἀντικατάστασιν τῆς τιμῆς ταύτης τῆς μιᾶς ἀγνώστου ψ, εἰς τὴν ἑτέραν ἐξίσωσιν, ἥτις οὕτω καθίσταται ἐξίσωσις μίαν μόνην ἄγνωστον περιέχουσα· καὶ τὴν ἐκ ταύτης λῆψιν τῆς τιμῆς τῆς ἀγνώστου χ, ἥτις ἀντεισαγομένη εἰς τὴν ληφθεῖσαν ἔκφρασιν τῆς ψ, δίδει τὴν τιμὴν ταύτης.

Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων $\begin{cases} \chi+\psi=\alpha \\ \chi-\psi=\beta \end{cases}$

Ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνεται $\psi=\chi-\beta$ . . . . (1)

Καὶ δι' ἀντεισαγωγῆς τῆς τιμῆς τῆς ψ εἰς τὴν πρώτην

$$\chi+\chi-\beta=\alpha$$

καὶ ἐκ ταύτης $2\chi=\alpha+\beta$ καὶ $\chi=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Καὶ δι' ἀντεισαγωγῆς τῆς τιμῆς ταύτης τῆς χ εἰς τὴν (1) εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τῆς ψ

$$\psi=\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta=\frac{\alpha+\beta-2\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Τῇ ὑποθέσει ὅθεν $\alpha=12$ καὶ $\beta=6$ αἱ τιμαὶ τῶν ζητουμένων ἀγνώστων ἔσονται, $\chi=\frac{12+6}{2}=9$ καὶ $\psi=\frac{12-6}{2}=3$.

2ον *Μέθοδος διὰ συγκρίσεως.* Ἡ μέθοδος αὕτη συνίσταται, εἰς τὴν ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων λῆψιν τῆς τιμῆς τῆς αὐτῆς ἀγνώστου συνεκθέσει τῆς ἄλλης, καὶ τὸν σχηματισμὸν ἐξισώσεως ἐκ τῶν δύο τούτων τιμῶν, ἥτις περιέχει μίαν μόνην ἄγνωστον. Ἡ τιμὴ τῆς δευτέρας ἀγνώστου, διδομένη διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, καὶ ἀντεισαγομένη εἰς μίαν τῶν ληφθεισῶν τιμῶν τῆς ἄλλης, δίδει τὴν τιμὴν ταύτης.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις $\left\{\begin{array}{l}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=\beta\end{array}\right.$ ἐξ ὧν $\left.\begin{array}{l}\psi=\alpha-\chi\\ \psi=\chi-\beta\end{array}\right\}$ (2)

Ἐπειδὴ $\psi=\psi$ προκύπτει ἐκ τούτων ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha-\chi=\chi-\beta \text{ ἐξ ἧς } \chi=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Καὶ δι' ἀντεισαγωγῆς τῆς τιμῆς ταύτης, εἰς μίαν τῶν ἄνω ἐξισώσεων τῶν τιμῶν τῆς ψ (2), $\psi=\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

3ον *Μέθοδος διὰ προσθαφαιρέσεως.* Ἡ μέθοδος αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ κατασταθῶσιν οἱ συντελεσταὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀγνώστου ἴσοι εἰς τὰς διαφόρους ἐξισώσεις, καὶ ἂν μὲν τότε οἱ ὅροι οἱ ἔχοντες τοὺς αὐτοὺς συντελεστὰς καὶ τὴν αὐτὴν ἄγνωστον, εἰσὶν ἑτερόσημοι, νὰ προστεθῶσιν αἱ ἐξισώσεις μεταξύ των, ἂν δὲ εἰσὶ ταυτόσημοι, ν' ἀφαιρεθῶσιν. Οὕτω αἱ δύο ἐξισώσεις ἀνάγονται εἰς μίαν, μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον, ἐξ ἧς λαμβάνεται ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου ταύτης, ἥτις ἀντεισαγομένη κατόπιν εἰς μίαν τῶν ἀρχικῶν ἐξισώσεων, παρέχει τὴν τιμὴν τῆς δευτέρας ἀγνώστου.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις $\left\{\begin{array}{l}\chi+\psi=\alpha\\ \chi-\psi=\beta\end{array}\right.$

τῇ προσθέσει αὐτῶν $2\chi=\alpha+\beta$ ἐξ ἧς $\chi=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Ἡ ἀφαίρεσις τῶν δύο ἐξισώσεων δίδει

$$2\psi=\alpha-\beta \text{ καὶ } \psi=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Ἐπίσης ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha\chi+\psi=\gamma \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$
$$\alpha'\chi+\beta'\psi-\gamma' \quad . \ . \ . \ (2)$$

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ τῆς ψ δὲν εἰσὶν ἴσοι, ἀποκαθιστῶνται τοιοῦτοι, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς (1) ἐπὶ β′, ἤτοι

$$αβ'χ+β'ψ=β'γ. \;.\;.\;.\;.\;. (3).$$

Τῇ προσθέσει τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) προκύπτει ἡ

$$(α+αβ')χ=β'γ+γ' \text{ ἐξ ἧς } χ=\frac{β'γ+γ'}{α+αβ'}.$$

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις θεωρηθῶσιν ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν τῆς χ, δέον ὅπως κατασταθῶσιν αὗται ἴσαι, ἵνα πολλαπλασιασθῶσιν, ἡ μὲν (1) ἐπὶ α′ ἡ δὲ (2) ἐπὶ α, ὅθεν

$$αα'χ+α'ψ=α'γ. \;.\;.\;.\;.\;. (4)$$
$$αα'χ+αβ'ψ=αγ'. \;.\;.\;.\;. (5)$$

Καὶ τῇ προσθέσει αὐτῶν

$$(α'+αβ')ψ=α'γ-αγ' \text{ ἐξ ἧς } ψ=\frac{α'γ-αγ'}{α'-αβ'}.$$

Ἡ ἐπίλυσις πλειόνων ἐξισώσεων τοῦ α^ου^ βαθμοῦ μὲ πλείονας ἀγνώστους, ἐκτελεῖται κατὰ παρόμοιον τρόπον, διότι διὰ τῶν ῥηθεισῶν μεθόδων ἐλαττοῦται διαδοχικῶς ὅ τε ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων καὶ ὁ τῶν ἀγνώστων, ἄχρις οὗ ἐκ τῆς τελευταίας προκυπτούσης, ληφθῇ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ἀγνώστου ἣν ἐμπεριέχει. Ἡ τιμὴ αὕτη ἀντεισαγομένη εἰς ἑτέραν, περιέχουσαν καὶ ἄλλην ἄγνωστον, δίδει τὴν τιμὴν ταύτης, καὶ οὕτω διαδοχικῶς λαμβάνονται αἱ τιμαὶ ἁπασῶν τῶν ἀγνώστων.

123. *Προβλήματα.* α′. Ἔχει τις τεμάχια δύο δραχμῶν καὶ πέντε δραχμῶν, καὶ πρόκειται νὰ πληρώσῃ 26 δρ. μὲ 10 τοιαῦτα τεμάχια. Ζητεῖται πόσα θέλει δώσει δίδραχμα καὶ πόσα πεντάδραχμα.

Ἐὰν χ καὶ ψ παραστήσωσι τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς, φανερὸν ὅτι $χ+ψ=10$ ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν τεμαχίων, ὁ δ' ὅλος πληρωθεὶς ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν ἐστὶν $2χ+5ψ=26$. Τὸ πρόβλημα ὅθεν συνίσταται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων,

$$χ+ψ=10 \cdots\cdots (1)$$
$$2χ+5ψ=26 \cdots\cdots (2).$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) $\quad ψ=\dfrac{26-2χ}{5} \;.\;.\;.\;. (3).$

Τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς ταύτης εἰς τὴν (1)

$$χ+\frac{26-2χ}{5}=10 \text{ ἢ}$$
$$5χ+26-2χ=50, \text{ ἐξ ἧς } χ=8.$$

Τῇ δ' ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς ταύτης εἰς τὴν (1),

$$ψ=10-χ=10-8=2.$$

Ἄρα θέλει πληρώσει 8 τεμάχια τῶν 2 δραχμ. καὶ 2 τῶν 5 δρ.

ϐ'. Εὑρεθήτωσαν δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ἑτέρου εἶναι 70, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραπλασίου τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ πενταπλασίου τοῦ δευτέρου 130.

Ἐὰν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ παρασταθῶσι διὰ χ καὶ ψ, ἕπεται ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ προβλήματος ὅτι

$$2χ+3ψ=70 \text{ καὶ}$$
$$4χ+5ψ=130.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἐπιλυόμεναι διὰ μιᾶς τῶν ἀνωτέρω μεθόδων δίδουσι τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς, $χ=20$ καὶ $ψ=10$.

γ'. Τραπεζίτης τις τοκίζει 100000 δραχμάς, μέρος μὲν πρὸς 5 τοῖς % καὶ τὰ ἐπίλοιπα πρὸς 4 %. Ζητοῦνται τὰ δύο μέρη, ὅταν λαμβάνῃ κατ' ἔτος 4640 δρ.

Ἡ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος δίδει τὰς ἐξισώσεις, θεωρουμένων ὡς χ καὶ ψ τῶν δύο τούτων μερῶν,

$$χ+ψ=100000 \text{ καὶ } \frac{5χ}{100}+\frac{4ψ}{100}=4640$$

Ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων τούτων διὰ μιᾶς τῶν ἀνωτέρω μεθόδων δίδει $χ=34000$ καὶ $ψ=36000$.

δ'. Ἀποθήκη τις περιέχει 50 βαρέλια πυρίτιδος δύο μεγεθῶν, ἕκαστον τῶν μεγαλειτέρων ζυγίζον 72 ὀκάδας, ἕκαστον δὲ τῶν μικροτέρων 50. Τὸ βάρος τῶν 50 βαρελίων ἐστὶ 2698 ὀκ. Ζητεῖται πόσα βαρέλια ἑκάστου μεγέθους ὑπάρχουσιν ἐν τῇ ἀποθήκῃ.

Ἐὰν χ ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεγαλειτέρων βαρελίων, καὶ ψ ὁ τῶν μικροτέρων, ἡ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος δίδει τὰς ἐξισώσεις

$$χ+ψ=50 \text{ καὶ } 72χ+50ψ=2698$$

αἵτινες ἐπιλυόμεναι δίδουσι $χ=9$ καὶ $ψ=41$.

ε'. Πατήρ τις ἔδωκε τῷ υἱῷ αὐτοῦ 20 λίρας πρὸς ἀγορὰν ζώων, διατάξας αὐτὸν ν' ἀγοράσῃ ἵππους, ὄνους καὶ ἡμιόνους. Ὁ υἱὸς διὰ τῶν χρημάτων τούτων, εὑρὼν τὴν μὲν τιμὴν τῶν ἵππων 4 λίρας ἕκαστον, τὴν τῶν ἡμιόνων $\frac{1}{2}$ λίραν ἕκαστον, καὶ τὴν τῶν ὄνων $\frac{1}{6}$ λίρ. ἕκαστον, ἠγόρασεν 20 τοιαῦτα ζῶα. Ζητεῖται πόσα ἐκ τῶν ζώων τούτων ἦσαν ἵπποι, πόσα ἡμίονοι καὶ πόσα ὄνοι.

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγορασθέντων ἵππων, ψ ὁ τῶν ἡμιόνων,

καὶ ζ ὁ τῶν ὄνων. Διὰ τοὺς ἵππους ἐπλήρωσε 4χ λίρ. διὰ τοὺς ἡμιόνους $\frac{1}{2}\psi$ λίρ. καὶ διὰ τοὺς ὄνους $\frac{1}{6}\zeta$, ἀλλ' ἐν ὅλοις ἐξώδευσεν 20 λίρας, ὅθεν $4\chi+\frac{1}{2}\psi+\frac{1}{6}\zeta=20$.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγορασθέντων ζώων εἶνε 20, ὅθεν

$$\chi+\psi+\zeta=20.$$

Ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ προβλήματος προκύπτουσι μόνον δύο ἐξισώσεις, ἐνῷ αἱ ἄγνωστοι εἰσὶ τρεῖς. Δέον ὅθεν νὰ δοθῇ τιμή τις κατ' ἀρέσκειαν εἰς μίαν τῶν ἀγνώστων (122) καὶ ἀναλόγως ταύτης διὰ τῶν δύο ἐξισώσεων, νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τῶν ἄλλων δύο ἀγνώστων. Τῇ ἀντικαταστάσει ὅθεν διαδοχικῶς τῆς $\chi=1, 2, 3, 4, \cdots$ καὶ ἐπιλύσει κατόπιν τῶν ἐξισώσεων διὰ τὰς ἀγνώστους ψ καὶ ζ, προκύπτει ὅτι μόνον ἡ τιμὴ $\chi=4$ πληροῖ εἰς τὰς ἐξισώσεις ταύτας, καὶ δίδει τιμὰς διὰ τὰς ψ καὶ ζ, θετικὰς καὶ ἀκεραίας. Ἡ ἐπίλυσις ὅθεν τῶν ἐξισώσεων ὅταν $\chi=4$, δίδει $\psi=4$ καὶ $\zeta=12$. Ὥστε ὁ υἱὸς ἠγόρασε τὰ 20 ζῶα ἐξ ὧν 4 ἵππους, 4 ἡμιόνους καὶ 12 ὄνους τὸ ὅλον ἀντὶ 20 λιρῶν, κατὰ τὰς ἄνω τιμάς.

Δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις.

Δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον.

124. Διακρίνονται δύο εἰδῶν ἐξισώσεις τοῦ 6ου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον, ἤτοι

1ον Αἱ μὴ πλήρεις, καὶ τοιαῦται εἰσὶν ἐκεῖναι ὧν οἱ ὅροι περιέχουσι μόνον τὴν δευτέραν δύναμιν τῆς ἀγνώστου, οὐχὶ δὲ καὶ τὴν πρώτην, ὡς

$$3\chi^2=5,\ 4\chi^2-7=2\chi^2+9,\ \frac{1}{3}\chi^2-3+\frac{5}{12}\chi^2=\frac{7}{24}.$$

αἵτινες μετατρέπονται εἰς

$$3\chi^2=5 \qquad 2\chi^2=16, \qquad 18\chi^2=79.$$

Ὅθεν πᾶσα ἐξίσωσις μὴ πλήρης τοῦ 6ου βαθμοῦ ἄγεται ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφήν, $\alpha\chi^2=6$.

2ον Αἱ πλήρεις, αἵτινες περιέχουσι οὐ μόνον τὴν δευτέραν δύναμιν τῆς ἀγνώστου, ἀλλὰ καὶ τὴν πρώτην, ὡς αἱ

$$5\chi^2-7\chi=34,\ 4\chi^2+\frac{1}{2}\chi+3=8+\frac{1}{3}\chi.$$

αἵτινες μετατρέπονται εἰς τάς,

$$\chi^2-\frac{7}{5}\chi=\frac{34}{5},\ \chi^2+\frac{1}{2}\chi=\frac{5}{4}.$$

Πᾶσα ὅθεν πλήρης ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἄγεται ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\chi^2+\pi\chi=\kappa.$$

125. Ἡ ἐπίλυσις ἐξισώσεώς τινος τοῦ $\beta^{ου}$ βαθμοῦ μὴ πλήρης γίνεται οὕτω

$$\alpha\chi^2=\beta \text{ ἐξ ἧς } \chi^2=\frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ } \chi=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Οἱονδήποτε σημεῖον φέρει τὸ $\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ τοῦ χ^2 ἔσεται $+$ (116) ὥστε ὑπάρχουσι διὰ τὴν χ δύο τιμαί, ἡ $+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ καὶ ἡ $-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

126. Πρὸς ἐπίλυσιν πλήρους τινος ἐξισώσεως τοῦ $\beta^{ου}$ βαθμοῦ ἄγεται αὕτη ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\chi^2+\pi\chi=\kappa.$$

Ἐπειδὴ ἐν ταύτῃ $\chi^2+\pi\chi$ εἰσὶν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τοῦ τετραγώνου τοῦ δυωνύμου $\chi+\frac{1}{2}\pi$ (105) ἤτοι $(\chi+\frac{1}{2}\pi)^2=\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}$, τῇ προσθέσει εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $\frac{\pi^2}{4}$ τὸ πρῶτον μέλος καθίσταται τὸ τετράγωνον τοῦ ῥηθέντος διωνύμου, ἤτοι

$$\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}+\kappa \text{ ἢ}$$

$$(\chi+\tfrac{1}{2}\pi)^2=\frac{\pi^2}{4}+\kappa,$$

καὶ $$\chi+\tfrac{1}{2}\pi=\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}$$

ἐξ ἧς $$\chi=-\tfrac{1}{2}\pi\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}.$$

Ἤτοι εἰς τὰς μὴ πλήρεις ἐξισώσεις τοῦ $\beta^{ου}$ βαθμοῦ, ὑπάρχουσι δύο τιμαὶ τῆς χ, τουτέστι·

$$\chi'=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa} \text{ καὶ } \chi''=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}$$

Ἐκ τούτων ἡ πρώτη ἐστὶ θετικὴ ἐνόσῳ $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}>\frac{\pi}{2}$.

Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι ἡ ἐξίσωσις $\frac{5}{6}\chi^2-\frac{1}{2}\chi+\frac{3}{4}=8-\frac{2}{3}\chi-\chi^2+\frac{273}{12}$ ἢ ἄλλως (124) $\chi^2+\frac{2}{22}\chi=\frac{360}{22}$.

Ἐκ ταύτης κατὰ τ' ἀνωτέρω αἱ δύο τιμαὶ τῆς χ εἰσὶν

$$\chi'=-\frac{1}{22}+\sqrt{\left(\frac{1}{22}\right)^2+\frac{360}{22}}=4 \text{ καὶ } \chi''=-\frac{1}{22}-\sqrt{\left(\frac{1}{22}\right)^2+\frac{360}{22}}=-\frac{45}{11}.$$

Δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις μὲ πλείονας ἀγνώστους

127. Ἐξεταστέον τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ μία τούτων ἐστὶ τοῦ α^{ου} βαθμοῦ.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λαμβάνεται ἐκ ταύτης ἡ τιμὴ μιᾶς ἀγνώστου συνεκθέσει τῆς ἄλλης, αὕτη δὲ ἀντεισαγομένη εἰς τὴν ἑτέραν, δίδει μίαν ἐξίσωσιν τοῦ β^{ου} βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον, ἐξ ἧς προσδιορίζεται αὕτη, ἡ δὲ τιμὴ ταύτης ἀντεισαγομένη εἰς τὴν πρώτην, δίδει τὴν τιμὴν τῆς δευτέρας ἀγνώστου.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha\chi+\beta\psi=2\pi \text{ καὶ } \chi\psi=\kappa$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἡ τιμὴ τῆς ψ συνεκθέσει τῆς χ ἐστὶν

$$\psi=\frac{2\pi-\alpha\chi}{\beta}$$

Τῇ ἀντεισαγωγῇ ταύτης εἰς τὴν δευτέραν προκύπτει

$$\chi\frac{2\pi-\alpha\chi}{\beta} \text{ ἢ } -\frac{\alpha}{\beta}\chi^2+\frac{2\pi}{\beta}\chi=\kappa (124)$$

καὶ ἐκ ταύτης $\alpha\chi^2-2\pi\chi=-\beta\kappa$ ἐξ ἧς $\chi=\dfrac{\pi\pm\sqrt{\pi^2-\alpha\beta\kappa}}{\beta}$

Καὶ τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς ταύτης εἰς τὴν πρώτην, εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τῆς $\psi=\dfrac{\pi\mp\sqrt{\pi^2-\alpha\beta\kappa}}{\beta}$.

Ὑπάρχουσιν ὅθεν δύο λύσεις διὰ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις, πλὴν ἵνα αὗται ὦσι πραγματικαί, δέον ἵνα ἡ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ποσότης ᾖ θετική, ἤτοι $\alpha\beta\kappa<\pi^2$.

128. *Προβλήματα.* ά. Ἐργασθέντες δύο τεχνῖται ἐπὶ διαφόρῳ ἡμερομισθίῳ, καὶ πληρωθέντες ἀναλόγως τῶν ἡμερῶν ἃς εἰργάσθησαν ἔλαβον ὁ μὲν πρῶτος 96 $^{δρ.}$, ὁ δὲ δεύτερος 6 ἡμέρας ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου ἐργασθεὶς 54 $^{δρ.}$ Ἀλλ' ἐὰν ὁ δεύτερος εἰργάζετο ὅλας τὰς ἡμέρας, ὁ δὲ πρῶτος 6 ἡμέρας ὀλιγώτερον, ἤθελον λάβει ἴσα. Ζητοῦνται αἱ ἡμέραι τῆς ἐργασίας ἑκατέρου, καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ ἡμερομισθίου.

Ἐὰν χ εἰσὶν αἱ ἡμέραι τοῦ πρώτου, αἱ τοῦ δευτέρου ἔσονται $\chi-6$, καὶ τὸ μὲν ἡμερομίσθιον τοῦ πρώτου $\frac{96}{\chi}$ τὸ δὲ τοῦ δευτέρου $\frac{54}{\chi-6}$, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ ζητήματος

$$\frac{96}{\chi}(\chi-6)=\frac{54}{\chi-6}\chi$$

ἥτις ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$16(\chi-6)^2=9\chi^2 \text{ ἢ } 4(\chi-6)=3\chi,$$

ἐκ τῆς ὁποίας $\chi=24$ καὶ $\chi-6=18$.

Καὶ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου $\frac{96}{\chi}=4$ καὶ $\frac{54}{\chi-6}=3$.

β΄. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$\chi^2+2\chi\psi+3\chi=48 \text{ καὶ } 2\chi^2-\chi\psi+\chi=6.$$

Τῇ ἀπαλείψει τοῦ $\chi\psi$ προκύπτει $\chi^2+2=12$

καὶ ἐκ ταύτης $\chi'=3$ καὶ $\chi''=-4$

Καὶ τῇ ἀντεισαγωγῇ τούτων εἰς μίαν τῶν ἀρχικῶν

$$\psi'=5 \text{ καὶ } \psi''=-5,5.$$

γ΄. Εὑρεθήτω ἀριθμός, εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ὁποίου προστιθέμενον τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, νὰ παρέχεται ὁ 65.

Ἐὰν χ ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος ἐστὶ

$$2\chi^2+3\chi=65$$

ἐξ ἧς

$$\chi=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\times2\times65}}{2\times2}$$

καὶ $\chi'=\frac{-3+23}{4}=5$ καὶ $\chi''=\frac{-3-23}{4}=-6\frac{1}{2}$,

ἐξ ὧν ἡ πρώτη πληροῖ εἰς τὸ ζήτημα.



ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΟΣ ΤΕΧΝΙΤΟΥ

ἢ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

Ὁρισμοὶ καὶ θεμελιώδεις γνώσεις.—Χάραξις καὶ μέτρον τῶν εὐθειῶν γραμμῶν. — Μέτρον τῶν γωνιῶν.— Μέτρον τῶν ἐπιπέδων κανονικῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν περιμέτρων αὐτῶν.

Ὁρισμοὶ καὶ θεμελιώδεις γνώσεις.

129. Καλεῖται *ἔκτασις* σώματός τινος, ὁ χῶρος ὃν τοῦτο καταλαμβάνει ἐν τῷ διαστήματι.

Τὸ ὅριον τὸ χωρίζον ταύτην ἐκ τοῦ διαστήματος, καλεῖται ἐπιφάνεια τοῦ σώματος, τὰ ὅρια τῆς ἐπιφανείας ταύτης καλοῦνται *γραμμαί*, τὰ δὲ τῆς γραμμῆς *σημεῖα*.

Ἡ ἔκτασις ἔχει τρεῖς διαστάσεις, *μῆκος*, *πλάτος*, καὶ *πάχος*· ἡ ἐπιφάνεια δύο, μῆκος καὶ πλάτος· ἡ γραμμὴ μόνον μίαν, μῆκος· τέλος τὸ σημεῖον οὐδεμίαν ἔχει διάστασιν.

Ἡ ἑνοῦσα δύο σημεῖα γραμμὴ, ἄνευ ἀλλαγῆς τινος τῆς ἀρχικῆς αὐτῆς διευθύνσεως, καλεῖται *εὐθεῖα*. Ἡ ἔντασις λεπτοῦ νήματος, δίδει ἰδέαν τινὰ τῆς εὐθείας γραμμῆς.

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐστὶν ὁ σιμοτινώτερος δρόμος ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο.

Γραμμὴ συγκειμένη ἐκ πλειόνων εὐθειῶν γραμμῶν, καλεῖται *κεκλασμένη*. Γραμμὴ δὲ ἥτις εἰς οὐδὲν αὐτῆς μέρος εἶναι εὐθεῖα, καλεῖται *καμπύλη*.

Ἐν τῷ Σχ. 1) ΑΒ ἐστὶν γραμμὴ εὐθεῖα, ΑΓΔΒ κεκλασμένη, καὶ ΑμνΒ καμπύλη. Ἡ καμπύλη γραμμὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κεκλασμένη, ἧς τὰ εὐθέα μέρη εἰσὶν ἐλάχιστα.

Ἐπίπεδον ἐστὶν ἐπιφάνεια, ἐφ' ἧς ἑνουμένων δύο κατ' ἀρέσκειαν σημείων δι' εὐθείας γραμμῆς, ἡ γραμμὴ αὕτη εὑρίσκεται καθ' ὁλοκληρίαν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Ἐπιφάνεια ἥτις δὲν εἶναι ἐπίπεδος, οὐδὲ σύγκειται ἐξ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, καλεῖται καμπύλη ἐπιφάνεια.

Στερεὸν ἢ σῶμα, καλεῖται τὸ περιέχον τὰς τρεῖς τῆς ἐκτάσεως διαστάσεις.

Γραμμὴ εὐθεῖα συναντᾷ ἐπίπεδον εἰς ἓν μόνον σημεῖον, ἐπίπεδον δὲ συναντᾷ ἕτερον κατ' εὐθεῖαν γραμμήν.

Αἱ ἐκτάσεις, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ αἱ γραμμαί, ἐκφράζονται διὰ τοῦ κοινοῦ ὀνόματος, *Σχήματα*.

Σχῆμά τι λέγεται ἐπίπεδον, ὅταν ὅλα αὐτοῦ τὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἐφ' ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου.

Ἡ γεωμετρία ἐστὶν ἡ περὶ τῶν σχημάτων πραγματευομένη ἐπιστήμη.

130. Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ (Σχ. 2) διαφόρου διευθύνσεως, συναντῶνται εἰς κοινόν τι σημεῖον Α, ὁ μεταξὺ αὐτῶν χῶρος ΒΑΓ καλεῖται *γωνία*. Τὸ σημεῖον Α καλεῖται *κορυφὴ* τῆς γωνίας, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ *πλευραὶ* αὐτῆς.

Ἡ γωνία σημειοῦται διὰ τοῦ εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς γράμματος Α, ἢ διὰ τῶν τριῶν γραμμάτων, τιθεμένου τοῦ τῆς κορυφῆς ἐν τῷ μέσῳ ὡς ΒΑΓ.

Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ *κορυφήν*, ὅταν ἡ μία σχηματίζεται ἐκ τῆς παρατάσεως τῶν πλευρῶν τῆς ἑτέρας, ὡς (Σχ. 3) αἱ ΕΑΒ, ΓΑΔ, καθὼς καὶ αἱ ΕΑΓ καὶ ΒΑΔ.

Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των, διότι ἡ μία ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς ἄλλης, καθ' ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτῆς εἰσὶν παρατάσεις ταύτης.

Εὐθεῖά τις λέγεται *κάθετος* ἐπὶ ἑτέρας, ὅταν σχηματίζῃ μετὰ ταύτης δύο προσκειμένας γωνίας ἴσας μεταξύ των. Οὕτω (Σχ. 4) ἐὰν ΑΟΓ=ΓΟΒ, ἡ ΓΔ ἐστὶ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ αὕτη ἐπίσης κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ.

Εὐθεῖα λέγεται κεκλιμένη πρὸς ἑτέραν, ὅταν δὲν σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς προσκειμένας γωνίας ἴσας, ὡς ἡ ΕΟ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Εὐθεῖά τις λέγεται *κατακόρυφος*, ὁπόταν ἀκολουθεῖ τὴν διεύθυνσιν ἐλευθέρου νήματος, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου κρέμαται βάρος. Πᾶσα κάθετος ἐπὶ τῆς κατακορύφου ταύτης καλεῖται *ὁριζόντειος*.

Καλεῖται γωνία *ὀρθή*, ἑκάστη τῶν προσκειμένων γωνιῶν, αἵτινες σχηματίζονται ἐξ εὐθείας τινός, καθέτου ἐπὶ ἑτέρας, ὡς αἱ ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ, αἵτινες εἰσὶ γωνίαι ὀρθαί.

Ἐπειδὴ αἱ κατακορυφὴν γωνίαι εἰσὶν ἴσαι, ΑΟΓ=ΔΟΒ, καὶ ΓΟΒ=ΑΟΔ, ἕπεται κατὰ τὰ λεχθέντα ὅτι αἱ πέριξ σημείου τινὸς σχηματιζόμεναι γωνίαι ἀπαρτίζουσι τέσσαρας ὀρθάς, καὶ ὅτι ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των.

Πᾶσα γωνία ΕΟΒ, μικροτέρα τῆς ὀρθῆς ΓΟΒ καλεῖται *ὀξεῖα*, πᾶσα δὲ τοιαύτη ΑΟΕ μεγαλειτέρα τῆς ὀρθῆς καλεῖται *ἀμβλεῖα*.

Δύο γωνίαι ΓΟΕ καὶ ΕΟΒ, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ μίαν γωνίαν ὀρθήν, καλοῦνται *συμπληρώματα* ἡ μία τῆς ἄλλης. Ὁπόταν δὲ τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται δύο ὀρθαῖς ὡς ΑΟΕ καὶ ΕΟΒ, καλοῦνται *παραπληρώματα* ἡ μία τῆς ἄλλης.

Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν, ὡς τῶν ΑΟΒ, ΒΟΒ′ Β′ΟΒ″, Β″ΟΑ′ (Σχ. 5), τῶν σχηματιζομένων πέριξ σημείου τινός, ἐξ ἑνὸς μέρους μιᾶς εὐθείας, ἰσοῦται δύο ὀρθαῖς. Δότι ἡ εἰς τὸ σημεῖον Ο κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΑ′ ἤτοι ἡ ΟΠ, σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΑ′ δύο ὀρθὰς γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, ΑΟΒ + ΒΟΒ′ + Β′ΟΒ″ + Β″ΟΑ′.

Ἐκ τινος σημείου ἐπὶ εὐθείας δεδομένης, μόνον μία κάθετος δύναται ἐπὶ ταύτης ὑψωθῆναι, καθὼς καὶ ἔκ τινος ἐκτὸς ταύτης σημείου, μία μόνη ἐπὶ ταύτης κάθετος δύναται καταβιβασθῆναι.

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Α (Σχ. 6) ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΓΔ κειμένου, ἀχθῇ πρὸς ταύτην κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ διάφοροι κεκλιμέναι, α′ ἡ κάθετος αὕτη ΑΔ ἐστὶ μικροτέρα πάσης ἄλλης κεκλιμμένης ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ.

β′ Δύο κεκλιμμέναι Αε καὶ ΑΖ, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τῆς καθέτου, ΕΔ=ΔΖ, εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των.

γ′ Ἐκ δύο κεκλιμμένων ΑΖ καὶ ΑΗ, μεγαλειτέρα ἐστὶν ἐκείνη ἧς ὁ ποῦς μᾶλλον ἀπέχει τῆς καθέτου.

Ἡ κάθετος ΑΔ, οὖσα ὁ σιμοτινώτερος δρόμος μεταξὺ τοῦ σημείου Α καὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, μετρᾷ τὸ ἀπόστημα μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς εὐθείας ταύτης.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΓΔ, ἐστὶν κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, πάντα τὰ σημεῖα τῆς καθέτου ταύτης, ὡς τὸ Γ, ἀπέχουσιν ἰσάκις ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β, ἰσάκις ἀπεχόντων τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, ὥστε ΓΑ=ΓΒ καὶ ΕΑ=ΕΒ (Σχ. 7).

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 8) καλοῦνται *παράλληλοι*, ὅταν κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, δὲν συναντῶνται ποτέ.

Ἔκ τινος σημείου, ἐκτὸς εὐθείας τινὸς κειμένου, μόνον μία παράλληλος ταύτης δυνατὸν ἀχθῆναι.

Καλοῦνται ἐντὸς γωνίαι αἱ ΑΗΘ, ΒΗΘ, ΓΘΗ, ΔΗΘ.

Ἐκτὸς γωνίαι αἱ ΑΗΕ, ΕΗΒ, ΓΘΖ καὶ ΖΘΔ.

Ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίαι αἱ ΑΗΘ, ΔΘΗ ἢ αἱ ΒΗΘ, ΗΘΓ.

Ἐντὸς ἐκτὸς γωνίαι αἱ ΑΗΖ, ΓΘΖ, ἢ ΒΗΘ καὶ ΔΘΖ.

Ἐναλλὰξ ἐκτὸς δὲ γωνίαι αἱ ΑΗΕ καὶ ΔΘΖ ἢ αἱ ΕΗΒ καὶ ΓΘΖ.

Κατὰ τὰ λεχθέντα ὑπάρχουσιν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις.

α΄. Τὸ ἄθροισμα δύο ἐντὸς γωνιῶν, καὶ ἀπὸ αὐτὸ μέρος κειμένων τῆς διατεμνούσης, ἰσοῦται δύο ὀρθαῖς. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἐντὸς γωνιῶν, καὶ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διατεμνούσης κειμένων, ἰσοῦται δύο ὀρθαῖς, αἱ εὐθεῖαι εἰσὶν παράλληλοι.

β΄. Τὸ ἄθροισμα δύο ἐκτὸς γωνιῶν, καὶ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διατεμνούσης κειμένων, ἰσοῦται δύο ὀρθαῖς, καὶ ἀντιστρόφως, τὸ ἀντίθετον λαμβάνει χώραν.

γ΄. Δύο Γωνίαι τοῦ ἰδίου ὀνόματος, ὡς ἐκτὸς ἐντός, ἐναλλὰξ ἐκτός, κλ. εἰσὶν ἴσαι. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν δύο γωνίαι τοῦ ἰδίου ὀνόματος εἰσὶν ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι εἰσὶν παράλληλοι. Προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τρίτης τινος εἰσὶ παράλληλοι μεταξύ των.

Ἐπίσης ὅτι πᾶσα κάθετος ἐπὶ εὐθεία ς τινος, ἐστὶ κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς.

Ἐπειδὴ δύο παράλληλοι, ἀπέχουσιν ἰσάκις μεταξύ των, καὶ ἡ κάθετος μετρᾷ τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων διάστημα, ἕπεται ὅτι δύο κάθετοι, χωρίζουσιν ἐπὶ δύο παραλλήλων τεμάχια ἴσα.

Γραμμὴ εὐθεῖα, παράλληλος μιᾷ τῶν παραλλήλων, ἐστὶ παράλληλος ἐπίσης τῇ ἑτέρᾳ.

Δύο γωνίαι ὧν αἱ πλευραὶ εἰσὶ παράλληλοι μεταξύ των, εἰσὶν ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. Διότι ἔστω (Σχ. 9) ΑΒ παράλληλος τῇ ΔΔ′ καὶ ΒΓ παράλληλος τῇ ΖΖ′, ἡ γωνία ΑΒΓ=ΔΕΖ=Δ′ΕΖ′, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ ἐστὶ παραπλήρωμα τῆς ΔΕΖ′ ἢ τῆς Δ′ΕΖ. Ὥστε αἱ δύο γωνίαι εἰσὶν ἴσαι, ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ διευθύνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, εἰσὶ δὲ παραπληρωματικαί, ὅταν αἱ πλευραί των διευθύνονται κατ᾽ ἀντιθέτους ἐννοίας.

131. *Πολύγωνον* καλεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περιοριζομένη ὑπὸ κεκλασμένης γραμμῆς ὡς ΑΒΓΔΕ (Σχ. 10). Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΓ, ΓΔ, . . . αἵτινες συνιστῶσι τὸ πολύγωνον, καλοῦνται *πλευραὶ* αὐτοῦ.

Ἑκάστη γωνία ΑΒΓ, ΒΓΔ . . . σχηματιζομένη ἀπὸ δύο διαδοχικὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, καλεῖται γωνία τοῦ *πολυγώνου*.

Πᾶσα εὐθεῖα ΑΓ, ἑνοῦσα δύο μὴ παρακειμένας γωνίας τοῦ πολυγώνου, καλεῖται *διαγώνιος* αὐτοῦ.

Τὸ ἔχον τρεῖς πλευρὰς πολύγωνον καλεῖται *τρίγωνον*, τὸ ἔχον τέσσαρας, τετράγωνον, τὸ πέντε πεντάγωνον, τὸ ἓξ ἑξάγωνον κλ. ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν.

132. Τρίγωνον καλεῖται *ὀρθογώνιον* ὅταν μία τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἐστὶν ὀρθή. *Ὑποτείνουσα* δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου τριγώνου, καλεῖται ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρά, ὡς ἡ ΑΒ (Σχ. 11).

Ἰσοσκελὲς καλεῖται τὸ τρίγωνον, ὅταν δύο αὐτοῦ πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι, ὡς ΑΒ=ΑΓ (Σχ. 12).

Ἰσοσκελοῦς τινος τριγώνου, αἱ δύο ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ εἰσὶν ἴσαι, καὶ ἂν τρίγωνον ἔχει δύο γωνίας ἴσας, τὸ τρίγωνον ἐστὶν ἰσοσκελές.

Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἰσοσκελοῦς τινος τριγώνου, ἀγομένη ἐπὶ τῆς βάσεως κάθετος ΑΔ, διαιρεῖ ταύτην εἰς δύο ἴσα μέρη, διότι μόνον σημεῖόν τι τῆς καθέτου ἐπὶ τοῦ μέσου τούτου, ἀπέχει ἰσάκις τῶν σημείων Β καὶ Γ.

Τρίγωνον λέγεται *ἰσόπλευρον*, ὅταν αἱ τρεῖς αὐτοῦ πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει τὰς γωνίας ἐπίσης ἴσας, καὶ τρίγωνον ἔχον τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας ἐστὶν ἰσόπλευρον.

Τρίγωνον καλεῖται *σκαληνόν*, ὅταν αἱ τρεῖς πλευραὶ αὐτοῦ εἰσὶν ἄνισοι. Ἐπίσης αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ σκαληνοῦ τριγώνου εἰσὶν ἄνισοι.

Βάσις τριγώνου τινος, καλεῖται ἀδιαφόρως μία τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, πλὴν ληφθείσης μιᾶς ὡς βάσεως, ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία καλεῖται *κορυφὴ* τοῦ τριγώνου. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς ὅμως τρίγωνον, ὡς βάσις συνήθως λαμβάνεται ἡ ἄνισος αὐτοῦ πλευρά.

Ὕψος τριγώνου τινος ἐστὶν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς βάσεως ἀχθεῖσα κάθετος ὡς ΑΔ ἐστὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 13).

133. *Παραλληλόγραμμον* καλεῖται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἰσὶν παράλληλοι, ὡς ΑΒΓΔ (Σχ. 14.)

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλλήλων, ἕπεται ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραί, καθὼς καὶ αἱ γωνίαι παραλληλογράμμου τινος εἰσὶν ἴσαι. Ὡς βάσις λαμβάνεται ἀδιαφόρως μία τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὕψος ὅμως αὐτοῦ ἐστὶν ἡ μεταξὺ δύο ἀπέναντι παραλλήλων πλευρῶν κάθετος.

Τραπέζιον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, οὗ τινος μόνον δύο πλευραὶ εἰσὶ παράλληλοι, ὡς ΑΒΓΔ (Σχ. 15.) Βάσεις αὐτοῦ εἰσὶν αἱ δύο παράλληλοι πλευραί, ὕψος δὲ ἡ μεταξὺ τούτων κάθετος ΕΖ.

Τὸ τραπέζιον δύναται νὰ ἦναι ὀρθογώνιον ἢ ἰσοσκελές, καθ᾽ ὅσον ἡ μία τῶν πλευρῶν ἐστὶ κάθετος ἐπὶ τῶν παραλλήλων, ἢ ἴση τῇ ἑτέρᾳ.

Ὀρθογώνιον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, οὗ αἱ γωνίαι εἰσὶν ὀρθαί. Αἱ πλευραὶ αὐτοῦ φανερῶς εἰσὶ παράλληλοι, ὡς τὸ ΑΒΓΔ (Σχ. 16.) Βάσεις καὶ ὕψος, εἰσὶν αἱ πλευραί του.

Ῥόμβος καλεῖται τετράπλευρον παραλληλόγραμμον, οὗ αἱ πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι. Βάσις, ἐστὶ μία τῶν πλευρῶν, ὕψος δὲ ἡ ἐκ ταύτης πρὸς τὴν ἀπέναντι κάθετον (Σχ. 17.)

Τετράγωνον καλεῖται τὸ τετράπλευρον παραλληλόγραμμον οὗ αἱ τέσσαρες γωνίαι εἰσὶν ὀρθαί, καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι, ὡς ΑΒΓΔ (Σχ. 18.) Ὕψος καὶ βάσις τοῦ τετραγώνου εἰσὶν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.

134. Πολύγωνόν τι ἐστὶν ἰσόγωνον, ὅταν ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἰσὶν ἴσαι, ἰσόπλευρον δὲ ὅταν αἱ πλευραί του εἰσὶν ἅπασαι ἴσαι μεταξύ των.

Πολύγωνόν τι δύναται νὰ ἦναι ἐνταυτῷ ἰσόγωνον, καὶ ἰσόπλευ-

ρον, ὡς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ τετράγωνον κλπ. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται δύο ὀρθαῖς.

Προκύπτει ὅθεν ἐκ τούτου, ὅτι ὅταν μία τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου τινος ἐστὶν ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, αἱ ἕτεραι δύο ἔσονται ὀξεῖαι, καὶ ὅτι ὀρθογωνίου τινος τριγώνου αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι εἰσὶ συμπληρωματικαί.

Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου τινος ΓΒΔ (Σχ. 19), ἡ σχηματιζομένη ἐκ τῆς παρατάσεως μιᾶς τῶν πλευρῶν, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, ΓΒΔ=ΒΑΓ+ΑΓΒ, διότι καὶ ταύτης τὸ ἄθροισμα μετὰ τῆς ΓΒΑ ἰσοῦται δύο ὀρθαῖς.

135. Δύο τρίγωνα εἰσὶν ἴσα (Σχ. 20)

α'. Ὅταν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἐπίσης ἴσων, ἤτοι Α=Α', ΑΒ=Α'Β' καὶ ΑΓ=Α'Γ'.

β'. Ὅταν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην, καὶ τὰς δύο προσκειμένας ταύτῃ γωνίας ἐπίσης ἴσας, ἡ ΑΒ=Α'Β', καὶ Α=Α', Β=Β'.

γ'. Ὅταν αἱ τρεῖς αὐτῶν πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των.

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ΑΒΓ, Α'Β'Γ' (Σχ. 21), εἶναι ἴσα μεταξύ των.

α'. Ὅταν ἔχωσι τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσας, ὡς ΒΓ=Β'Γ' καὶ Β=Β'.

β'. Ὅταν ἔχωσι τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν πλευρῶν ἴσας, ὡς ΒΓ=Β'Γ' καὶ ΑΒ=ΑΒ'.

Ταῦτα ἀποδεικνύονται διὰ τῆς ἐπιθέσεως τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ τοῦ ἑτέρου.

Δύο παραλληλόγραμμα εἰσὶν ἴσα, ὅταν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων μεταξύ των.

Δύο ὀρθογώνια εἰσὶν ἴσα, ὅταν ἔχωσι δύο παρακειμένας πλευρὰς ἴσας, ἑκάστη πρὸς ἑκάστην.

Δύο ῥόμβοι εἰσὶν ἴσοι, ὅταν ἔχωσι μίαν πλευρὰν καὶ μίαν γωνίαν ἴσας μεταξύ των.

Δύο τετράγωνα εἰσὶν ἴσα, ὅταν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην.

136. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται, ὡς δείκνυται ἐκ τῶν σχηματιζομένων ἴσων τριγώνων. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν τετραπλεύρου τινος αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται, τοῦτο ἐστὶ παραλληλόγραμμον.

6

Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των.

Αἱ διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου εἰσὶ κάθετοι μεταξύ των.

Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἰσὶ καὶ κάθετοι καὶ ἴσαι μεταξύ των.

Ἑκάστη διαγώνιος διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἴσα τρίγωνα, καὶ αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου καὶ τοῦ τετραγώνου διαιροῦσι τὸ σχῆμα εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα.

Τὸ σημεῖον Ο (Σχ. 22) τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων, ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ σχήματος τοῦ παραλληλογράμμου. Ἑκάστη διατέμνουσα, διερχομένη διὰ τοῦ σημείου τούτου, διαιρεῖ τὸ σχῆμα εἰς δύο ἴσα μέρη.

Εἰς πᾶν τραπέζιον, ΑΒΓΔ (Σχ. 23), ἡ εὐθεῖα ΜΝ, ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, ἐστὶ παράλληλος τούτων, καὶ περιπλέον $ΜΝ=\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$, ἤτοι μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν παραλλήλων πλευρῶν.

137. *Κύκλος*, ἐστὶν ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περιοριζομένη ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς τοιαύτης, ὥστε ἂν ἐξ ἑνὸς ὡρισμένου σημείου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἀχθῶσι καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις εὐθεῖαι πρὸς τὴν καμπύλην ταύτην, αὗται εἰσὶν ὅλαι ἴσαι μεταξύ των. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται *κέντρον* τοῦ κύκλου, ἡ δὲ καμπύλη περιοχὴ καλεῖται *περιφέρεια* αὐτοῦ.

Πᾶσα εὐθεῖα ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀγομένη, καλεῖται *ἀκτίς*, ἅπασαι δ' αἱ ἀκτῖνες κύκλου τινος εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των (Σχ. 24.)

Φανερὸν ἐκ τούτου ὅτι δύο κύκλοι ἔχοντες τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, εἰσὶν ἴσοι μεταξύ των.

Τόξον κύκλου καλεῖται μέρος τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ὡς ΒμΓ, ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, ἤτοι ἡ ΒΓ, καλεῖται *χορδὴ* αὐτοῦ.

Διάμετρος καλεῖται ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, καὶ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, ὡς ἡ ΒΔ. Ἡ διάμετρος ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος, ἕπεται δὲ ὅτι πᾶσαι αἱ διάμετροι κύκλου τινος εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των.

Ἡ διάμετρος ὅθεν ἐστὶ χορδὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, διαιρεῖ δὲ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἡ διάμετρος ἐστὶν ἡ μεγαλειτέρα τοῦ κύκλου χορδή.

Πᾶσα γωνία, ὡς ἡ ΑΟΔ, ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καλεῖται *κεντρικὴ γωνία*.

Ὁ μεταξὺ τόξου τινος κυκλικοῦ ΒμΓ καὶ τῆς χορδῆς του χῶρος, καλεῖται *τμῆμα* τοῦ κύκλου, ὁ δὲ μεταξὺ δύο ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΔ καὶ τόξου ΑΔ, καλεῖται *κυκλικὸς τομεύς*. Πᾶσα ἀκτὶς ΟΗ, κάθετος ἐπὶ χορδῆς τινος ΔΕ, διχοτομεῖ ταύτην, καθὼς καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξου, ὥστε ΔΒ=ΕΖ καὶ ΔΗ=ΗΕ.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους

α'. Δύο ἴσα τόξα ΑΔΒ, Α'Δ'Β', ὑποτείνονται ἀπὸ ἴσας χορδάς, ὥστε, ΑΒ=Α'Β', καὶ ἀντιστρόφως (Σχ. 25.)

β'. Ἐκ τῶν ἀνίσων τόξων, τὸ μεγαλείτερον ὑποτείνεται ὑπὸ μεγαλειτέρας χορδῆς.

γ'. Δύο ἴσαι χορδαί, ΑΒ, Α'Β' (Σχ. 26), ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τὸ κέντρον, καὶ ἀντιστρόφως. Διότι τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, Α'Β'Ο εἰσὶν ἴσα, ἐπομένως καὶ τὰ ὕψη των ἴσα.

δ'. Ἐκ δύο χορδῶν, ἡ μεγαλειτέρα ἐστὶ πλησιεστέρα εἰς τὸ κέντρον, καὶ ἀντιστρόφως, ὥστε ΑΔ<ΑΔ'.

Ἴσα τόξα ΑΔΒ καὶ Α'Δ'Β' (Σχ. 25) ὑποτείνουσιν ἴσας κεντρικὰς γωνίας ΑΟΒ=Α'ΟΒ', καὶ ἀντιστρόφως· καὶ μεγαλείτερα τόξα ὑποτείνουσι μεγαλειτέρας γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως.

ε'. Δύο ἴσα τόξα εἰσὶ βάσεις ἴσων τομέων, καὶ ἀντιστρόφως. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς χορδάς.

Ἡ ὑπὸ δύο χορδῶν τεμνομένων ἐπὶ τῆς περιφερείας σχηματιζομένη γωνία, καλεῖται *ἐγγεγραμμένη*, ὡς ἡ ΒΑΓ (Σχ. 25.)

Πολύγωνον καλεῖται *ἐγγεγραμμένον* εἰς κύκλον, ὅταν ἅπασαι αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἐπομένως αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἰσὶν χορδαί. Ἡ περιφέρεια ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καλεῖται *περιγέγραμμένη* εἰς τὸ πολύγωνον.

Εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναντήσῃ περιφέρειαν εἰς πλείονα τῶν δύο σημείων.

Εὐθεῖα κειμένη ἐκτὸς τῆς περιφερείας, καὶ ἔχουσα κοινὸν μετὰ ταύτης μόνον ἓν σημεῖον, καλεῖται *ἐφαπτομένη* εἰς τὴν περιφέρειαν. Ἡ ἐφαπτομένη ἐστὶ κάθετος ἐπὶ τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀκτῖνος, ΟΔ (Σχ. 27).

Δύο κύκλοι ἔχοντες ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον καλοῦνται ἐφαπτόμενοι. Ἡ ἐπαφὴ δύναται νὰ λάβῃ χώραν ἐξωτερικῶς (Σχ. 28) ἢ ἐσωτερικῶς (Σχ. 29).

Δύο κύκλοι ἔχουσι τέσσαρας κοινὰς ἐφαπτομένας αἵτινες τέμνονται ἀνὰ δύο ἐπὶ τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα εὐθείας, αἱ μὲν ἔσωθεν αἱ δὲ ἔξωθεν (Σχ. 30).

Πολύγωνον καλεῖται *περιγεγραμμένον* εἰς κύκλον, ὅταν ἅπασαι αὐτοῦ αἱ πλευραὶ εἰσὶν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου τούτου. Ὁ κύκλος ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καλεῖται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον.

Δύο ἢ πλειότεροι κύκλοι, (Σχ. 29) ομ, ομ′, ομ″, ἔχοντες κοινὸν τὸ κέντρον, καλοῦνται *ὁμόκεντροι*.

Δύο κύκλοι δὲν δύνανται νὰ συναντηθῶσιν εἰς πλείονα τῶν δύο σημείων.

Τὸ διάστημα μεταξὺ τῶν κέντρων δύο κύκλων ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, ἤτοι (Σχ. 28) ΟΟ′=ΟΑ+Ο′Α· ἐφαπτομένων δ' ἐσωτερικῶς, μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων ἀκτίνων, (Σχ. 29), ἤτοι ΟΟ′=ΟΑ—Ο′Α.

Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ δύο σημεῖα τῆς συναντήσεως δύο τεμνομένων κύκλων, ΑΒ (Σχ. 31), ἐστὶ κάθετος ἐπὶ τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τῶν κύκλων τούτων εὐθείας γραμμῆς.

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία, ΒΓΔ (Σχ. 32), ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς κεντρικῆς ΒΟΔ τῆς ὑποτεινομένης ἀπὸ τὸ αὐτὸ τόξον ΒΔ. Διότι ἡ ΒΟΔ ἰσοῦται μὲ τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι αἵτινες εἰσὶν ἴσαι, ὡς ὄντος τοῦ τριγώνου ΓΟΒ ἰσοσκελοῦς.

Αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα κύκλου ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰσὶν ἴσαι.

Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, ἐστὶ γωνία ὀρθή, ὡς εὐκόλως δείκνυται ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΓΒΔ (Σχ. 32).

Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τρεῖς γωνίας τριγώνου τινὸς εὐθεῖαι συναντῶνται εἰς σημεῖόν τι Ο, ὅπερ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ τριγώνῳ κύκλου (Σχ. 33).

Αἱ ἐκ τοῦ μέσου ἑκάστης τῶν τριῶν πλευρῶν ὑψούμεναι κάθετοι, συναντῶνται εἰς σημεῖόν τι Ο, ὅπερ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (Σχ. 34).

Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ἑνοῦσαι τὰς τρεῖς κορυφὰς τριγώνου τινος

ΑΒΓ (Σχ. 35) μὲ τὰ μέσα τῶν τριῶν ἀπέναντι αὐτῶν πλευρῶν, συναντῶνται εἰς σημεῖόν τι Ο, ὅπερ ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τοῦ σχήματος, περὶ οὗ λεχθήσεται κατωτέρω.

138. Δύο μήκη εἰσὶν ἀνάλογα πρὸς ἕτερα δύο, ὅταν ὁ λόγος μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐστὶν ἴσος μὲ τὸν λόγον μεταξὺ τῶν δευτέρων.

Δύο πολύγωνα καλοῦνται ὅμοια, ὁπόταν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας, ὡς Α=Α′, Β=Β′, Γ=Γ′, κλπ. καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, ὡς $\frac{AB}{A'B'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}$. . . (Σχ. 36).

Πᾶσα εὐθεῖα ΔΕ, παράλληλος τῆς βάσεως τριγώνου τινὸς ΑΒΓ, διαιρεῖ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα,

ἤτοι $\frac{A\Delta}{AE}=\frac{\Delta B}{E\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$. . . . (Σχ. 37).

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ (Σχ. 38) καλοῦνται ὅμοια

ά. Ὅταν ἔχωσι τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας Α=Α′, Β=Β′, Γ=Γ′. Ἐπειδὴ ὅταν αἱ δύο γωνίαι ἰσοῦνται μὲ τὰς ἄλλας δύο, ἡ τρίτη αφεύκτως ἰσοῦται τῇ τρίτῃ, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια, ὅταν ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας.

β′. Ὅταν ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ὡς $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$.

γ′. Ὅταν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων. Α=Α′, $\frac{AB}{A'B'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$.

δ′. Ὅταν ἔχωσι τὰς πλευράς των παραλλήλους, ὡς ἐπίσης καὶ καθέτους μεταξύ των, διότι ἐν τῇ περιστάσει ταύτῃ αἱ γωνίαι των εἰσὶν ἴσαι, (Σχ. 40) ὡς ΑΒΓ, Α′Β′Γ′.

Δύο παραλληλόγραμμα καλοῦνται ὅμοια, ὅταν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων.

Δύο ὅμοια πολύγωνα ἀναλύονται διὰ διαγωνίων, εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

139. Τὰ λεχθέντα ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων εἰσὶν ἀλληλένδετα, ἐξαρτώμενα, ὡς φανερόν, τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου· ὁ ζητῶν ὅμως τὰς διὰ φράσεων ἀποδείξεις, δύναται ν' ἀναδράμῃ εἰς εἰδικὰ συγγράμματα γεωμετρίας.

Μέτρον τῶν εὐθειῶν καὶ μέτρον τῶν γωνιῶν.

140. Γραμμὴ εὐθεῖα σύρεται ἐπὶ τοῦ χάρτου δι' εὐθέως κανόνος. Εὐθεῖά τις μετρᾶται, ἤτοι εὑρίσκεται ποσάκις περιέχει ἄλλην, τιθεμένου τοῦ ἑνὸς ποδὸς τοῦ διαβήτου ἐπὶ τοῦ ἑνὸς αὐτῆς ἄκρου, καὶ σημειουμένου ποσάκις ὁ διαβήτης μεταφέρεται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἔχων ἄνοιγμα ἴσον μὲ τὴν εὐθεῖαν ἥτις χρησιμεύει ὡς μονὰς συγκρίσεως. Ἐὰν μένῃ τεμάχιον μικρότερον μονάδος, δοκιμάζεται ποσάκις τοῦτο περιέχει τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς δεδομένης μονάδος, καὶ πάλιν τὸ ἐναπομένον τεμάχιον, ποσάκις ἐμπεριέχει τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς μονάδος, κλπ. Ἡ ἐν χρήσει μονὰς πρὸς καταμέτρησιν τῶν ἐπὶ τοῦ χάρτου εὐθειῶν, ἐστὶ τὸ ὑποδεκάμετρον (84) ἤτοι ἡ παλάμη, ἥτις ἐστὶ τὸ 0,1 τοῦ Β. πήχεως ἢ μέτρου, ὑποδιαιρουμένη δεκαδικῶς.

Διὰ τῆς μονάδος ταύτης καὶ τοῦ διαβήτου, μετρῶνται αἱ ἐπὶ τοῦ χάρτου εὐθεῖαι γραμμαί.

141. Πρὸς καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν, ἡ περιφέρεια διῃρέθη εἰς 360 ἴσα μέρη, ἅτινα ὀνομάζονται μ ο ῖ ρ α ι.

Ἡ ἡμιπεριφέρεια ὅθεν περιέχει 180 τοιαύτας, τὸ δὲ τέταρτον αὐτῆς 90. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, καλούμενα *πρῶτα λεπτά*, ἕκαστον δὲ πρῶτον πάλιν λεπτὸν εἰς 60 ἴσα μέρη, καλούμενα δεύτερα λεπτά. Αἱ μοῖραι σημειοῦνται (^{0}), τὰ πρῶτα λεπτά ($'$), καὶ τὰ δεύτερα ($''$). Οὕτω $36^0\,27'\,42''$, παριστᾷ 36 μοίρας, 27 πρῶτα καὶ 42 δεύτερα λεπτά. Αἱ μοῖραι, τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα λεπτὰ εἰσὶ μονάδες χρησιμεύουσαι πρὸς σύγκρισιν τῶν τόξων, ἢ τῶν ὑποτεινομένων ὑπὸ τούτων γωνιῶν.

Ἐφηρμόσθη καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ κύκλου τὸ δεκαδικὸν σύστημα, διαιρεθείσης τῆς περιφερείας εἰς 400 μοίρας, καὶ ἀνὰ 100 τῶν ὑποδιαιρέσεων, πλὴν ἡ χρῆσις τῆς διαιρέσεως ταύτης δὲν ἐγενικεύθη καὶ μᾶλλον συνήθης ἐστὶν ἡ ἑξαδικὴ διαίρεσις, ἤτοι ἡ εἰς 360^0, ἕνεκα τοῦ μεγίστου ἀριθμοῦ τῶν διαιρετῶν τοῦ 360.

Πᾶσα κεντρικὴ γωνία ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἀνταποκρινόμενον τόξον, τουτέστι αὕτη περιέχει τοσάκις τὴν γωνίαν τῆς μονάδος, ἤτοι τῆς 1^0, ὁσάκις τὸ ἀνταποκρινόμενον τόξον περιέχει τὴν μονάδα τοῦ τόξου, ἤτοι τὸ τόξον τῆς 1^0. Τὸ τεταρτοκύκλιον περιέχει 90^0.

Ἡ εἰς μοίρας ἔκφρασις τόξου τινος, δὲν ἐμφαίνει τὸ μῆκος ἢ τὴν ἀνάπτυξιν αὐτοῦ, ἀλλὰ μόνον ποσάκις τὸ τόξον τοῦτο περιέχει τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης τὴν τοῦ τόξου ἀκτῖνα. Ἕπεται ὅθεν ὅτι τόξα ἰσαρίθμων μοιρῶν, δύνανται νὰ ὦσιν ὅλως ἄνισα, ἐνῷ ἀπ' ἐναντίας γωνίαι ἰσαρίθμων μοιρῶν, εἰσὶ πάντοτε ἴσαι.

Ἐπειδὴ ἡ ἐγγεγραμμένη εἴς τινα περιφέρειαν γωνία, ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῆς κεντρικῆς, ἣν ὑποτείνει τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῆς ἐγγεγραμμένης τόξον (137), ἕπεται ὅτι αὕτη ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ὑποτείνοντος αὐτὴν τόξου. Παρομοίως ἔχει καὶ διὰ γωνίαν σχηματιζομένην ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης.

Ἡ γωνία ΕΑΓ, (Σχ. 40), σχηματιζομένη ἐκ δύο ἐντὸς τῆς περιφερείας τεμνομένων χορδῶν, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὑποτεινομένων παρὰ τῶν δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ΕΑΓ καὶ ΒΑΓ τόξων, ἤτοι $\frac{\text{ΕΓ}\times\text{ΒΔ}}{2}$. Ὥστε ἂν τὸ τόξον ΒΔ τὸ ὑποτεῖνον τὴν κεντρικὴν γωνίαν ΒΟΔ εἶναι 25^0, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ὑποτεῖνον τὴν κεντρικὴν γωνίαν ΕΟΓ εἶναι 93^0, ἡ γωνία $\text{ΕΑΓ}=\frac{93+25}{2}=59^0$.

Ἡ γωνία ΒΑΓ (Σχ. 41), ἡ σχηματιζομένη ἐκ δύο ἐκτὸς τῆς περιφερείας τεμνομένων χορδῶν, ἢ μιᾶς χορδῆς καὶ μιᾶς ἐφαπτομένης, ἔχει διὰ μέτρον τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τούτων τόξων, ἤτοι $\frac{\text{ΒΓ}-\text{ΕΔ}}{2}$, ὥστε ἂν ἡ $\text{ΒΓ}=28^0$ καὶ $\text{ΕΔ}=10^0$, ἡ γωνία $\text{ΒΑΓ}=\frac{28-10}{2}=9^0$, καὶ ἡ $\text{ΖΑΒ}=\frac{\text{ΖΒ}-\text{ΖΕ}}{2}$.

Ἐν γένει διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν, αὗται διαιροῦνται ὡς τ' ἀνταποκρινόμενα τόξα, ἤτοι εἰς γωνίας 1^0, γωνίας $1'$, γωνίας $1''$ κτλ., ἄρα γωνία τις ὑποτείνεται ἀπὸ διάφορα τόξα, ἀναλόγως τῶν διαφόρων ἀκτίνων· πάντα ὅμως τὰ τόξα ταῦτα εἰσὶν ἰσαρίθμων μοιρῶν (Σχ. 42). Οὕτω ἡ γωνία ΛΟΓ, ὑποτείνεται ἀπὸ τὰ τόξα μν, μ'ν', μ'' ν'' μ''' ν''' ἅτινα πάντα εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μοιρῶν, ἂν καὶ ἡ ἀνάπτυξις ἢ τὰ μήκη αὐτῶν διαφέρουσι μεγάλως, ἀναλόγως τῶν ἀκτίνων.

Μέτρον τῶν ἐπιπέδων κανονικῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν περιμέτρων αὐτῶν.

142. Τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τινος, ἐστὶ τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἤτοι ὁ λόγος τῆς ἐκτάσεως αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας.

Τὸ γινόμενον δύο γραμμῶν, ἐστὶ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς μιᾶς ἐπὶ τοῦ τῆς ἑτέρας.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἤτοι (Σχ. 43) ἐμ. $ΑΒΓΔ=Β\times Υ$.

Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, περιέχει τοσάκις τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου τῆς μονάδος δι' ἧς ἐμετρήθησαν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΔ, ὁσάκις ἐμπεριέχει ταύτην τὸ γινόμενον $ΑΒ\times ΑΔ$ ἢ ΒΥ.

Ἐὰν Β=3, 50$^{μ.}$ καὶ Υ=2, 15, τὸ ἐμβαδὸν ἔσται $Ε=3,50\times 2,15=7, 525$ $^{τετρ. μ.}$ τὰ 7, 525 εἰσὶ τετραγωνικὰ μέτρα, ἤτοι τετράγωνα ἔχοντα πλευρὰν 1, 00,^{μ} σημειοῦνται δὲ τετρ. μ.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 44) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του, ἤτοι $Ε=\frac{1}{2}\, ΒΓ\times ΑΔ=\frac{1}{2}\, ΒΥ$.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΓ' (Σχ. 45) ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἰσὶν ἴσα μεταξύ των. Ἐπειδὴ τὰ ὕψη των εἰσὶν ἴσα, ἐὰν αἱ βάσεις των ἐφαρμοσθῶσιν, αἱ κορυφαὶ θὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῆς κοινῆς ταύτης βάσεως.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του, ὥστε (Σχ. 47) Ε=ΒΥ.

Ἐπειδὴ τρίγωνον ἔχον βάσιν Ε καὶ ὕψος Υ ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{2}$ ΒΥ, τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραλληλόγραμμον, ἔχει ἐμβαδὸν τὸ ἥμισυ τούτου.

Πᾶν παραλληλόγραμμον, ἰσοῦται μὲ πᾶν ἄλλο καὶ μὲ τὸ ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεών του, ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἤτοι $Ε=\frac{Β+β}{2}\times Υ$.

Ἐπίσης ἔχει καὶ διὰ μέτρον τὸ γινόμενον τῆς ἑνούσης τὰ μέσα

τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν εὐθείας ἐπὶ τὸ ὕψος του, $E = B' \times \Upsilon$. (Σχ. 47.)

Πᾶν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον πολύγωνον, ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου, ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, διότι τοῦτο σύγκειται ἐκ τριγώνων ἐχόντων ἐμβαδὸν τὴν βάσιν των, ἤτοι μίαν τοῦ πολυγώνου πλευράν, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, τὸ δ' ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων, δίδει τὸ τοῦ πολυγώνου (Σχ. 48) $E = \frac{1}{2}(A + B + \Gamma + \Delta + E) \times \alpha$.

Τὸ τετράγωνον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο γραμμῶν ΑΒ καὶ ΒΓ περιέχει (Σχ. 49) τὸ τετράγωνον τῆς μιᾶς γραμμῆς πλέον τὸ τετράγωνον τῆς ἑτέρας, πλέον τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ κατασκευαζομένου διὰ τῶν δύο εὐθειῶν (105), ἤτοι $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + 2AB \times B\Gamma$.

Ἐπίσης (105) τὸ τετράγωνον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς διαφορᾶς διὰ γραμμῶν, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο εὐθειῶν, μεῖον τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ κατασκευαζομένου διὰ τῶν δύο εὐθειῶν τούτων (Σχ. 50). $A\Gamma^2 = \overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 - 2AB \times B\Gamma$.

Ὁ Πυθαγόρας διὰ τοῦ περιφήμου αὐτοῦ θεωρήματος τῆς ἑκατόμβης, ἀπέδειξεν ὅτι παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευαζόμενον τετράγωνον, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (Σχ. 51), ἤτοι, $\overline{AB}^2 = A\Gamma^2 + \overline{B\Gamma}^2$, ἐξ ἧς προκύπτει $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{B\Gamma}^2$ καὶ $\overline{B\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{A\Gamma}^2$, τουτέστι τὸ τετράγωνον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς ὀρθογωνίου τινος τριγώνου, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἐκ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης.

Προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ὀρθογωνίου τινος, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου τετραγώνου τινός, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τούτου.

Εἰς πᾶν παραλληλόγραμμον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἁπασῶν τῶν πλευρῶν.

143. Πολύγωνον λέγεται κανονικόν, ὅταν ἦναι ἐνταυτῷ ἰσόπλευρον καὶ ἰσόγωνον (134).

Τὸ κέντρον, καὶ ἡ ἀκτὶς κανονικοῦ τινος πολυγώνου, ἐστὶ τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. *Ἀπόθεμα* δὲ κανονικοῦ τινος πολυγώνου καλεῖται ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ κύκλου (Σχ. 52).

Ἡ γωνία ΑΟΒ, σχηματιζομένη ὑπὸ δύο ἀκτίνων ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς, καλεῖται κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου. Τὸ δ' ἐκ δύο παρακειμένων τριγώνων τμῆμα ΑΒΓΟ, καλεῖται *πολυγωνικὸς τομεύς*.

Ἐὰν περιφέρειά τις διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη·

α'. Αἱ χορδαὶ αἱ ἑνοῦσαι διαδοχικῶς τὰς διαιρέσεις σχηματίζουσι κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν.

β'. Αἱ εἰς τὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων ἐφαπτόμεναι σχηματίζουσι περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον.

Καὶ ἀντιστρόφως, αἱ πλευραὶ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς ἴσα μέρη, καὶ ἐπίσης τὰ σημεῖα ἐπαφῆς κανονικοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς ἴσα μέρη.

Ὁ ἐγγεγραμμένος καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος, εἰς κανονικόν τι πολύγωνον, εἰσὶ κύκλοι ὁμόκεντροι.

Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς κανονικοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, εἰσὶ τὰ μέσα τῶν σχετικῶν πλευρῶν.

Ἐν κανονικῷ τινι πολυγώνῳ, μόνον ἕνα κύκλον δυνατὸν ἐγγραφῆναι, ὡς ἐπίσης καὶ περιγραφῆναι.

Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ τινος πολυγώνου, ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποθέματος, ἤτοι ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ κύκλου (142).

Δύο κανονικὰ πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν εἰσὶν ὅμοια (138).

144. Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς περιφέρειάν τινα περιγεγραμμένου τετραγώνου ΑΒΓΔ (Σχ. 53) ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον αὐτῆς ΕΖ.

Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ αοβ, $\overline{\alpha\beta}^2 = 2\overline{\alpha o}^2$ καὶ $\alpha\beta = \alpha o\sqrt{2}$ ἢ $\alpha\beta : \alpha o :: \sqrt{2} : 1$, τουτέστιν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ὡς $\sqrt{2} : 1$, ὥστε εἰς περιφέ-

ρειαν ἀκτῖνος Ρ, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου α ἐστὶν $\alpha = P\sqrt{2}$.

Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Διότι τοῦτο διαιρεῖται εἰς τρίγωνα ἅτινα, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται, εἰσὶν ἰσόγωνα καὶ ἰσόπλευρα (Σχ. 54), ὥστε ἡ πλευρὰ $\alpha = P$.

Ἑνουμένων ἀνὰ δύο τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Β'ΓΔ, προκύπτει ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τούτου τριγώνου ἔχει πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς $\sqrt{3} : 1$, ὥστε $\alpha = \sqrt{3} \times P$.

Εὐκόλως δεικνύεται ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων (Σχ. 54) ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐστὶ διπλασία τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου, διότι ΟΕ=ΕΖ, ὥστε $\alpha = 2P\sqrt{3}$.

Ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐστὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἰσοπλεύρου περιγεγραμμένου τριγώνου, ἤτοι $\alpha = \frac{2}{3} P\sqrt{3}$.

Οὕτω ἐσχηματίσθη πίναξ τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων πρὸς τὴν ἀκτῖνα Ρ.

Πολύγωνα	Πλευραὶ ἐγγεγραμμένου		Πλευραὶ περιγεγραμμένου	
	ἀκτῖνος p	ἀκτ.=1	ἀκτῖνος p	ἀκτ.=1
Ἰσόπ. Τρίγων.	$P\sqrt{3}$	1,7320	$2P\sqrt{3}$	3,4641
Τετράγωνον	$P\sqrt{2}$	1,4142	$2P$	2,0000
Πεντάγωνον	$\frac{1}{2}P\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	1,1755	$2P\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1,4530
Ἑξάγωνον	P	1,0000	$\frac{2}{3}P\sqrt{3}$	1,1547
Ὀκτάγωνον	$P\sqrt{2-\sqrt{2}}$	0,7653	$2P\sqrt{3-2\sqrt{2}}$	0,8284
Δεκάγωνον	$\frac{1}{2}P(\sqrt{5}-1)$	0,6180	$2P\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	0,6498
Δωδεκάγωνον	$\frac{1}{2}P(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	0,5176	$2P(2-\sqrt{3})$	0,5358

Ὥστε δεδομένης τῆς ἀκτῖνος ὑπολογίζεται ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τὸ πολύγωνον τοῦτο ἐγγεγραμμένου κύκλου ἢ τὸ ἀπόθεμα.

Ἀκτῖνες καὶ ἀποθέματα κανονικῶν πολυγώνων δεδομένης πλευρᾶς α.

Πολύγωνα	Ἀκτῖνες πολυγώνων	Ἀποθέματα Συνεκθέσει πλευρᾶς α	Ἀποθέματα Συνεκθέσει ἀκτῖνος Ρ
Ἰσόπλευρον Τρίγωνον	$\frac{1}{3} \alpha \sqrt{3}$	$\frac{1}{6} \alpha \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} P$
Τετράγωνον	$\frac{1}{2} \alpha \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \alpha$	$\frac{1}{2} P \sqrt{2}$
Πεντάγωνον	$\frac{1}{10} \alpha \sqrt{50+10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{10} \alpha \sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2} P (1+\sqrt{5})$
Ἑξάγωνον	α	$\frac{1}{2} \alpha \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} P \sqrt{3}$
Ὀκτάγωνον	$\frac{1}{2} \alpha \sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2} \alpha (1+\sqrt{2})$	$\frac{1}{2} P \sqrt{2+\sqrt{2}}$
Δεκάγωνον	$\frac{1}{2} \alpha (1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2} \alpha \sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4} P \sqrt{10-2\sqrt{5}}$
Δωδεκάγωνον	$\alpha \sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} \alpha (2+\sqrt{3})$	$\frac{1}{4} P (\sqrt{2}+\sqrt{6})$

Ὥστε διὰ τοῦ πίνακος τούτου, δεδομένης οὔσης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ τινος πολυγώνου, ὑπολογίζεται ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἐπιφάνειαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων

Πολύγωνα	Ἐπιφάνειαι ἐγγεγραμ. πολυγώνων Συνεκθέσει ἀκτῖνος κύκλου		Ἐπιφάνειαι ἐγγεγραμ. πολυγώνων Συνεκθέσει πλευρᾶς	
	Ρ	Ρ=1	α	α=1
Ἰσόπλευρον Τρίγωνον	$\frac{3}{4}Ρ^2\sqrt{3}$	1,2990	$\frac{1}{4}α^2\sqrt{3}$	0,4330
Τετράγωνον	$2\,Ρ^2$	2,0000	$α^2$	1,0000
Πεντάγωνον	$\frac{5}{8}\,Ρ^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	2,3776	$\frac{3}{4}\,α^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	1,7204
Ἑξάγωνον	$\frac{3}{2}\,Ρ^2\sqrt{3}$	1,5980	$\frac{3}{2}\,α^2\sqrt{3}$	2,5980
Ὀκτάγωνον	$2Ρ^2\sqrt{2}$	2,8284	$2α^2(1+\sqrt{2})$	4,8284
Δεκάγωνον	$\frac{5}{4}Ρ^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	2,9389	$\frac{5}{2}α^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	7,6942
Δωδεκάγωνον	$3Ρ^2$	3,0000	$3α^2(2+\sqrt{3})$	11,1961

Διὰ τοῦ πίνακος τούτου, δεδομένης οὔσης τῆς ἀκτῖνος ἢ τῆς πλευρᾶς, εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Πρὸς εὔκολον ὑπολογισμὸν τῶν ζητουμένων διὰ τῶν ἄνω πινάκων, ὑπολογισμένα εἰσὶ τὰ ἑξῆς

$\sqrt{2}=1,4142,\cdots$ $\sqrt{3}=1,7320\cdots$ $\sqrt{5}=2,2360\cdots$;

Πίναξ

Ἀριθμὸς πλευρῶν τοῦ Πολυγώνου	1ον τῆς πλευρᾶς ὡς μονάδος			2ον Ἀξία πλευρᾶς ὅταν		
	Ἀκτὶς	Ἀπόθεμα	Ἐμβαδὸν	Ἀκτὶς = 1	Ἀπόθ. = 1	Ἐμβαδ = 1
3	0,5773	0,2886	0,4330	1,7320	3,4641	1,5196
4	0,7071	0,5000	1,0000	1,4142	2,0000	1,0000
5	0,8506	0,6881	1,7204	1,1755	1,4530	0,7623
6	1,0000	0,8660	2,5980	1,0000	1,1547	0,6284
7	1,1523	1,0382	3,6339	0,8677	0,9631	0,5245
8	1,3065	1,2071	4,8284	0,7653	0,8284	0,4550
9	1,4619	1,3737	6,1818	0,6840	0,7279	0,4022
10	1,6180	1,5388	7,6942	0,6180	0,6498	0,3605
11	1,7747	1,7028	9,3656	0,5634	0,5872	0,3267
12	1,9318	1,8660	11,1961	0,5176	0,5358	0 2988
15	2,4048	2,3523	17,6423	0,4158	0,4251	0,2380
18	2,8793	2,8356	25,5207	0,3472	0,3526	0,1979
20	3,1962	3,1568	31,5687	0,3128	0,3167	0,1779

Ὁ πίναξ οὗτος δίδει αον τὰς τιμὰς τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τῆς ἐπιφανείας κανονικοῦ πολυγώνου, τῆς πλευρᾶς θεωρουμένης ὡς μονάδος, καὶ βον τὴν τιμὴν τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ τινος πολυγώνου λαμβανομένης ὡς μονάδος τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου, τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἢ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγώνου.

Χρῆσις. Κατασκευάσαι δεξαμενὴν 36, 75 κ. μ. χωρητικότητος 3,00 μ. βάθους, καὶ βάσεως κανονικοῦ ὀκταγώνου. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως ἔσεται $\frac{36,75}{3}=12,25$ τετρ. μ.

Ἐκ τοῦ πίνακος 2ου πλευρὰ ὀκταγώνου ἐμβαδοῦ 1, ἐστὶ 0,4550 ὅθεν $\alpha^2:0.4550^2::12,25:1$ ἐξ ἧς $\alpha=0,4550\sqrt{12,25}=1,592$. μ.

Ἐκ τοῦ πίνακος 1ον ἀκτὶς περιγεγραμμένου κύκλου πλευρᾶς 1 ἐστὶ 1,3065· ὅθεν $P:1,3065::1,592:1$, ἐξ ἧς $P=1,3065\times1,592=2,81$ μ.

Ὥστε χαρασσομένης περιφερείας ἀκτῖνος 2, 81, καὶ μεταφερομένης ἐπ' αὐτῆς ὀκτάκις τῆς χορδῆς 1, 592, εὑρίσκεται ἡ κανο-

νικὴ ὀκτάγωνος βάσις τῆς προκειμένης νὰ κατασκευασθῇ δεξαμενῆς.

145. Ὑπάρχοντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ τινος πολυγώνου εἰς περιφέρειαν, πρὸς ἐγγραφὴν πολυγώνου διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν, ἀρκεῖ νὰ ἑνωθῶσιν αἱ κορυφαὶ τούτου μὲ τὰ μέσα τῶν ὑποτεινόντων τὰς πλευρὰς αὐτοῦ τόξων.

Διὰ τῆς ἑνώσεως ἀνὰ δύο τῶν κορυφῶν κανονικοῦ ἐγγεγραμένου πολυγώνου ἀρτίου ἀριθμοῦ πλευρῶν, ἐγγράφεται κανονικὸν πολύγωνον, ἡμίσεως ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Ἐφαπτόμεναι ἀγόμεναι ἐκ τοῦ μέσου τῶν τόξων μεταξὺ τῶν πλευρῶν περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, σχηματίζουσι μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένον πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ὁμοίως δέ, ἐὰν περιγεγραμμένου τινὸς πολυγώνου ἀρτίου ἀριθμοῦ πλευρῶν παραληφθῶσιν αἱ ἐναλλὰξ πλευραί, καὶ ἑνωθῶσιν αἱ ἐναπομένουσαι, σχηματίζεται περιγεγραμμένον πολύγωνον ἡμίσεως ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Ἡ περιφέρεια ἐστὶ μεγαλειτέρα παντὸς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν πολυγώνου, καὶ μικροτέρα παντὸς εἰς ταύτην περιγεγραμμένου τοιούτου. Ἡ περιφέρεια ὅθεν εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν πολυγώνων, καθ' ὅσον δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει, ἤτοι αἱ πλευραὶ σμικρύνονται, κατὰ τοσοῦτον ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἐστὶ μικροτέρα, καὶ ὁ κύκλος τείνει νὰ ταυτισθῇ μὲ αὐτά. Ὅθεν τῇ ὑποθέσει τῆς ἐπ' ἄπειρον αὐξήσεως τῶν πλευρῶν κατὰ τὸν ἀριθμὸν ἀμφοτέρων τῶν πολυγώνων, ὁπόταν αἱ πλευραὶ θὰ ἀποβῶσιν ἐλάχισται, τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα, ἤτοι τὸ περιγεγραμμένον καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον, θὰ ταυτισθῶσι μετὰ τῆς περιφερείας.

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου τινὸς ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (142), ἕπεται ὅτι καὶ τοῦ ἀπείρου ἀριθμοῦ πλευρῶν πολύγωνον, ἤτοι τοῦ κύκλου τὸ ἐμβαδόν, ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τούτου.

146. Ἐπειδὴ πάντες οἱ κύκλοι εἰσὶν ὅμοιοι, ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἐστὶ σταθερός. Οἱ μαθηματικοὶ παριστάνουσι τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον διὰ τοῦ γράμματος π, ὥστε ἂν ἡ περιφέρεια ἐστὶ Π καὶ ἡ διάμετρος Δ, ὁ λόγος ἔσεται

$$\frac{\Pi}{\Delta}=\pi.$$

Ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τῇ ἀρχαιότητι ὑπελόγισεν ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἐστὶν $\frac{22}{7}$, ὥστε $\pi=\frac{\Pi}{\Delta}=\frac{22}{7}=$ 3,14159.

Ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς Μέτιος εὗρε τὸν λόγον τοῦτον $\frac{356}{113}$, κατόπιν δὲ ὁ ἐπίσης Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς Στέλλιος ὑπελόγισε τὸν λόγον τοῦτον μέχρι τοῦ δωδεκάτου δεκαδικοῦ ψηφίου.

Ὁ λόγος ὅθεν τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ἐστὶ κλάσμα τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπείρου ἀριθμοῦ ψηφίων (51)· συνήθως ὅμως εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς γίνεται χρῆσις τριῶν ἢ καὶ δύο τούτων. Ὅθεν $\pi = 3,141$ ἢ καὶ $\pi = 3,14$.

Ἐπειδὴ ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς γίνεται μεγάλη χρῆσις τῶν δυνάμεων καὶ ῥιζῶν τοῦ π, ἐγένετο ἅπαξ ὁ ὑπολογισμὸς καὶ ἐσχηματίσθη πίναξ τῶν διαφόρων τούτων ποσοτήτων, αἵτινες εἰσὶν αἱ μᾶλλον συνήθεις, ἤτοι τὰ διάφορα πολλαπλάσια τῶν δυνάμεων καὶ ῥιζῶν τοῦ π.

Ὁ πίναξ οὗτος ἐστὶν ὁ ἑπόμενος·

	Π		$Π^2$		$Π^3$		$\sqrt{Π}$
1	3,1415727	1	9,8696044	1	31,0062767	1	1,7724539
2	6,2831853	2	19,7392988	2	62,0125534	2	3,5449077
3	9,4247780	3	29,6088132	3	93,0188300	3	5,3173616
4	12,5663706	4	39,4784176	4	124,0251067	4	7,0898154
5	15,7079633	5	49,3480220	5	155,0313834	5	8,8622693
6	18,8495559	6	59,2176264	6	186,8376601	6	10,6347231
7	21,9911486	7	69,0872308	7	217,0439368	7	12,4071770
8	25,1327412	8	78,9568352	8	248,0502134	8	14,1766308
9	28,2743339	9	78,8264396	9	279,0564901	9	15,9520847

	$\frac{1}{Π}$		$\frac{1}{Π^2}$		$\frac{1}{Π^3}$		$\sqrt{\frac{1}{Π}}$
1	0,3183099	1	0,1013210	1	0,0322515	1	0,5641896
2	0,6366198	2	0,2026420	2	0,0645030	2	1,1283792
3	0,9549297	3	0,3039631	3	0,0967545	3	1,5925688
4	1,2732395	4	0,4052841	4	0,1290060	4	1,2567583
5	1,5915494	5	0,5066051	5	0,1612575	5	2,8209479
6	1,9098593	6	0,6079261	6	0,1935090	6	3,3851375
7	2,2281692	7	0,7092471	7	0,2257605	7	3,9493271
8	2,5464791	8	0,8105682	8	0,2580120	8	4,5135167
9	9,8647890	9	0,9117892	9	0,2902635	9	5,0777063

147. Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον

$$\pi = \frac{\Pi}{\Delta}$$

δίδει $\pi\Delta = \Pi$ ἤτοι $\Pi = 2\pi P$,
τουτέστι ἡ περιφέρεια κύκλου τινος ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ $\pi = 3,14$ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ἡ περιφέρεια ὅθεν κύκλου ἀκτῖνος 5.00 μ ἐστὶ

$$\Pi = 2 \times 3,14 \times 5,00 = 31,40.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου (146) ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειάν του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος του, ἕπεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε κύκλου τινος, ἰσοῦται μὲ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος Ρ, ἤτοι $E = \Pi \times \frac{1}{2}P = 2\pi P \times \frac{1}{2}P = \pi P^2$.

Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 5,μ 00 ἔσεται

$$E = \pi P^2 = 3,14 \times 25,00^{\mu} = 78,50^{\text{τετρ. μ.}}$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ π, ὅστις ἐστὶ δεκαδικὸς ἀπείρου ἀριθμοῦ ψηφίων, ἕπεται ὅτι καθόσον λαμβάνονται πλείονα δεκαδικὰ ψηφία, κατὰ τοσοῦτον τὸ ἐμβαδὸν πλησιάζει τὴν μαθηματικὴν ἀκρίβειαν, οὐδέποτε ὅμως φθάνει ταύτην. Ἡ εὕρεσις αὕτη τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, ἤτοι ὁ τετραγωνισμὸς αὐτοῦ, μεγάλως ἀπησχόλησε τοὺς ἀρχαιοτέρους καὶ νεωτέρους μαθηματικοὺς οἵτινες πάντες ἔφθασαν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ὅτι δυνατὸν ἀπείρως νὰ προσεγγιθῇ, οὐδέποτε ὅμως νὰ φθάσῃ τὴν μαθηματικὴν ἀκρίβειαν.

148. Τὸ μῆκος τόξου τινὸς περιφερείας T^0, ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου τῆς ἰδίας ἀκτῖνος πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν λόγον τῶν περιεχομένων εἰς τὸ τόξον μοιρῶν, πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων εἰς τὴν ὅλην περιφέρειαν τοιούτων, ὅθεν

$$\text{μῆκος τόξου } T = 2\pi P \frac{T^0}{360^0}.$$

Ἐὰν λοιπὸν τόξον $T = 25^0\ 8'$ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ἐστὶ 1,30μ·, εὑρίσκεται πρῶτον ἡ περιφέρεια κύκλου ἀκτῖνος 1,30, ἥτις ἐστὶν $2\ \pi\rho = 2 \times 1,30 \times 3,14 = 8,168^{\mu}$· ἐπομένως τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῶν 25°8′ ἔσεται

$$T = 8,168 \times \frac{25^0 \times 60' + 8'}{360^0 \times 60'} = 0,57^{\mu}$$

Διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τούτου ὑπελογίσθησαν τὰ μήκη τῆς αναπτύξεως τῶν διαφόρων τόξων, τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ὑποτεθείσης ἴσης τῇ μονάδι.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ μήκους τόξου τινὸς, πολλαπλασιάζονται τὰ διὰ τοῦ πίνακος διδόμενα μήκη ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ τόξου οὗ τινος πρόκειται εὑρεῖν τὴν ἀνάπτυξιν.

Τόξον	Μῆκος	Τόξον	Μῆκος
1°	0,01745329251994329577	1''	0,00000484813681109536
1'	0,00029[illegible]88820866572160	1'''	0,00000008080228018492

Τόξα	Μήκη	Τόξα	Μήκη	Τόξα	Μήκη	Τόξα	Μήκη
1°	0,0174533	36°	0,6283185	71°	1,2391838	1'	0,00029[illegible]9
2	0,0349966	37	0,6457718	72	1,2566371	2	0,0005018
3	0,0523599	38	0,6632251	73	1,2740904	3	0,0008727
4	0,0698132	39	0,6806784	74	1,2915436	4	0,0011636
5	0,0872665	40	0,6981317	75	1,3089969	5	0,0014544
6	0,1047198	41	0,7155850	76	1,3864502	6	0,0017453
7	0,1221730	42	0,7330383	77	1,3439035	7	0,0020362
8	0,1396263	43	0,7504916	78	1,3613568	8	0,0023271
9	0,1570796	44	0,7679449	79	1,3788101	9	0,0026180
10	0,1745329	45	0,7853982	80	1,3962634	10	0,0029089
11	0,1919862	46	0,8028515	81	1,4137167	20	0,0058178
12	0,2094395	47	0,8203047	82	1,4311700	30	0,0087266
13	0,2268928	48	0,8374580	83	1,4486233	40	0,0116355
14	0,2443461	49	0,8552113	84	1,4660766	50	0,0145444
15	0,2617994	50	0,8726646	85	1,4835299		
16	0,2792527	51	0,8901179	86	1,5009832	1''	0,0000048
17	0,2967060	52	0,9075712	87	1,5184364	2	0,0000097
18	0,3141593	53	0,9250245	88	1,5358897	3	0,0000145
19	0,3316126	54	0,9424778	89	1,5533430	4	0,0000194
20	0,3490659	55	0,9599311	90	1,5707993	5	0,0000242
21	0,3665191	56	0,9773844	91	1,5882496	6	0,0000291
22	0,3839724	57	0,9948377	92	1,6057029	7	0,0000339
23	0,4014257	58	1,0122910	93	1,6231562	8	0,0000388
24	0,4188790	59	1,0297443	94	1,6405095	9	0,0000436
25	0,4363323	60	1,0471976	95	1,6580628	10	0,0000485
26	0,4537856	61	1,0646508	96	1,6755161	20	0,0000970
27	0,4712389	62	1,0821041	97	1,6929694	30	0,0001454
28	0,4886922	63	1,0995574	98	1,7104227	40	0,0001939
29	0,5601455	64	1,1170107	99	1,7278760	50	0,0002424
30	0,52[illegible]5988	65	1,1344640	100	1,7453293		
31	0,5410521	66	1,1519173	200	3,4906585		
32	0,5585054	67	1,1693706	300	5,2359878		
33	0,5759587	68	1,1868239				
34	0,5934119	69	1,2042772				
35	0,6108652	70	1,2217305				

Χρῆσις. Εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῶν 126° 45′ 9″ οὗτινος ἡ ἀκτὶς ἐστὶ 10, 40μ.

Ἐκ τοῦ πίνακος λαμβάνονται τὰ μήκη τῶν διαφόρων τόξων τῶν μοιρῶν ἅτινα ἀπαρτίζουσι τοῦτο, ὡς ἑξῆς·

Διὰ τὸ τόξον τῶν 100° ὁ πίναξ δίδει	1,7453293
» » » » 26° » » »	0,4537856
» » » » 40′ » » »	0,0116355
» » » » 5′ » » »	0,0014544
» » » » 9″ » » »	0,0000436
Ἄθροισις διὰ τὸ τόξον τῶν 126° 45′ 9″...	2,2122484

ὥστε τὸ μῆκος τοῦ ζητουμένου τόξου ἀκτῖνος 10,45 εἰς μέτρα ἐςὶ

$$10,40 \times 2,2122484 = 23,007^{\mu}.$$

149. Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τινος τομέως, ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς ἀναπτύξεως τοῦ ὑποτείνοντος αὐτὸν τόξου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, διότι ὁ τομεὺς ἐστὶ τμῆμα τοῦ ὅλου κύκλου· ἄλλως τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τινος τομέως, ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὅλου κύκλου τῆς ἰδίας ἀκτῖνος πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸν λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μοιρῶν τοῦ τομέως πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ ὅλου κύκλου.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅθεν τομέως ἀκτῖνος 1,30μ καὶ τόξου 25° 8′, οὗ τινος τὸ μῆκος κατὰ τὸ (149) ἐστὶ 0,57, ἔσται

$$E = 0,57 \times \frac{1,30}{2} = 0,371. \text{ τετρ. μ.}$$

ἢ τοῦ ἐμβαδοῦ κύκλου ἀκτῖνος 1.30 ὄντος 5,309 (160) τὸ τοῦ τομέως ἔσται

$$E = 5,309 \frac{25 \times 60' + 8'}{360 \times 60'} = 0,371 \text{ τετρ. μ.}$$

150. Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τινος τμήματος ΑΔΒ (Σχ. 55), ἐστὶν ἡ διαφορὰ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΔΒΟ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΟ.

Ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς καὶ κυρίως εἰς τοὺς θόλους, ὑπάρχει γνωστὸν τὸ ἄνοιγμα ἢ ἡ χορδὴ ΑΒ, καθὼς καὶ τὸ βέλος ΔΕ, εὑρίσκεδὲ δι' αὐτῶν ἡ ἀνάπτυξις τοῦ τόξου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος. Ταῦτα ὑπολογισθέντα, τοῦ βέλους ΔΕ ληφθέντος ὡς μονάδος, κατεστρώθησαν εἰς πίνακα πρὸς εὐκολίαν τῶν ὑπολογισμῶν.

Ὁ πίναξ οὗτος ἐστὶν ὁ ἑπόμενος·

ΠΙΝΑΞ

τοῦ μήκους τῶν τόξων καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τμημάτων, τοῦ μήκους τοῦ βέλους θεωρουμένου ὡς μονάδος.

Χορδαὶ	Τόξα	Τμήματα	Χορδαὶ	Τόξα	Τμήματα	Χορδαὶ	Τόξα	Τμήματα
2,00	3,141	1,5708	4,80	5,337	3,3085	8 50	8,810	5,7289
2,01	3,146	1,5764	4,90	5,427	3,3730	8,60	8,903	5,7947
2,02	3,152	1,5821	5,00	5,517	3,4377	8,70	9,003	5,8606
2,03	3,158	1,5879	5,10	5,608	3,5024	8,80	9,100	5,9266
2,04	3,164	1,5936	5,20	5,698	3,5672	8,90	9,196	5,9927
2,05	3,170	1,5993	5,30	5,789	3,6320	9,00	9,293	6,0587
2,06	3,176	1,6051	5,40	5,881	3,6969	9,10	9,390	6,1248
2,07	3,182	1,6108	5,50	5,973	3,7618	9,20	9,487	6,1909
2,08	3,187	1,6166	5,60	5,065	3,8269	9,30	9,584	6,2570
2,09	3,193	1,6224	5,70	5,157	3,8919	9,40	9,681	6,3230
2,10	3,199	1,6282	5,80	6,249	3,9571	9,50	9,778	6,3890
2,20	3,261	1,6863	5,90	6,342	4,0222	9,60	8,875	6,4551
2,30	3,324	1,7449	6,00	6,435	4,0874	9,70	9,972	6,5212
2,40	3,390	1,8041	6,10	6,528	4,1527	9,80	10,069	6,5873
2,50	3,458	1,8637	6,20	6,621	4,2182	9,90	10,167	6,6533
2,60	3,527	1,9238	6,30	6,715	4,2835	10,00	10,264	6,7194
2,70	3,599	1,9843	6,40	6,809	4,3489	10,10	10,362	6,7854
2,80	3,672	2,0452	6,50	6,903	4,4142	10,20	10,459	6,8515
2.90	3,746	2,1064	6,60	6,997	4,4797	10,30	10,557	6,9176
3,00	3,822	2,1679	6,70	7,091	4,5452	10,40	10,654	6,9837
3,10	3,899	2,2297	6,80	7,185	4,6107	10,50	10,752	7,0498
3,20	3,977	2,2917	6,90	7,280	4,6763	10,60	10,849	7,1160
3,30	4,056	2,3540	7,00	7,375	4,7420	10,70	10,947	7,1822
3,40	4,137	2,4165	7,10	7,470	4,8076	10,80	10,045	7,2484
3,50	4,218	2,4793	7,20	7,565	4,8732	10,90	11,143	7,3146
3,60	4,300	2,5422	7,30	7,660	4,9389	11,00	11,240	7,3809
3,70	4,383	2,6053	7,40	7,755	5,0047	11,10	11,338	7,4471
3,80	4,467	2,6686	7,50	7,850	5,0705	11,20	11,436	7,5133
3,90	4,551	2,7320	7,60	7,946	5,1363	11,30	11,534	7,5795
4,00	4,636	2,7956	7,70	8,042	5,2020	11,40	11,632	7,6457
4.10	4,722	2,8593	7,80	8,137	5,2678	11,50	11,730	7,7119
4,20	4,808	2,9231	7,90	8,233	5,3336	11,60	11,828	7,7781
4,30	4,895	2,9871	8,00	8,329	5,3994	11.70	11,926	7,8454
4,40	4,983	2,0512	8,10	8,425	5,4653	11,80	12,024	7,9117
4,50	5,071	3,1154	8,20	8,521	5,5312	11,90	12,122	7,9770
4,60	5,159	3,1796	8,30	8,617	5,5971	12,00	12,220	8,0433
4,70	5,248	3,2440	8,40	8,714	5,6630			

Χρῆσις. Τοῦ βέλους θόλου κυκλικοῦ τόξου ὄντος 2,60 καὶ τοῦ ἀνοίγματος ἢ τῆς χορδῆς 20,00μ, εὑρεῖν τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ τόξου, καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταξὺ τούτου καὶ τῆς χορδῆς τμήματος.

Λαμβανομένου τοῦ βέλους ὡς μονάδος, ἡ χορδὴ ἐστὶ $\frac{20,00}{2,60}$ = 7,692. Ὁ πίναξ δίδει διὰ βέλος 7,70, χορδὴν μὲν 8,042 καὶ ἐμ-

βαδὸν τμήματος 5,2020 τετρ. μ. ὥστε τῇ ἀναγωγῇ τῶν ἐκφράσεων τούτων εἰς τ' ἀρχικὸν μέτρον, εὑρίσκεται μῆκος τόξου 8,042 $\times$2,60=20,μ 909 καὶ ἐπιφάνεια τμήματος 5,202 $(2,60)^2=$ 35,1655 τετρ. μ.

Τὰ οὕτω λαμβανόμενα ἀποτελέσματα εἰσὶν ἀρκούντως ἀκριβῆ ὥστε νὰ γίνηται χρῆσις αὐτῶν ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς.

151. Ἐὰν ἐπὶ δύο καθέτων μεταξύ των εὐθειῶν, ληφθῇ (Σχ. 56) ΑΟ=ΟΒ καὶ ΟΓ=ΟΔ, ἄνισοι αἱ μὲν μὲ τὰς δέ, καὶ ληφθῶσι δύο σημεῖα πλησίον τοῦ Ο ὁρισθησόμενα κατόπιν, ἅπαντα τὰ σημεῖα ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ δύο ταῦτα σημεῖα εε', ἤτοι εΓ'+ε'Γ, ε'Γ''''+εΓ', εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ εΓ+ε'Γ, ἑνούμενα συνεχῶς Γ' Γ'' Γ''' Γ'''' σχηματίζουσι καμπύλην ἥτις καλεῖται *ἔλλειψις*.

Ἐν τῇ ἐλλείψει ταύτῃ ΑΒ καὶ ΓΔ καλοῦνται *ἄξονες* τῆς ἐλλείψεως, καὶ ΑΒ μὲν μέγας ἄξων, ΓΔ δὲ μικρὸς ἄξων. Τὸ σημεῖον Ο καλεῖται κέντρον τῆς ἐλλείψεως, τὰ δὲ σημεῖα ε καὶ ε', ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀγομένων δύο ἀκτίνων πρὸς σημεῖόν τι Γ' τῆς ἐλλείψεως, τὸ ἄθροισμα τούτων ἐστὶ σταθερόν, καλοῦνται *ἑστίαι* τῆς ἐλλείψεως.

Ἡ ἑνοῦσα δύο σημεῖα τῆς ἐλλείψεως εὐθεῖα καλεῖται *χορδή*, ἡ δὲ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου *διάμετρος* αὐτῆς.

Τὰ ἄκρα τῶν ἀξόνων ΑΒΓΔ καλοῦνται κορυφαὶ τῆς ἐλλείψεως.

Αἱ ἑστίαι ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Β ἤτοι ΑΕ =ΒΕ', καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο, ἤτοι ΟΕ=ΟΕ'.

Αἱ ἀκτῖνες ΕΓ καὶ Ε'Γ ἰσοῦνται μὲ τὸν μέγαν ἡμιάξονα, τὸ δ' ἄθροισμα αὐτῶν μὲ τὸν μέγαν ἄξονα.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεώς τινος, ἐκ κέντρου Γ καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῷ μεγάλῳ ἡμιάξονι γράφεται τόξον ὅπερ τέμνει τὸν μέγαν ἄξονα εἰς τὰς ἑστίας Ε καὶ Ε'.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΕΟΓ καὶ Ε'ΟΓ συνάγεται ὅτι $\overline{ΕΟ}^2=\overline{ΕΓ}^2-\overline{ΓΟ}^2=\overline{ΑΟ}^2-\overline{ΓΟ}^2$ ἐξ ἧς $ΕΟ=\sqrt{\overline{ΑΟ}^2-\overline{ΓΟ}^2}$, τουτέστιν ἡ ἀπόστασις τῆς ἑστίας ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἡμιαξόνων, καὶ ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἑστιῶν ἀπόστασις ΕΕ', *ἐκκεντρικότης* καλουμένη, ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τῆς ἐκφράσεως ταύτης.

Ἐκ τούτου εὐκόλως εὑρίσκονται αἱ ἑστίαι ἐλλείψεώς τινος, ὡς καὶ ἡ ἐκκεντρικότης αὐτῆς.

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλλείψεως προκύπτει ἡ εὔκολος αὐτῆς διαχάραξις. Ἄγονται δηλ. πρῶτον δύο κάθετοι μεταξύ των, εὑρίσκονται ὡς ἐῤῥέθη αἱ ἑστίαι, καὶ κατόπιν διὰ νήματος ἴσου μὲ τὸν μέγαν ἄξονα, οὗ τὰ ἄκρα στηρίζονται ἐπὶ τῶν ἑστιῶν διὰ βελονῶν, διευθύνεται ἡ χαράττουσα βελόνη ἢ μολυβδοκόνδυλον ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἥτις χαράσσεται διὰ τῶν διαφόρων θέσεων τοῦ ἐντεταμμένου νήματος, καὶ οὕτω χαράσσεται ἀκριβὴς ἔλλειψις.

Ἕτερος ἐπίσης τρόπος χαράξεως τῆς ἐλλείψεως ἐστὶν ὁ ἑξῆς·

Ἐπὶ τῶν δύο ἀξόνων ὡς διαμέτρων διαγράφονται δύο κύκλοι, ἄγεται ἀκτίς τις ΟΔ, ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Δ′ ἄγονται παράλληλοι τῶν δύο ἀξόνων, καὶ τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τούτων Μ, ἐστὶ σημεῖον τῆς ζητουμένης ἐλλείψεως. Δι' ἐπανειλημμένων τοιούτων κατασκευῶν προσδιορίζονται πλεῖστα σημεῖα δι' ὧν διαγράφεται ἡ ἔλλειψις (Σχ. 57).

Ἑτέρα διαχάραξις ἐστὶν ἡ ἑξῆς (Σχ. 58). ΑΒ ὄντος τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς ἐλλείψεως καὶ ΕΕ′ τῶν ἑστιῶν αὐτῆς, ἐκ τῶν ἑστιῶν τούτων ὡς κέντρων, καὶ ἀκτῖνα ἐκ μὲν τῆς Ε ἴσην· μὲ ΑΜ, Μ ὄντος σημείου τινὸς μεταξὺ τῶν ἑστιῶν, ἐκ δὲ τοῦ Ε′ μὲ ἀκτῖνα ΜΒ, ἐπίσης ἐκ τοῦ Ε′ μὲ ἀκτῖνα ΑΜ καὶ τοῦ Ε μὲ ἀκτῖνα ΒΜ, διαγράφονται τόξα τεμνόμενα εἰς τὰ τέσσαρα σημεῖα αβγδ, ἅτινα εἰσὶ φανερῶς σημεῖα τῆς ζητουμένης ἐλλείψεως.

Ἐκ τῶν αὐτῶν σημείων ὡς κέντρων καὶ ἀκτῖνας ἑτέρας ΑΜ′, Μ′Β, εὑρίσκονται ἕτερα τέσσαρα σημεῖα, καὶ τοιουτοτρόπως ὁριζομένων πλειόνων σημείων τῆς ἐλλείψεως διαγράφεται αὕτη διὰ τῆς ἑνώσεως αὐτῶν.

Ἡ ἔλλειψις δύναται νὰ χαραχθῇ καὶ διὰ μόνου τοῦ κανόνος.

Πρὸς τοῦτο ληφθήτωσαν ἐπὶ τούτου τρία σημεῖα Γ, Ε, Ζ, (Σχ. 59), τοιαῦτα ὥστε ΓΖ=ΟΑ, ἤτοι τὸν μέγαν ἡμιάξονα, καὶ ΕΖ=ΟΒ τὸν μικρὸν ἡμιάξονα, ὥστε ΓΕ=ΟΑ—ΟΒ τὴν διαφορὰν τῶν ἡμιαξόνων. Ἐὰν ὁ κανὼν κινηθῇ οὕτως ὥστε τὸ σημεῖον Ε νὰ μένῃ διαρκῶς ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἄξονος, καὶ τὸ Γ ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος, τὸ σημεῖον Ζ θέλει διαγράφει τὴν ζητουμένην ἔλλειψιν.

Οὕτω λαμβάνονται πλεῖστα σημεῖα ἅτινα ἑνούμενα ἀπαρτίζουσι τὴν ἔλλειψιν, ἧς ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ εἰσὶν οἱ ἄξονες.

Δύναται ἐπίσης νὰ δοθῇ εἰς τὸν κανόνα ἀρχικῶς ἡ θέσις Γ′ Ε′ Ζ′, ἀρκεῖ μόνον Γ′Ζ′=ΟΒ καὶ Γ′Ε′=ΑΟ, κινουμένου δὲ οὕτως ὥστε τὰ σημεῖα Ε′ καὶ Γ′ νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῶν δύο ἀξόνων, τὸ Ζ′ διαγράφει τὴν ζητουμένην ἔλλειψιν.

Τὰ κατώτερα στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας δὲν παρέχουσι τὴν ἀκριβῆ καταμέτρησιν τῆς ἀναπτύξεως τῆς περιφερείας τῆς ἐλλείψεως· πρὸς εὕρεσιν ὅθεν ταύτης, ἐν ἀνάγκῃ, δέον νὰ γείνῃ χρῆσις νήματος, δι' οὗ νὰ μετρηθῇ μεθ' ὅσης τὸ δυνατὸν προσοχῆς ἡ καμπύλη, ἡ ἔντασις τοῦ ὁποίου δίδει τὴν ἀνάπτυξιν.

Ἄλλως ἡ ἐλλειπτικὴ καμπύλη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συγκειμένη ἐξ ἀριθμοῦ τινος μικρῶν εὐθειῶν, αἵτινες μετρούμεναι διὰ τοῦ διαβήτου καὶ μεταφερόμεναι ἐπὶ εὐθείας τινός, δίδουσι τὴν ἀνάπτυξιν αὐτῆς μετὰ τοσοῦτον μεγαλειτέρας ἀκριβείας, ὅσον αἱ θεωρηθεῖσαι ὡς εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰσὶ μικρότεραι.

Τὸ ἐμβαδὸν ἐλλείψεώς τινος ἧς οἱ ἄξονες εἰσὶν α καὶ β, ἀποδεικνύεται διὰ μαθηματικῶν ὑπολογισμῶν ὅτι ἐστὶν $Ε=παβ$, ἤτοι μὲ τὸν γνωστὸν σταθερὸν π (147) ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἡμιαξόνων. Ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β ἐστὶ φέρ' εἰπεῖν ρ (79), ὥστε $ρ^2=αβ$· ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως ἐστὶ συνεκθέσει ταύτης $Ε=παβ=πρ^2$.

Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν ἐλλείψεώς τινος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, οὗ ἡ ἀκτίς ἐστι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο ἡμιαξόνων τῆς ἐλλείψεως.

Τμῆμα ἐλλείψεως καλεῖται ὁ περατούμενος ἐντὸς δύο παραλλήλων ἑνὸς τῶν ἀξόνων χῶρος.

Διὰ μαθηματικοῦ ὑπολογισμοῦ ἀπεδείχθη ἐπίσης ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐλλειπτικοῦ τμήματος σχηματιζομένου ἐκ παραλλήλων τοῦ μικροῦ ἄξονος ΑΒΓΔ (Σχ. 60), ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν Ε′ τοῦ ἀνταποκρινομένου εἰς τὰς αὐτὰς παραλλήλους κυκλικοῦ τμήματος Α′Β′Γ′Δ′ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα τὸν μεγάλον ἡμιάξονα α, ἐπὶ τὸν λόγον τοῦ μικροῦ ἄξονος πρὸς μεγάλον $\frac{β}{α}$ ἤτοι

$$\text{Ἐμβαδὸν ΑΒΓΔ}=Ε'\times\frac{β}{α}.$$

Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τμήματος σχηματιζομένου ἐκ παραλλήλων τοῦ μεγάλου ἄξονος ΕΖΗΘ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν Ε′ τοῦ ἀνταποκρινομένου εἰς τὰς παραλλήλους ταύτας κυκλικοῦ τμήματος Ε′Ζ′Η′Θ′ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα τὸν μικρὸν ἡμιάξονα, ἐπὶ τὸν λόγον τοῦ μεγάλου ἡμιάξονος πρὸς τὸν μικρὸν $\frac{\alpha}{\beta}$ ἤτοι

$$\text{Ἐμβαδὸν ΕΖΗΘ} = \text{Ε}' \times \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἡ ἐλλειπτικὴ γραμμὴ εἶναι συνηθεστάτη εἰς τὴν καθημερινὴν χρῆσιν, ὡς εἰς τὴν διαχάραξιν τῶν θόλων κλ. Ἂν καὶ ἡ μελέτη αὐτῆς ἀνήκει κυρίως εἰς ὑψηλοτέραν σειρὰν μαθηματικῆς, μολοντοῦτο τὰ χρησιμότερα, ὡς ἡ διαχάραξις αὐτῆς, τὸ ἐμβαδὸν κλ., ἐκτεθέντα ἐνταῦθα ὅσον τὸ δυνατὸν ἐπὶ τὸ πρακτικώτερον, δύνανται νὰ ὦσι χρήσιμα εἰς τοὺς ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς ποιοῦντας χρῆσιν τῆς καμπύλης ταύτης, οἵτινες ἄλλως οὐδόλως ἔχουσι χρείαν τῆς μαθηματικῆς αὐτῆς ἀναπτύξεως, ἀντικείμενον οὔσης τῆς ἀστρονομίας.

Ἡ ἐλλειπτικὴ καμπύλη ἔχει πλείστας ὅσας ἐφαρμογὰς ἐν ταῖς τέχναις καὶ ἐπιστήμαις, δι' ὃ αἱ διάφοροι ἐκτεθεῖσαι μέθοδοι τῆς χαράξεως αὐτῆς, οὖσαι τοσοῦτον μᾶλλον ἀκριβεῖς ὅσον ἐκτελοῦνται μετὰ μείζονος προσοχῆς, δύνανται νὰ χρησιμεύσωσι κατὰ τὰς ἀνάγκας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ′.

Στερεά.—Μέτρον τῶν κανονικῶν ἐπιφανειῶν.—Μέτρον τῶν Στερεῶν. — Εἰδικὸν βάρος.

Στερεά.

152. Τρεῖς ἢ πλειότεραι εὐθεῖαι, μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ.....(Σχ. 61), σχηματίζουσι διὰ τῶν ἐπιπέδων ἅτινα δι' αὐτῶν διέρχονται ἀνὰ δύο ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ,....γωνίαν εἰς τὸ σημεῖον Α ἥτις καλεῖται *στερεὰ γωνία.*

Τὸ σημεῖον Α καλεῖται κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ,.αἵτινες εἰσὶν αἱ τομαὶ τῶν συνακολούθων ἐπιπέδων τῶν

σχηματιζόντων τὴν στερεὰν γωνίαν καλοῦνται *κόψεις*, τὰ δὲ ἐπίπεδα ΒΑΓ, ΓΑΔ... *ἕδραι*. Αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ.... καλοῦνται ἐπίπεδοι *γωνίαι*, καὶ αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ἐκ δύο συνακολούθων ἑδρῶν, ὡς ΒΑΓ καὶ ΓΑΒ, αἵτινες τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, καλοῦνται *δίεδροι γωνίαι*.

Ἡ στερεὰ γωνία καλεῖται τρίεδρος, τετράεδρος, πεντάεδρος καὶ ἐν γένει πολύεδρος ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν αἵτινες σχηματίζουσιν αὐτήν.

153. Στερεὸν περατούμενον πανταχόθεν ὑπὸ πολυγώνων καλεῖται πολύεδρον. Τὰ πολύγωνα ταῦτα καλοῦνται ἕδραι τοῦ πολυέδρου, αἱ δὲ εὐθεῖαι καθ' ἃς τέμνονται δύο συνακόλουθα πολύγωνα καλοῦνται κόψεις αὐτοῦ. Κορυφαὶ τοῦ πολυέδρου καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν αὐτοῦ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα ἑνοῦσα δύο κορυφὰς μὴ ἐν τῷ ἰδίῳ ἐπιπέδῳ κειμένας.

Τὸ πολύεδρον καλεῖται τετράεδρον, πεντάεδρον κλ. ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν του.

Πρίσμα καλεῖται πολύεδρον οὗτινος αἱ ἕδραι τέμνονται διαδοχικῶς κατὰ γραμμὰς παραλλήλους, καὶ αἵτινες λήγουσιν εἰς δύο ἐπίπεδα παράλληλα μεταξύ των ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' (Σχ. 62), ἅτινα καλοῦνται βάσεις τοῦ πρίσματος. Ὕψος τοῦ πρίσματος ἐστὶν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Αἱ ὄρθιαι κόψεις πρίσματος τινος ΑΑ', ΒΒ'... εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των, αἱ δ' ἕδραι αὐτοῦ παραλληλόγραμμα.

Τὸ πρίσμα καλεῖται ὄρθιον ἢ πλάγιον, καθ' ὅσον αἱ κόψεις αὐτοῦ εἰσὶν κάθετοι ἐπὶ τῶν βάσεων ἢ οὐ. Καλεῖται δὲ κανονικόν, ὅταν ἦναι ὄρθιον καὶ αἱ βάσεις κανονικὰ πολύγωνα.

Τὸ πρίσμα καλεῖται τριγωνικόν, τετραγωνικὸν κλ. καθ' ὅσον αἱ βάσεις αὐτοῦ εἰσὶ τρίγωνα, τετράγωνα κλ.

Πᾶσα τομὴ εἰς τὸ πρίσμα παράλληλος τῆς βάσεως, ἐστὶν ὅμοιον ταύτης πολύγωνον.

Πᾶσα τομὴ κάθετος εἰς τὰς κόψεις καλεῖται ὀρθία τομή.

Κορμὸς πρίσματος καλεῖται τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ περιεχόμενον μεταξὺ μιᾶς βάσεως, καὶ τῆς τομῆς δι' ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου ταύτης.

Παραλληλεπίπεδον καλεῖται τὸ πρίσμα τὸ ἔχον βάσεις παραλληλόγραμμα.

Παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον καλεῖται τὸ ἔχον βάσεις καὶ ἕδρας ὀρθογώνια.

Ἐὰν αἱ βάσεις εἰσὶ τετράγωνα, καὶ τὸ ὕψος ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως, τὸ παραλληλεπίπεδον καλεῖται *κύβος* (Σχ. 63).

154. *Πυραμὶς* καλεῖται πολύεδρον, οὗ τινος ἡ βάσις ἐστὶ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, αἱ δὲ ἕδραι οὖσαι τρίγωνα μὲ βάσεις τὰς τοῦ πολυγώνου πλευράς, συναντῶνται εἰς κοινόν τι σημεῖον Α *κορυφὴ* τῆς πυραμίδος καλούμενον (Σχ. 64).

Ἡ πυραμὶς καλεῖται τριγωνική, τετραγωνικὴ κλ. ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως. Κανονικὴ δὲ ὅταν ἡ βάσις ἐστὶ κανονικὸν πολύγωνον, καὶ αἱ πλάγιαι κόψεις ἴσαι μεταξύ των. Ὕψος τῆς πυραμίδος ἐστὶν ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς πρὸς τὴν βάσιν κάθετος.

Πᾶσα τομὴ παράλληλος τῆς βάσεως ἐστὶν ὅμοιον ταύτῃ πολύγωνον.

Κορμὸς πυραμίδος καλεῖται τὸ περιεχόμενον μέρος μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου οἱουδήποτε. Ὕψος τοῦ κορμοῦ ἐστὶ τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἀπόστημα.

155. Καλεῖται *κύλινδρος* τὸ παραγόμενον στερεὸν ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου τινος πέριξ μιᾶς τῶν πλευρῶν του ΑΟ μενούσης ἀκινήτου (Σχ. 65). Αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ διαγράφουσι κύκλους, ἡ δὲ ΓΔ παράλληλος τῆς ΑΒ ἥτις καλεῖται ἄξων τοῦ κυλίνδρου, διαγράφει κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἥτις καλεῖται *κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια*. Ἡ γραμμὴ ΓΔ καλεῖται γ ε ν ν ή τ ρ ι α τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

Πᾶσα τομὴ παράλληλος τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου ἐστὶ κύκλος, ἡ δὲ παράλληλος τῆς γεννητρίας ἢ τοῦ ἄξονος ἐστὶν ὀρθογώνιον.

156. Καλεῖται *κῶνος* τὸ παραγόμενον στερεὸν ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου τριγώνου πέριξ τῆς μιᾶς τῶν καθέτων ΑΒ μενούσης ἀκινήτου. Ἡ ΑΒ διαγράφει κύκλον ὅστις ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ κώνου, ἡ δ᾽ ὑποτείνουσα ΚΑ ἥτις καλεῖται *γεννήτρια* τοῦ κώνου, διαγράφει κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις καλεῖται *κωνικὴ ἐπιφάνεια*.

Πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον μὲν τῆς βάσεως τέμνει τὸν κῶνον κατὰ κύκλον οὗ τινος κέντρον ἐστὶν ἡ συνάντησις τοῦ ἄξονος, διερχόμενον δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τέμνει αὐτὸν κατὰ ὀρθογώνιον τρίγωνον (Σχ. 66).

Κορμὸς κώνου ἢ *κόλουρος* κῶνος καλεῖται τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως τμῆμα καὶ ἐπιπέδου τέμνοντος τὸ ἄνω μέρος. Τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ ἐστὶν ἡ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἀπόστασις.

157. Ἡ *Σφαῖρα* ἐστὶ στερεὸν οὗ τινος ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς αὐτῆς καλούμενον *κέντρον*.

Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ παραχθῇ διὰ τῆς περιστραφῆς τοῦ ἡμικυκλίου (Σχ. 67) ΑΓΒ πέριξ τῆς διαμέτρου ΑΒ μενούσης ἀκινήτου.

Πᾶσα εὐθεῖα ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ἀγομένη καλεῖται ἀκτὶς αὐτῆς. Πᾶσα εὐθεῖα ἧς τὰ ἄκρα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καλεῖται χορδὴ αὐτῆς. Πᾶσα δὲ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου χορδὴ καλεῖται διάμετρος αὐτῆς.

Ἡ τομὴ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ κύκλος, καὶ καλεῖται *μέγιστος κύκλος*. Πᾶσα δ' ἄλλη τομὴ δι' ἐπιπέδου, οὖσα ἐπίσης κύκλος, καλεῖται μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας.

Τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου καλοῦνται *πόλοι*.

Τὸ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τινος (Σχ. 67) μέρος ΑΓΒΔ'Α τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ΑΒ καλεῖται *ἄτρακτος*, τὸ δὲ ὅλον στερεὸν ΑΓΒΔ'ΑΟΒ *σφὴν* ἢ *ὄνυξ*. Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαίραν εἰς δύο ἴσα ἡμισφαίρια, πᾶς δ' ἕτερος τοιοῦτος σχηματιζόμενος διὰ τομῆς ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸν πρῶτον, διαιρεῖ τὴνσφαίραν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη ἢ σφῆνας, τὴν δ' ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς τέσσαρας ἴσους *ἀτράκτους*.

Καλεῖται σφαιρικὴ ζώνη ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχομένη ΔΓΕΖ (Σχ. 67), τὸ δὲ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων στερεὸν καλεῖται σφαιρικὸν τμῆμα.

158. Κανονικὴ στερεὰ γωνία καλεῖται ἐκείνη ἧς αἱ πέριξ δίεδροι γωνίαι εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των ὡς καὶ αἱ ἀποτελοῦσαι αὐτὴν ἐπίπεδοι.

Πολύεδρον καλεῖται κανονικὸν, ὁπόταν ἅπασαι αἱ στερεαὶ αὐτοῦ γωνίαι εἰσὶν ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ ἕδραι ἴσα κανονικὰ πολύγωνα.

Τὰ κανονικὰ πολύεδρα εἰσὶ πέντε, ἀπαρτίζονται δὲ ἐξ ἑδρῶν πολυγωνικῶν ὡς ἑξῆς·

Τετράεδρον οὗ αἱ ἕδραι εἰσὶν				4	ἰσόπλευρα τρίγωνα
ἑξάεδρον ἢ κύβος οὗ αἱ ἕδραι εἰσὶν				6	τετράγωνα
Ὀκτάεδρον	»	»	»	8	τρίγωνα
Δωδεκάεδρον	»	»	»	12	πεντάγωνα
Εἰκοσάεδρον	»	»	»	20	τρίγωνα.

Μέτρον τῶν κανονικῶν ἐπιφανειῶν.

159. Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κανονικοῦ πολυέδρου ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς τῶν ἴσων ἑδρῶν του (τριγώνου κλ.) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ὡς ἐξάγεται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν ἑδρῶν του. Ἐὰν ζητεῖται νὰ συμπεριληφθῶσι καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο βάσεων, προστίθεται εἰς τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον καὶ τὸ τῶν δύο βάσεων ἐμβαδόν.

Ἡ ἐπιφάνεια πάσης κανονικῆς πυραμίδος εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένης τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους μιᾶς τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν αὐτῆς. Τοῦτο ἐξάγεται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πέριξ τριγωνικῶν ἑδρῶν.

160. Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον τῆς κυκλικῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ ἐπιφάνεια ὅθεν κυλίνδρου τινος ἰσοῦται μὲ τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος βάσιν ἴσην μὲ τὴν τοῦ κυλίνδρου περίμετρον, καὶ ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω φέρ' εἰπεῖν ὅτι ζητεῖται ἡ ἐπιφάνεια κυλίνδρου ὕψους 2,00 καὶ ἀκτῖνος βάσεως 0,45. Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ἐστὶ (148) $2\pi\rho = 2\times3,14\times0,44 = 2,83$, ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἔσται

$$E = 2\pi\rho \times Y = 2,83 \times 2,00 = 5,66 \text{ τετρ. μ.}$$

Εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν τοίχων δεξαμενῆς ἧς ἡ περιφέρεια μετρηθεῖσα διὰ σχοινίου (ἂν ὄχι διὰ τῆς ἀκτῖνος) ἐστὶ 13,66 τὸ δὲ ὕψος 3,73. Ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια ἔσται

$$E = 13,66 \times 3,73 = 50,95.$$

Ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τμήματος κυλινδρικοῦ τμηθέντος δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ ἄξονος Α (Σχ. 65) ἰσοῦται μὲ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ κυκλικοῦ τόξου αβγ (149) ἐπὶ τὸ ὕψος 6δ.

161. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ἢ γεννητρίας του. Οὕτω ἡ ἐπιφάνεια κώνου τινος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἔχοντος βάσιν μὲν ἴσην μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

Ἐὰν ὅθεν κῶνός τις ἔχει πλευρὰν 1.50 καὶ ἀκτῖνα τῆς βάσεως 0,45, ἡ ἐπιφάνειά του ἔσται

$$E=2\pi\rho\times\frac{1.50}{2}=2\times3,14\times0,45\times0,75=2,12^{\text{τετρ. μ.}}$$

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κολούρου κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων περιφερειῶν τῶν βάσεων, ἐπὶ τὴν μεταξὺ αὐτῶν πλευράν. Ἐστὶν ὅθεν ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, οὗτινος αἱ δύο παράλληλοι βάσεις εἰσὶν αἱ ἀναπτύξεις τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων τοῦ κώνου, ὕψος δὲ αὐτοῦ ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου τούτου. Ἡ ἐπιφάνεια ἄλλως τοῦ κολούρου κώνου ἐστὶν ἴση τῇ διαφορᾷ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὅλου κώνου καὶ τοῦ ἀποκοπτομένου τοιούτου.

Ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια κολούρου τινος κώνου, οὗτινος ἡ ἀκτὶς τῆς μιᾶς βάσεως ἐστὶν 0,30 καὶ τῆς ἑτέρας 0,50 ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 1,25 ἐστὶν

$$E=\frac{2\pi\times0,30+2\pi\times050,}{2}\times1,25=3,13.^{\text{τετρ. μ.}}$$

162. Ἡ ἐπιφάνεια σφαιρικῆς τινος ζώνης (158) ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης ταύτης, ὥστε εἰς σφαίραν ἀκτῖνος Ρ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπεχόντων κατὰ τὴν ἀπόστασιν Υ ἐστὶν $E=2\pi P\times Y$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὅλη σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τμῆμα οὗ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας 2Ρ ἐστὶ τὸ ὕψος, ἕπεται ὅτι ὅλη ἡ σφαῖρα ἔχει ἐπιφάνειαν

$$E=2\pi P\times2P=4\pi P^2.$$

τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας τινος ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ γνωστοῦ $\pi=3,141$ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος, ἢ μὲ τὸ ἐμ-

ϐαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων τῆς ἰδίας σφαίρας, ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ ἐμϐαδὸν ἐστὶ πP^2.

Ἡ ἐπιφάνεια ὅθεν σφαίρας ἀκτῖνος 0,40 ἐστὶν

$$E = 4 \times 3,14 \times \overline{0,40}^2 = 2,01 \text{ τετρ. μ.}$$

163. *Προϐλήματα.* Ζητεῖται ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια ἀποθήκης τινος Α (Σχ. 68), ἵνα ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀμμοκονιάσεως τῶν τοίχων κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον. Μετρᾶται πρῶτον ἡ πλευρὰ α ἥτις ἐστὶν 9,00,μ. καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀποθήκη ἐστὶν ὀρθογώνιος, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ α=ά=9,00μ. Ἐπίσης καὶ ἡ ϐ=ϐ′=5,00,μ. ὥστε ἡ περίμετρος ἐστὶν 28,00, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ ὕψος τῶν τοίχων 4,00μ. δίδει τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἀποθήκης μέχρις ὕψους 4μ., ἤτοι $28,00 \times 4,00 = 112,00$ τετρ. μ. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ δύο μικρὰ μέτωπα ἔχουσιν ἀέτωμα, ἡ δ' ἐπιφάνεια ὑπελογίσθη μόνον μέχρις ὕψους 4,00μ. ἤτοι μέχρι τῆς γγ′, ἕπεται ὅτι εἰς τὸ ἄνω ἀποτέλεσμα δέον νὰ προστεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο τριγωνικῶν μετώπων ἵνα εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τῆς ἀποθήκης, ἥτις ἔσται

$$E = 112,00^{\text{τετρ. μ.}} + 2\frac{(5,00 \times 1)}{2} = 117,00.^{\text{τετρ. μ.}}$$

ϐ′. Ζητεῖται ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια ναοῦ τινος (Σχ. 69).

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρόϐλημα εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τῶν τοίχων τοῦ ναοῦ χωρὶς νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν τὸ ἱερὸν, ἐστὶ δὲ αὕτη 214,50μ. Ἐκ τούτου δέον ν' ἀφαιρεθῇ τὸ μέρος καθ' ὃ ἐπακουμϐᾷ τὸ ἱερὸν ἐπὶ τοῦ μετώπου ΑΔ. Ἔστι δὲ τοῦτο ὀρθογώνιον παραγόμενον ἐκ τῆς τομῆς κυλίνδρου δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, ἤτοι 4.00×4.00 καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἡμικύκλιον παραγόμενον ἐκ τῆς τομῆς τοῦ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἱεροῦ ἡμισφαιρίου διὰ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου τοῦ μετώπου, ἤτοι $\frac{\pi\rho^2}{2} = \frac{3,14 \times 4}{2} = 6,28$, ὥστε τὸ ἱερὸν ἀφαιρεῖ ἐκ τοῦ μετώπου $16 + 6,28 = 22,28$ τετρ. μ. μένουσιν ὅθεν $214,50 - 22,28 = 191,22$. Εἰς ταῦτα δέον νὰ προστεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἡμικυλίνδρου τοῦ ἱεροῦ ἥτις ἐστὶ $\frac{2\pi\rho}{2} \times 4,00$ ἔνθα $\rho =$ 2,00μ. ὥστε ἔσται αὕτη $3,14 \times 2,00 \times 4,00 = 25,52$. Ἡ ἐξωτερικὴ ὅθεν ἐπιφάνεια τῶν τοίχων τοῦ ναοῦ ἐστὶ $191,22 + 25,52 = 216,74$.

γ'. Ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια κλιβάνου (φούρνου) ἡμισφαιρικοῦ ἀκτῖνος 1,50$^{μ.}$

Ἡ ἐπιφάνεια της ὅλης σφαίρας ἐστὶ $4πρ^2$, ἑπομένως ἡ τοῦ κλιβάνου $2πρ^2=2\times2,14\times(1,50)^2=14,13^{τετρ.\ μ.}$

δ'. Ζητεῖται ἡ ἐπιφάνεια κολουροκωνικοῦ βωμοῦ οὗ ἡ ἀκτὶς τῆς ἄνω βάσεως $ρ=1,50$, τῆς κάτω $ρ'=4,00$, τῆς πλευρᾶς οὔσης $5,00^{μ.}$

Ἡ ἐπιφάνεια ἔσται (162)

$$\frac{2πρ+2πρ'}{2}\times5,00=\frac{9,42+25,12}{2}\times5.00=86,35^{τετ.\ μ.}$$

Μέτρον τῶν Στερεῶν.

164. Ὁ ὄγκος στερεοῦ τινος ἐμφαίνει ποσάκις ὁ ὡς μονὰς λαμβανόμενος ὄγκος ἐμπεριέχεται εἰς τὸ στερεὸν τοῦτο.

Ἐῤῥέθη (142) ὅτι τὸ γινόμενον δύο γραμμῶν παράγει ἐπιφάνειαν· τὸ γινόμενον ἤδη ἐπιφανείας ἐπὶ γραμμὴν παράγει ὄγκον ἢ στερεόν.

Ὡς μονὰς τῆς συγκρίσεως τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ κύβος (154) οὗ τινος πλευρὰ ἐστὶν ἡ μονάς. Τὸ μέτρον ὅθεν τοῦ κύβου τούτου ἐστὶν $1\times1\times1=1^3=1$. Καλεῖται δὲ κυβικὸν μέτρον ἢ κυβικὸς Βασ. πήχυς.

Οἱ ὄγκοι ὅθεν τῶν στερεῶν λαμβάνονται εἰς κυβικὰ μέτρα, κυβ. ὑποδεκάμετρα, κυβ. ὑφεκατόμετρα, κτλ.

165. Ἡ στερεότης ἢ ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου τινὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.

Τῆς ἐπιφανείας ὅθεν τῆς βάσεως παραλληλεπιπέδου τινὸς οὔσης $2,04\times2,00=4,08^{τετρ.\ μ.}$ τοῦ δὲ ὕψους του 7,60, ἡ στερεότης αὐτοῦ ἔσται $Σ=4,08\times7,60=31,008$ Κ. Μ.

Τουτέστι τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο περιέχει 31,008 φορὰς τὸ κυβ. μέτρον.

166. Ἡ στερεότης τοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν τὸ πρίσμα ἐστὶν ὄρθιον τὸ ὕψος ἰσοῦται μὲ τὰς ὀρθίας κόψεις του.

167. Ἡ πυραμὶς ἐστὶν ἴση μὲ τὸ ἓν τρίτον τοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Ἡ στερεότης ὅθεν τῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως

ἐπὶ τὸ ὕψος της. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως πυραμίδος τινος ἐστὶν 2,04 καὶ τὸ ὕψος 1,20, ἡ στερεότης αὐτῆς ἐστὶν

$$\Sigma = \frac{2,04 \times 1.20}{3} = 0,96^{\text{κυβ. μ.}}$$

Ἡ στερεότης κορμοῦ τινος πυραμίδος μὲ βάσεις παραλλήλους ἰσοῦται μὲ τρεῖς πυραμίδας ἐχούσας κοινὸν ὕψος τὸ τοῦ κορμοῦ Υ, καὶ βάσεις τὴν ἄνω α, τὴν κάτω β, καὶ μίαν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τούτων $\sqrt{\alpha\beta}$, ἤτοι

$$\Sigma = \tfrac{1}{3}\Upsilon \times \alpha + \tfrac{1}{3}\Upsilon \times \beta + \tfrac{1}{3}\Upsilon \times \sqrt{\alpha\beta} = \tfrac{1}{3}\Upsilon(\alpha + \beta + \sqrt{\alpha\beta}).$$

Ἐὰν ὅθεν τὸ ὕψος $\Upsilon = 2,50$ ἡ κάτω βάσις $\beta = 3,25^{\text{τετρ. μ.}}$ καὶ ἡ ἄνω $\alpha = 1,90,^{\text{τετρ. μ.}}$ ἡ στερεότης τοῦ κορμοῦ ἔσται

$$\Sigma = \tfrac{1}{3}2,50(3,25 + 1,90 + \sqrt{3,25 \times 1,90}) = 6,362^{\text{κυβικ. μ.}}$$

168. Ὁ κύλινδρος ἐστὶ πρίσμα κυκλικῆς βάσεως.

Ἡ στερεότης ὅθεν τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ πρίσματος, ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του. Ἐὰν ὅθεν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἐστὶ $P = 0,10$ καὶ τὸ ὕψος 4,25, ἡ στερεότης ἔσται $\pi\rho^2 \times 4,25$, ἤτοι

$$\Sigma = 3,14 \times (0,10)^2 \times 4,25 = 0,134^{\text{κυβικ. μ.}}$$

196. Ὁ κῶνος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πυραμὶς οὗ ἡ βάσις ἐστὶ κύκλος. Ἡ στερεότης ὅθεν τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του. Κώνου ὅθεν ὕψους 1.40^{μ} καὶ ἀκτῖνος βάσεως 0,25 ἡ στερεότης ἔσται

$$\Sigma = \tfrac{1}{3}3,14(0,25)^2\ 1,20 = 0,078^{\text{κυβ. μ.}}$$

Ὁμοίως ἡ στερεότης κολούρου τινὸς κώνου ἰσοῦται μὲ τὴν στερεότητα τριῶν κώνων ὧν ὕψος μὲν ἐστὶ τὸ κοινὸν τοῦ κολούρου, καὶ βάσεις ἡ ἄνω, ἡ κάτω καὶ μία μέση ἀνάλογος μεταξὺ τούτων, ἤτοι $\Sigma = \tfrac{1}{3}\Upsilon\pi P^2 + \tfrac{1}{3}\Upsilon\pi\rho^2 + \tfrac{1}{3}\Upsilon\sqrt{\pi P^2 \times \pi\rho^3} = \tfrac{3}{1}\pi\Upsilon(P^2 + \rho^2 + P\rho)$. Ὥστε κολούρου κώνου ἔχοντος ὕψος 0,50 καὶ ἄνω βάσεως ἀκτῖνα 0,25, κάτω δὲ 0,40, ἡ στερεότης ἔσται

$$\Sigma = \tfrac{1}{3} \times 3,14 \times 0,50(\overline{,040}^2 + \overline{0,25}^2 + 0,40 \times 0,25) = 0,169\ \text{κ. μ.}$$

170. Ἡ στερεότης σφαίρας τινὸς (158, 164) κατὰ τοὺς γενομένους ὑπολογισμοὺς ἀποδεικνύεται ἴση μὲ τὴν διάμετρόν της ἐπὶ τὰ δύο τρίτα τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγίστου αὐτῆς κύκλου. Κατὰ ταῦτα ἡ στερεότης σφαίρας τινὸς ἀκτῖνος P, ἐστὶ

$$\Sigma = 2P \times \tfrac{2}{3}\pi P^2 = \tfrac{1}{3} \times 4\pi P^2 \times P.$$

ἤτοι ἡ στερεότης τῆς σφαίρας ἰσοῦται ἐπίσης μὲ τὸ τρίτον τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὴν ἰδίαν αὐτῆς ἀκτῖνα. Οὕτω ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας τινὸς ἀκτῖνος 0,25 ἐστὶ

$$\Sigma = \frac{1}{3} \times 4\pi P^2 \times P = 0,066 \text{ κ. μ.}$$

172. Τὸ κυκλόμετρον συνίσταται ἀπὸ ταινίαν φέρουσαν ἐπὶ ἑκατέρων τῶν μετώπων καὶ εἰς τρόπον ὥστε τὰ 0 ν' ἀνταποκρίνονται, δύο κλίμακας, ἐξ ὧν ἡ μὲν διαιρεῖται εἰς ἑκατοστὰ τοῦ Β. πήχεως, πρὸς μέτρησιν τῶν μήκεων, ἡ δ' ἑτέρα εἰς μέρη ὧν ἕκαστον ἰσοῦται μὲ 13 ἑκατοστὰ καὶ $\frac{1}{7}$ ἢ $\frac{22}{7} = \pi$ τοῦ ὑφεκατομέτρου. Τυλισσομένης τῆς περιφερείας ταύτης πέριξ περιφερείας τινὸς, ἡ μὲν πρώτη κλίμαξ δίδει πάραυτα τὴν ἀνάπτυξιν αὐτῆς ταύτης, ἡ δὲ δευτέρα δίδει τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου αὐτῆς εἰς ὑφεκατόμετρα. Διὰ τοῦ κυκλομέτρου τούτου ὅθεν μετρᾶται εὐκόλως καὶ μετὰ πλείστης ἀκριβείας, ἡ διάμετρος στήλης τινὸς, κορμοῦ δένδρου, πίθου, εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ ὕψους αὐτῶν.

173. *Προβλήματα στερεομετρίας*. α'. Εὑρεθήτω ὁ ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν μέτρων στιβάδος τινὸς λίθων σχήματος παραλληλεπιπέδου ὡς συνήθως γίνεται, οὗτινος μῆκος μὲν ἐστὶ 40,μ·00 τὸ πλάτος 5,00 καὶ ὕψος 3,50.

Ἡ στερεότης τοῦ παραλληλεπιπέδου αὐτοῦ, (166)

$$\Sigma = 40,00 \times 5,00 \times 3,50 = 700,00 \text{ κ. μ.}$$

β'. Εὑρεθήτω ὁ κυβισμὸς τῆς τοιχοποιΐας ναοῦ τινος Α. (Σχ. 79).

Ἐν πρώτοις ἡ στερεότης τοῦ τοίχου α ἀφαιρουμένου τοῦ πάχους τῶν δύο μετώπων $2 \times 0,80$ ἐστὶ $8,4 \times 0,8 \times 0,6 = 40,32$ κ. μ. ὥστε διὰ τὰ δύο α + β = 80, 64κ. μ. Ἡ στερεότης τοῦ μετώπου γ = 31,80κ. μ. Ἐπίσης καὶ τοῦ μετώπου δ ἐξ οὗ δέον ν' ἀφαιρεθῇ τὸ τμῆμα ἐφ' οὗ ἐπακουμβᾷ τὸ ἱερὸν, ὅπερ συνίσταται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον $4,00 \times 4,00 \times 0,80 = 12,80$ κ. μ. καὶ ἓν ἡμικύκλιον τμῆμα ἢ κυλινδρικὸν ὕψους 0,80 καὶ ἀκτῖνος 2,00μ· ἤτοι $\frac{2 \times 3,14 + 2}{2} \times 0,80 = 5,00$κ. μ. ὥστε τοῦτο ἰσοῦται μὲ 12,80 + 5,00 = 17, 80, ὅπερ ἀφαιρούμενον ἐκ τῆς στερεότητος τοῦ μετώπου δ, δίδει δι' αὐτὸ 37,80 — 17,80 = 20,00.

Ἡ στερεότης ὅθεν τῶν τοίχων τοῦ κυρίως ναοῦ ἐστὶ 80,64 + 37,80 + 20,00 = 138,44κ. μ. Εἰς τοῦτο δέον νὰ προστεθῇ ἡ στε-

8

ρεότης τοῦ ἱεροῦ, ὅπερ συνίσταται ἀπὸ ἡμικύλινδρον καὶ ἐπ αὐτοῦ τεταρτοσφαίριον. Ἡ στερεότης τῆς τοιχοποιΐας τοῦ ἡμικυλίνδρου, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἡμικυλίνδρου ἀκτῖνος 2,80 καὶ τοῦ ἰσοϋψοῦς αὐτοῦ ἀκτῖνος 2,00, ἤτοι $\frac{2\times3,14\times2,80\times4,00}{2}-\frac{2\times3,14\times2,00\times4,00}{2}=10,04.$ κ. μ. Ἡ στερεότης τοῦ τεταρτοσφαιρίου, ὅπερ συνήθως ἐν ταῖς ἐργασίαις ἐν Ἑλλάδι μετρᾶται πλῆρες, ἕνεκα τῆς ὑπεροχῆς τῆς κατασκευῆς ἐπὶ τοῦ κοινοῦ τοίχου, ἐστὶ (171)

$$\frac{\frac{1}{3}\times4\pi P^2\times P}{4}=\frac{\frac{1}{3}4\times3,14\times2^2\times2}{4}=8,37.$$

ἅπασα ὅθεν ἡ τοιχοποιΐα τοῦ ναοῦ σύγκειται ἀπὸ κ. μ.

$$133,44+10,04+8,37=156,85.$$

γ') Τὸ ἅλας συνήθως ἐν ταῖς ἁλικαῖς συναζόμενον, τοποθετεῖται εἰς ὄγκους κανονικοῦ σχήματος, ὡς τὸ Α (Σχ. 70). Εὑρεθήτω ὅθεν ἡ στερεότης τοιούτου τινος ὄγκου ἅλατος. Τὸ σχῆμα τοῦτο σύγκειται ἀπὸ ἓν ὀρθὸν πρίσμα αβγδεζ, οὗτινος βάσις ἐστὶ τρίγωνον βάσεως δε καὶ ὕψους Υ=3, ὕψος δὲ τὸ μῆκος γδ=8,00· ἡ στερεότης ὅθεν τούτου ἐστὶ (167) $\frac{1}{2}$ δε×υ×αβ=$\frac{1}{2}$5,00×3,00×8,00=60,00, κ. μ. καὶ προσέτι ἀπὸ δύο ἡμιπυραμίδας ὕψους κοινοῦ υ=3,00 καὶ βάσεων δεζη καὶ γιθζ, αἵτινες δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀπαρτίζουσαι μίαν πυραμίδα ἧς ἡ βάσις ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων δεζη+ψζθ. Ἡ στερεότης ὅθεν ταύτης ἐστὶ (168) (ιγ+δη)×ηζ×$\frac{1}{3}$υ=4,00×5,00×$\frac{1}{3}$3,00 = 20,00 κ. μ. Ὁ ὁλικὸς ὅθεν σωρὸς τοῦ ἅλατος περιέχει 60,00+20,00=80,00. κ. μ.

δ') Εὑρεθήτω ἡ χωρητικότης πίθου (βαρελίου) (Σχ. 71).

Μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς κυρτότητος τοῦ πίθου, οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ συγκείμενος ἐκ δύο κολούρων κώνων, ἐχόντων μεγάλην μὲν βάσιν κοινὴν τὸν μεσαῖον κύκλον τοῦ πίθου, μικρὰς δὲ βάσεις τοὺς ἄκρους κύκλους αὐτοῦ. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, εὑρίσκεται ἡ στερεότης διὰ τοῦ διπλασιασμοῦ τῆς στερεότητος τοῦ κολούρου κώνου, τοῦ ἔχοντος βάσεις τοὺς δύο ῥηθέντας κύκλους (170).

Συνήθως πρὸς μέτρησιν τῆς στερεότητος τῶν πίθων γίνεται χρῆ-

σις τῆς ἑξῆς μεθόδου. Ὁ πίθος θεωρεῖται ἴσος κυλίνδρῳ ἔχοντι ὕψος μὲν τὸ τοῦ πίθου M, βάσιν δὲ κύκλον τινα, οὗτινος ἡ διάμετρος Δ ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῆς διαμέτρου τοῦ ἄκρου κύκλου δ, καὶ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ μεσαίου Δ, ἤτοι

$$D = \frac{\delta + 2\Delta}{3}$$

ἡ χωρητικότης ὅθεν τοῦ πίθου ἐστὶ

$$\Sigma = \pi D^2 \times M = \pi\left(\frac{\delta + 2\Delta}{3}\right)^2 \times M = \tfrac{1}{9}\pi(\delta + 2\Delta)^2 M.$$

Ἡ Διάμετρος Δ λαμβάνεται διὰ τοῦ κυκλομέτρου (172) ἢ διὰ πήχεως εἰσαγομένου διὰ τοῦ στομίου, δέον ὅμως νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ πάχος τῶν δουγιῶν, ὅπερ ἐστὶ συνήθως 0,01—0,02. Οὕτω πίθος μήκους 2,00, ἀκτῖνος ἄκρου κύκλου 0,40 καὶ μεσαίου 0,60, ἔχει χωρητικότητα

$$\Sigma = \tfrac{1}{9} 3,14\,(0,40 + 1,20)^2 \times 2,00 = 1,78 \text{ κ. μ.}$$

Ἐν Ἑλλάδι, Τουρκίᾳ, καὶ εἴς τινα μέρη τῆς Ἰταλίας, ἡ καταμέτρησις τῶν πίθων γίνεται ὡς ἑξῆς. Ὑπάρχει ἴδιον μέτρον ὑγρῶν, ἰδίως τοῦ οἴνου, ὅπερ καλεῖται *βαρέλα*, περιέχει δ' αὕτη κατὰ μέσον ὅρον 48 ὀκάδ. ἢ 0,064 Κ. Μετρ. ἤτοι 64 Βασ. λίτρ. (87). Ῥάβδος ἐκ ξύλου ἢ σιδήρου καλουμένη βαρελόμετρον, διαιρεῖται εἰς μέρη ἀνάλογα, ὧν ἕκαστον ἀντιστοιχεῖ εἰς χωρητικότητα μιᾶς βαρέλας. Πρὸς καταμέτρησιν διὰ ταύτης, εἰσάγεται αὕτη διὰ τοῦ στομίου ε κεκλιμμένως, ἄχρις οὗ συναντήσῃ τὴν γωνίαν ἣν σχηματίζει ὁ ἄκρος κύκλος τοῦ πίθου μὲ τὸν κορμὸν αὐτοῦ ζ, ὁ δ' ἀριθμὸς ὅστις συμπίπτει μὲ τὸ μέσον τοῦ στομίου ε ἐπὶ τῆς ῥάβδου, δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν βαρελῶν ἃς χωρεῖ ὁ πίθος. Ἐὰν ὅθεν ἐπὶ τῆς ῥάβδου δείκνυται κατὰ τὸ στόμιον τοῦ πίθου ὁ ἀριθμὸς 8, ὁ πίθος χωρεῖ 8 βαρέλας ἢ 8×48=384 ὀκάδας.

Ἐὰν τὸ εζ δὲν εἶναι ἴσον μὲ τὸ εκ λαμβάνεται ὁ μέσος τούτων ὅρος.

Ὁ ὅλως πρακτικὸς οὗτος τρόπος τῆς καταμετρήσεως τῶν πίθων παρέχει ἀρκοῦσαν ἀκρίβειαν, ὡς δεικνύει τὸ ἐξαγόμενον δύο διαφόρων καταμετρήσεων τοῦ αὐτοῦ πίθου, τοσαύτη δὲ πεποίθησις ὑπάρχει εἰς αὐτὸν ἐν Ἑλλάδι, ὥστε ἀγοράζεται ὁ οὕτω καταμετρηθεὶς οἶνος ἄνευ δισταγμοῦ τινος ὡς πρὸς τὴν ποσότητα αὐτοῦ.

Προκειμένου νὰ εὑρεθῇ τὸ περιεχόμενον ὑγρὸν εἰς πίθον μὴ πλήρη, εἰσάγεται διὰ τοῦ στομίου ῥάβδος δι' ἧς μετρᾶται τὸ ὕψος τοῦ ὑγροῦ Υ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μέσου κύκλου Δ, λαμβάνεται ὁ λόγος $\frac{Υ}{Δ}$, καὶ ἐκ τοῦ ἀπέναντι πίνακος λαμβάνεται ποία χωρητικότης ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λόγον $\frac{Υ}{Δ}$ ἐὰν ἡ χωρητικ. τοῦ πίθου ἦτο 1.00. Πολλαπλασιαζομένης τῆς χωρητικότητος ταύτης ἐπὶ τὴν τοῦ ὅλου πίθου προσδιοριζομένης ὡς ἄνω, εὑρίσκεται ἡ στερεότης τοῦ ἐν τῷ μὴ πλήρη πίθῳ εὑρισκομένου ὑγροῦ.

$\frac{Υ}{Δ}$	Χωρητικότης εἰς πίθον 1.00
1,0	1,000
0,9	0,950
0,8	0,860
0,7	0,750
0,6	0,630
0,5	0,500
0,4	0,370
0,3	0,250
0,2	0,140
0,1	0,050

Εἰς πίθον ὅθεν ἔχοντα μέσην διάμετρον Δ=0,80 καὶ ὑγρὸν εἰς ὕψος κ=0,32, ὁ λόγος $\frac{Υ}{Δ}=\frac{0,32}{0,80}=0,40$, ὥστε εἰς πίθον χωρητικότητος μονάδος, ἐκ τοῦ πίνακος τὸ ὑγρὸν ἐστὶ 0,37. Ἐὰν λοιπὸν ἡ χωρητικότης τοῦ προκειμένου πίθου ἐστὶν 500 λιτρῶν, τὸ ἐν αὐτῷ ὑγρὸν ἐστὶ $500 \times 0,37 = 185$ λίτρας.

Τὸ (Σχ. 72) παριστάνει τὸ ἐν χρήσει βαρελόμετρον μὲ κλίμακα $\frac{1}{10}$, ὥστε λαμβάνων τις δεκάκις αὐτό, ἔχει τὸ πραγματικὸν ἐν χρήσει βαρελόμετρον.

ε') Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν τῶν σανίδων αἵτινες δύνανται νὰ ἐξαχθῶσιν ἔκ τινος κορμοῦ δένδρου.

Ληπτέον πρῶτον τὴν περιφέρειαν τῆς ἄνω βάσεως κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἥτις ἔστω 2,826· ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας ταύτης ἐστὶν 0,9, ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου αεβγ ὑπολογίζεται (144) εἰς 0,636. Ἐὰν ἑκάστη σανὶς πρόκειται νὰ ἔχῃ πλάτος τὸ ἥμισυ τούτου ἤτοι 0,318, διαιρετέον τὴν αγ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς ζ καὶ ἀχθήτω ἡ ζη. Ἐὰν ἑκάστης σανίδος τὸ πάχος ἔσεται 0,03, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κατὰ πάχος σανίδων ἔσεται $\frac{0,636}{0,03} = 21$, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν κατὰ πλάτος τοιούτων, δίδει τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν σανίδων ὅστις

δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ κορμοῦ, ἤτοι 2×21 = 42.

ζ') Ζητεῖται πόσαι ὀπτόπλινθοι (τοῦβλα) ἀπαιτοῦνται πρὸς κατασκευὴν 182,50 κ. μ. τοιχοποιΐας.

Ἑκάστη πλίνθος ἐστὶ 0,24 μήκους, 0,12 πλάτους καὶ 0,04 πάχους (συμπεριληφθείσης καὶ τῆς μεταξύ των ἀμμοκονίας), ἤτοι ἔχει στερεότητα 0,001152 Κ. Μ. ἢ 1152 κυβ. ὑφεκατόμετρα (Κ. δάκτυλοι). Ἓν κυβ. μέτρον γνωστὸν ὅτι περιέχει 1000000 κυβ. ὑφεκατόμετρα, ὥστε $\frac{1000000}{1152}$=858 ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀπτοπλίνθων, αἵτινες ἀναγκαιοῦσι δι' ἕκαστον κυβ. μέτρον, ἐν ὅλοις δὲ ἀπαιτοῦνται ὀπτόπλινθοι 182,50×868=16043 πρὸς κατασκευὴν τοῦ προκειμένου τοίχου.

174. Τὸ κυλινδρικὸν μέτρον ὅπερ ἔχει χωρητικότητα μιᾶς ὀκᾶς, ἐν χρήσει εἰς ὅλα τὰ ἐν Ἑλλάδι ὑγροπωλεῖα, ἔχει διάμετρον τῆς βάσεως 0,102 καὶ ὕψος 0,163. Ἰσοῦται δὲ μὲ 1,333 τοῦ κυβικοῦ ὑποδεκαμέτρου ἢ Βασιλικῆς λίτρας (Κυβ. παλάμης) (87).

ΠΙΝΑΞ

Τῶν διαστάσεων τῶν κυριωτέρων τῆς χωρητικότητος κυλινδρικῶν μέτρων.

Διὰ ῥευστὰ ἢ ὑγρὰ				Διὰ ξηρὰ ἢ στερεὰ		
Ὀνομασία Μέτρου	Διάμετρος	Ὕψος	Χωρεῖ Λίτρας	Ὀνομασία Μέτρου	Διάμετρος καὶ Ὕψος	Χωρεῖ Λίτρας.
Λίτρα	0,086	0,172	1	$\frac{1}{4}$ Κοιλοῦ	0,3162	25
Δεκάλιτρον	0,185	0,371	10	Ἡμίκοιλον	0,3994	50
ἑκατόλιτρον	0,40	0, 80	100	Κοιλὸν	0,5033	100

Περὶ εἰδικοῦ βάρους.

175. Ἡ πυκνότης ἢ εἰδικὴ βαρύτης ἢ μᾶλλον τὸ εἰδικὸν βάρος σώματός τινος, ἐστὶν ὁ λόγος τοῦ βάρους τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου τοῦ σώματος τούτου πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὄγκου τῆς μονάδος ἑτέρου σώματος χρησιμεύοντος ὡς ὅρος συγκρίσεως. Ὡς μονὰς συγκρίσεως λαμβάνεται τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ ὑποδεκαμέτρου (Κυβικῆς παλάμης ἢ λίτρας) ἀπεσταγμένου ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 4°, ὅπερ ζυ-

γίζει ἓν χιλιόγραμμον (86), ὥστε τὸ εἰδικὸν βάρος σώματός τινος ἢ ἡ πυκνότης αὐτοῦ, ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χιλιογράμμων ἅτινα ζυγίζει τὸ κυβικὸν ὑποδεκάμετρον (Κυβ. Παλάμη) τοῦ σώματος τούτου.

Ὅθεν τὸ βάρος τοῦ χιλιογράμμου, ἤτοι τοῦ κυβικοῦ ὑποδεκαμέτρου ἀπεσταγμένου ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 4°, λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ σημειοῦται ὡς 1000. Πᾶν σῶμα ὅθεν οὗτινος τὸ βάρος τοῦ κυβικοῦ ὑποδεκαμέτρου ζυγίζει πλέον τούτου, ἐστὶ πυκνότερον τοῦ ὕδατος, ἑπομένως βυθίζεται ἐν αὐτῷ, καὶ πᾶν σῶμα οὗτινος τὸ κυβικὸν ὑποδεκάμετρον ζυγίζει ὀλιγώτερον, ἐστὶν εἰδικῶς ἐλαφρότερον τοῦ ὕδατος, ἑπομένως ἐπιπλέει ἐν αὐτῷ.

Διακεκριμμένοι φυσικοὶ διὰ πλείστων πειραμάτων, ἐπροσδιόρισαν τὸ εἰδικὸν βάρος τῶν διαφόρων σωμάτων, ὧν τῶν κυριωτέρων εὑρίσκεται ἐν τῷ κατωτέρω πίνακι.

Δι' αὐτοῦ δύναται νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος ὄγκου τινος ἐκ μόνης τῆς καταμετρήσεως αὐτοῦ.

Ἐὰν ὁ κατὰ τὰ ἀνωτέρω καταμετρηθεὶς κανονικὸς ὄγκος τεμαχίου τινος σιδήρου εὑρεθῇ 4,50 κυβ. ὑποδεκάμετρα, ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου ὡς ἐκ τοῦ πίνακος ἐμφαίνεται ἐστὶ 7,788, τουτέστι ἓν κυβικὸν ὑποδεκάμετρον ζυγίζει 7,788 χιλιόγραμμα, ἕπεται ὅτι τὸ ὅλον βάρος τοῦ ἐν λόγῳ τεμαχίου ἐστὶ $7,788 \times 4,50 = 34,046$ χιλ. Ἐν τῷ προβλήματι (δ, 163) εὑρέθη ἡ χωρητικότης πίθου 2,00 μ. μήκους, καὶ ἀκτίνων 0,40 καὶ 0,60 ἴση μὲ 1,78 κ. μ. Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ πίνακος ἐμφαίνεται ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ οἴνου ἤτοι τὸ βάρος ἑνὸς κυβ. ὑποδεκαμέτρου ἐστὶ 0,962 χιλ., ἤτοι τὸ κυβικὸν μέτρον ζυγίζει 962,00 χιλ. ἕπεται ὅτι ὁ ῥηθεὶς πίθος ἔχει χωρητικότητα $962,00 \times 1,78 = 1712,\ 36$ λίτρας, καὶ ἐπειδὴ $1^{\text{λίτρα}} = 300,^{\text{δράμμια}}$ ἕπεται ὅτι ὁ πίθος ἔχει χωρητικότητα $1712,\ 36^{\text{λίτρ.}} = 1284,\ 27$ ὀκάδων.

ΠΙΝΑΞ

Τοῦ εἰδικοῦ βάρους διαφόρων σωμάτων, τοῦ ὕδατος εἰς 4° ληφθέντος ὡς μονάδος.

Σώματα	Εἰδικὸν Βάρος	Σώματα	Εἰδικὸν Βάρος
Πλατίνη	21,53	Μάρμαρα Πάρου	2,83
Πλατίνη εἰς Πετάλειον	22,06	Μάρμαρα Καράρης	2,71
Χρυσὸς σφυρήλατος	19,36	Γρανίτης	2,75
» χυτὸς	19,26	Ψαμμίτης	2,50
» νομίσ. Γαλλ. καὶ Ἑλλ.	17,65	Μυλόλιθος	2,48
Ὑδράργυρος εἰς 0°	13,59	Ὀπτόπλινθος	1,87
Μόλυβδος	11,35	Ἐλαφρόπετρα	0,91
Ἄργυρος χυτὸς	10,47	Κρητὶς	1,28
» νομισ. Γαλλ. καὶ Ἑλλ.	10,12	Τιτανόλιθος	2,20
Χαλκὸς εἰς Πετάλεια	8,95	Γῦψος	2,33
» χυτὸς	8,95	Πυρίτης	2,65
Μαγγανήσιον	8,01	Ὀφίτης	2,47
Χάλυψ	7,82	Γραφίτης	2,32
Σίδηρος	7,78	Λιθάνθρακες	1,36
Χυτοσίδηρος	7,20	Φαιάνθρακες	1,35
Κασσίτερος	7,29	Ἄνθρακες δρυὸς	1,53
Ψευδάργυρος	7,19	Ἄνθρακες Ἰτέας	1,55
Χρώμιον	5,90	Ἄνθραξ φιλλύρας	1,46
Ἀδάμας	3,50	Ἄνθραξ λεύκης	1,45
Θεῖον	2,08	Ἔβενος	1,12
Φωσφόρον	1,77	Δρῦς	1,17
Ποτάσσιον	0,86	Καρυὰ	0,92
Τίτανος	3,15	Μωρέα	0,89
Ὀρυκτὸν ἅλας	2,25	Ἀκακία	0,82
Κοινὸν ἅλας	2,20	Πτελέα	0,55
Πάγος	0,91	Πεύκη	0,55
Σέπια 0,98	1,27	Μηλέα	0,73
Ἀπιδέα	0,73	Χλωροφόρμιον	1,55
Πορτοκαλλέα	0,70	Λινέλαιον	0,94
Ἐλαία	0,67	Ἔλαιον	0,91
Κυπάρισσος	0,66	Πετρέλαιον	0,84

Σώματα	Εἰδικὸν Βάρος	Σώματα	Εἰδικὸν Βάρος
Ἐλάτη	0,65	Γάλα	1,03
Πλάτανος	0,64	Θειϊκὸς αἰθὴρ	1,08
Φιλλύρα	0,60	Οἶνος Βορδὼ	0,99
Κέδρος	0,57	Οἶνος Βουργουνδίας	0,99
Ἰτέα	0,48	Οἶνος κοινὸς Ἑλλάδος ..	0,96
Λεύκη	0,38	Οἰνόπνευμα πυκνὸν	0,92
Ὕδωρ ἀπεσταγμένον ..	1,00	» ἐμπορίου ..	0,84
» θαλάσσιον	1,02	Ὑδροχλωρικὸν ὀξὺ	1,20
Θειϊκὸν ὀξὺ πυκνὸν	1,84	Ἄσφαλτος, νάφθα	0,84
Νιτρικὸν ὀξὺ	1,55	Βενζίνη	0,85

ΠΙΝΑΞ

Τοῦ βάρους ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου διαφόρων οὐσιῶν.

Εἶδος	Βάρος κυβικοῦ μέτρου		Εἶδος	Βάρος κυβικοῦ μέτρου	
	Χιλιόγρ.	Ὀκάδες		Χιλιόγραμ.	Ὀκάδες
Ὕδωρ ὄμβριον, ποτάμιον κλ.	1000	784,28	Ὀπτόπλινθοι	1235	965
Φρεάτιον	1007	787	Ἐλαφρὸς πῶρος	1428	1116
Θαλάσσιον	1035	809	Λίθοι κοινοὶ	2213	1729
Γῆ κοπρώδης	843	659	» Λυκαβηττοῦ	2222	1736
Γῆ φυτικὴ	1198	936	» Ὑμηττοῦ	2500	1953
Γῆ κοινὴ	1356	1059	» Αἰγίνης	2174	1698
Γῆ πηλώδης, ἰλὺς	1642	1283	Μάρμαρον	2701	2110
Γῆ ἀργιλώδης	1500	1172	Μυλόπετρα	1264	987
Ἄμμος στεγνὴ	1414	1105	Σίδηρος	7207	5627
Ἄμμος ὑγρὰ	1814	1417	Χυτοσίδηρος	7783	6081
Ἄμμος ὀρυκτὴ	1756	1372	Μόλυβδος	11346	8865
Θηραϊκὴ γῆ	993	776	Δρῦς	1220	953
Πουτζολάνα	1193	932	Ἐλάτη	543	424
Τίτανος (ἄσβεστος)	828	647	Καστανέα	685	535
Ἐσβεσμένη	1378	1077	Καρυὰ	728	569

ΠΙΝΑΞ

Σιδηρῶν ῥάβδων τετραγώνου καὶ κυκλικῆς τομῆς, μήκους 1,00μ.

Διάμετρος ἢ Πλευρὰ εἰς ὑποχιλιόμετρα	Τετραγ. Σίδηρα Βάρος εἰς χιλιόγραμμα	Στρογγ. Σίδηρα Βάρος εἰς χιλιόγραμμα	Διάμετρος ἢ Πλευρὰ εἰς ὑποχιλιόμετρα	Τετραγ. Σίδηρα Βάρος εἰς χιλιόγραμμα	Στρογγ. Σίδηρα Βάρος εἰς χιλιόγραμμα
1	0,0078	0,0066	31	7,495	5,872
2	0,031	0,022	32	7,985	6,248
3	0,070	0,044	33	8,494	6,668
4	0,124	0,092	34	9,016	7,060
5	0,195	0,152	35	9,555	7,488
6	0,280	0,212	36	10,108	7,920
7	0,382	0,288	37	10,678	8,364
8	0,499	0,380	38	11,263	8,820
8	0,631	0,488	39	11,863	9,300
10	0,780	0,612	40	12,480	9,788
11	0,943	0,732	41	13,111	10,276
12	1,123	0,868	42	13,759	10,776
13	1,318	1,020	43	14,422	11,300
14	1,528	1,188	44	15,100	11,836
15	1,735	1,368	45	15,795	12,384
16	1,996	1,556	46	16,504	12,936
17	2,254	1,750	47	17,230	13,504
18	2,527	1,968	48	17,971	14,080
19	2,815	2,200	49	18,727	14,680
20	3,120	2,244	50	19,500	15,292
21	3,439	2,688	55	23,595	18,502
22	3,775	2,944	60	28,020	22,024
23	4,126	3,204	65	32,955	25,842
24	4,482	3,512	70	38,220	29,968
25	4,875	3,816	75	43,875	34,412
26	5,272	4,124	80	49,920	39,160
27	5,686	4,448	85	56,355	44,202
28	6,115	4,784	90	63,180	49,556
29	6,559	5,136	95	70,395	55,218
30	7,020	5,504	100	78,000	61,159

Κατὰ τὸν πίνακα τοῦτον, πρὸς εὕρεσιν τοῦ βάρους σιδηρᾶς ῥάβδου μήκους δεδομένου, πολλαπλασιάζεται τὸ μῆκος τοῦτο ἐπὶ

τὸν ἐν τῷ πίνακι ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἢ τὴν διάμετρον.

Τὸ βάρος ὅθεν σιδηρᾶς τετραγώνου τομῆς ῥάβδου μήκους 3,50 καὶ πλευρᾶς 40 ὑποχιλιομ. ἐστὶ 12,480×3,50=43,68χιλιογρ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

Προβλήματα Πρακτικῆς Γεωμετρίας.

176. Τὰ κυριώτερα ἐργαλεῖα δι' ὧν χαράσσονται ἅπαντα τὰ σχήματα τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας, εἰσὶν ὁ κανὼν καὶ ὁ διαβήτης. Διὰ τοῦ πρώτου σύρονται εὐθεῖαι, καὶ διὰ τοῦ δευτέρου χαράσσονται κυκλικὰ τόξα, διὰ καταλλήλου δὲ ἀμφοτέρων χρήσεως αἱ γωνίαι.

Ἐκτὸς τούτων ὑπάρχει ἐν χρήσει τὸ ὀρθογώνιον συγκείμενον ἐκ δύο καθέτων μεταξύ των κανόνων ἢ ἐξ ὀρθογωνίου τριγώνου, καὶ χρησιμεῦον πρὸς ὕψωσιν καθέτων, διὰ τὰς παραλλήλους κλ. ὁ ἀναγωγεὺς χρησιμεύων πρὸς καταμέτρησιν τόξων καὶ γωνιῶν, καὶ ὁ ἀναγωγικὸς διαβήτης χρησιμεύων πρὸς εὕρεσιν δύο γραμμῶν ἐχουσῶν δεδομένον λόγων πρὸς ἀλλήλας.

Διὰ τὸν ἀκριβῆ προσδιορισμὸν σημείου τινος διὰ τομῆς δύο εὐθειῶν, δέον αἱ εὐθεῖαι αὗται νὰ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν ὅσον τὸ δυνατὸν ὀρθὴν, εἰς τοῦτο δὲ δέον νὰ δίδεται μεγίστη προσοχὴ κατὰ τὴν τῶν σχημάτων διαγραφήν.

177. Πρόβλημα α'. Πρὸς διαχάραξιν γωνίας ἴσης ἑτέρᾳ δεδομένῃ Ε (Σχ. 74), ἐκ τοῦ σημείου Ε ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνα κατὰ βούλησιν χαράσσεται τὸ τόξον ΖΗ. Ὁμοίως ἐκ τοῦ σημείου ἔνθα πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ ἡ προκειμένη γωνία Ο ὡς κέντρον καὶ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα διαγράφεται τόξον ΓΜ. Λαμβάνεται ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου ΓΔ=ΖΗ ἑνοῦται ΔΟ, καὶ ἡ γωνία ΔΟΓ εἶναι ἡ ζητουμένη ἴσῃ τῇ δοθείσῃ Ε.

Ἠδύνατο ἐπίσης νὰ κατασκευασθῇ ἡ προκειμένη γωνία διὰ τοῦ κανόνος καί ὀρθογωνίου δι' ὧν ἀγομένων ΑΒ καὶ ΟΔ παραλλήλων τῶν ΕΗ καὶ ΕΖ, ἡ γωνία ΔΟΓ=Ε.

β' Χαράξαι γωνίαν ἴσην τῷ ἀθροίσματι δύο δεδομένων γωνιῶν Α καὶ Β (Σχ. 75).

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα κατασκευάζεται ΖΟΕ=Β καὶ ΖΟΗ =Α, ὅθεν ΗΟΕ=Α+Β.

Διὰ τῆς καθέτου ΟΙ δίδεται καὶ τὸ συμπλήρωμα δοθείσης τινος γωνίας Β.

Ἐὰν Α καὶ Β ἦσαν αἱ δύο γωνίαι τριγώνου τινος, φανερὸν ὅτι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου ἤθελεν εἶσθαι ἡ ΗΟΘ. (130).

γ'. Ἔκ τινος σημείου Α ἐκτὸς δεδομένης εὐθείας κειμένου, ἆξαι εὐθείαν τέμνουσαν ταύτην ὑπὸ δεδομένην γωνίαν. (Σχ. 76).

Εἰς σημεῖον τι Δ τῆς εὐθείας κατασκευάζεται ἡ δεδομένη γωνία ΕΔΓ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγεται παράλληλος τῆς ΕΔ, ΑΒ δὲ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, διότι ΑΒΔ=ΕΔΓ= τῇ δεδομένῃ.

δ'. Δεδομένων δύο πλευρῶν α καὶ ϐ τριγώνου τινος, καὶ τῆς μεταξὺ τούτων γωνίας Γ, χαρᾶξαι τὸ τρίγωνον. (Σχ. 77).

Κατασκευάζεται πρῶτον ἡ γωνία ΑΓΒ=Γ, καὶ λαμβανομένου ΓΒ=α καὶ ΓΑ=ϐ ἑνοῦται ΑΑ, καὶ ΑΒΓ ἐστὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Ὁμοίως κατασκευάζεται καὶ τὸ τετράπλευρον.

Ἐὰν ἐδίδετο ἡ μία πλευρὰ α καὶ αἱ παρακείμεναι γωνίαι Β καὶ Γ, λαμβάνεται ΒΓ=α, κατασκευάζονται αἱ γωνίαι ΑΒΓ=Β καὶ ΑΓΒ=Γ, ὧν ἡ τομὴ τῶν πλευρῶν εἰς Α σχηματίζει τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 78.).

Ἐὰν δὲ ἐδίδοντο αἱ τρεῖς πλευραὶ α, ϐ, γ, πρὸς κατασκευὴν τοῦ τριγώνου, λαμβάνεται ΒΓ=α. Μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΑ=γ γράφεται τόξον, ἐπίσης ἐκ κέντρου Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΑ=ϐ γράφεται τόξον ὅπερ τέμνει τὸ προηγούμενον εἰς Α. Διὰ τῆς ἑνώσεως ΑΒ καὶ ΑΓ σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον. (Σχ. 79).

ε'. Κατασκευάσαι ὀρθογώνιον τρίγωνον δεδομένων

1ον Τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας Β. (Σχ. 80).

Κατασκευάζεται ἡ γωνία ΓΒΑ=Β, λαμβάνεται ΒΓ=α καὶ διὰ καταβιβάσεως καθέτου εἰς Γ ἐπὶ τῆς ΑΓ, σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

2ον Τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς πλευρᾶς ϐ. (Σχ. 81).

Κατασκευάζεται πρῶτον ἡ ὀρθὴ γωνία Α καὶ λαμβάνεται ΑΓ=ϐ· τὸ ἐκ κέντρου Β καὶ ἀκτῖνα α διαγραφόμενον τόξον τέμνει τὴν ΑΒ εἰς Β, ἑνοῦται ΓΒ καὶ ΑΒΓ ἐστὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

ϛ'. Ἔκ τινος σημείου Α, ἐπὶ ἢ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΒΓ κειμένου, ἆξαι κάθετον ἐπὶ ταύτης. (Σχ. 82).

Ἐκ κέντρου Α καὶ μὲ ἀκτῖνα κατὰ βούλησιν διαγράφεται τόξον τι τέμνον τὴν δεδομένην εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἰσαπέχοντα τοῦ Α. Ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ ὡς κέντρων καὶ ἀκτῖνα κατὰ βούλησιν μὲν πλὴν κοινήν, διαγράφονται δύο τόξα τεμνόμενα εἰς Ι. Ἑνοῦται ΑΙ καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ ζητουμένη κάθετος. (130).

Ἡ κάθετος αὕτη ἠδύνατο νὰ ἀχθῇ καὶ διὰ τοῦ ὀρθογωνίου, τιθεμένου οὕτως ὥστε ἡ μὲν μία πλευρὰ αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, καὶ ἡ ἑτέρα νὰ διέρχεται διὰ τοῦ δεδομένου σημείου Μ. (Σχ. 83). Προτιμώτερον ὅμως εἶναι νὰ τεθῇ τὸ ὀρθογώνιον οὕτως, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, καὶ νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ΑΑ' κανὼν ὅστις κρατούμενος στερεῶς, νὰ τηρήσῃ ἀμετάβλητον τὴν θέσιν τῆς ΑΑ'. Στρεφόμενον τότε τὸ ὀρθογώνιον οὕτως ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΑΓ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΑΑ', καὶ συρόμενον ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης ἄχρις οὗ ἡ ὑποτείνουσα συμπέσῃ μετὰ τοῦ σημείου Μ, σύρεται διὰ ταύτης ἡ ζητουμένη κάθετος. (Σχ. 84).

ζ'. Ὑψῶσαι κάθετον εἰς τὸ ἄκρον εὐθείας τινος ΑΒ. (Σχ. 85).

Ἔκ τινος κατὰ βούλησιν σημείου Ο ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνα ΟΒ διαγράφεται τόξον, ἑνοῦται ἡ τομὴ Δ τοῦ τόξου τούτου μετὰ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ παρατείνεται ἡ ΟΔ μέχρι Γ, ἑνοῦται ΓΔ καὶ αὕτη ἐστὶν φανερῶς ἡ ζητουμένη κάθετος, δυναμένης ἄλλως ἀχθῆναι καὶ διὰ τοῦ ὀρθογωνίου.

η'. Διχοτομῆσαι εὐθεῖαν τινα ΑΒ, τόξον ΑΜΒ καὶ γωνίαν ΑΓΒ.

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β (Σχ. 86) ὡς κέντρων καὶ ἀκτῖνα κατὰ βούλησιν, μεγαλειτέραν ὅμως τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΒ, διαγράφονται δύο τόξα τεμνόμενα εἰς Ι καὶ Ι', ἡ εὐθεῖα ΙΙ' διχοτομεῖ φανερῶς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ τόξον ΑΜΒ καὶ τὴν γωνίαν ΑΓΒ, διότι διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Γ τοῦ τόξου ΑΜΒ.

θ'. Ἔκ τινος σημείου Α ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΒΓ ἀχθήτω παράλληλος ταύτῃ. (Σχ. 87).

Ἔκ τινος σημείου τῆς ΒΓ ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνα ΒΑ διαγραφήτω τόξον τι. Ἐπίσης ἐκ κέντρου Γ καὶ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα διαγρα-

φήτω ἐπίσης τόξον ἐφ' οὗ ληφθήτω ΒΕ=ΑΓ, φανερὸν ὅτι ΑΕ ἐστὶν ἡ ζητουμένη παράλληλος.

Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ ἰδίου προβλήματος διὰ τοῦ ὀρθογωνίου, τοποθετεῖται τοῦτο οὕτως ὥστε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΒΕ νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς εὐθείας ΓΔ. (Σχ. 88). Ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΕΖ στηρίζεται ἐπὶ κανόνος ἐφ' οὗ συρόμενον τὸ ὀρθογώνιον μέχρις οὗ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ συμπέσῃ ἐπὶ τοῦ δοθέντος σημείου Α, παρέχει τὴν εὔκολον διὰ μολυβδοκονδύλου χάραξιν τῆς ζητουμένης παραλλήλου.

178. α'. Γεωμετρικῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῇ ἀκριβῶς ἡ ἀνάπτυξις τῆς περιφερείας, οὐχ ἧττον ὅμως διὰ τῆς ἑξῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς εὑρίσκεται αὕτη μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως, διότι διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διαφορὰ ἐστὶ μόνον 0,002.

Ἐκ τοῦ σημείου Α (Σχ. 89) καὶ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς διαμέτρου, λαμβάνεται ἑξάκις ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου πρὸς τὸ Ν. Εἰς Ο ὑψοῦται ἡ κάθετος ΟΓ καὶ ἑνοῦται ΑΓ ἥτις ἐστὶν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου. Ἑνοῦται τὸ σημεῖον Γ μὲ τὴν διαίρεσιν 5, καὶ ἄγεται ΟΔ παράλληλος τῆς Γ5. Τὸ ἀπόστημα ΑΔ μεταφέρεται εἰς ΜΑ, καὶ ΜΝ ἐστὶν ἡ ἀνάπτυξις τῆς περιφερείας μὲ προσέγγισιν 0,002 ὡς ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ.

β'. Διαγράψαι περιφέρειαν διερχομένην διὰ τριῶν δεδομένων σημείων ΑΒΓ (Σχ. 90).

Φανερὸν ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος ὡς κορυφὰς τὰ τρία ταῦτα σημεῖα εἰσὶ τόξα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος, διότι αἱ ἐκ τοῦ μέσου τῶν πλευρῶν τούτου ὑψούμεναι κάθετοι διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου, ὥστε ΔΟ, ΕΟ, ΖΟ, προσδιορίζουσι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Ο τοῦ διερχομένου διὰ τῶν τριῶν σημείων Α,Β,Γ,.

γ'. Ἄξαι ἐφαπτομένην εἰς περιφέρειαν,

1ον Διὰ σημείου ἐπὶ τῆς περιφερείας κειμένου (Σχ. 91) Μ. Ἡ κάθετος ΜΝ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΜ ἐστὶν ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

2ον Διὰ σημείου ἐκτὸς τῆς περιφερείας κειμένου Μ'. Ἑνοῦται τὸ σημεῖον Μ' μὲ τὸ κέντρον Ο, διαγράφεται περιφέρεια ἔχουσα διάμετρον ΟΜ ἥτις τέμνει τὴν δεδομένην εἰς τὰ σημεῖα ΤΤ'. Αἱ εὐ-

θεῖαι ΤΜ, Τ'Μ, εἰσὶν αἱ δύο ἐφαπτομέναι εἰς τὸν κύκλον ἐκ τοῦ σημείου Μ διερχόμεναι.

Ἐὰν ἐπρόκειτο ν' ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Α (Σχ. 92) τόξου οὗτινος τὸ κέντρον δὲν εἶναι γνωστὸν, λαμβάνεται κέντρον τὸ Α καὶ μὲ ἀκτῖνα κατὰ βούλησιν διαγράφεται τόξον τέμνον τὸ δοθὲν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ἑνοῦται ΒΓ καὶ ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος ταύτης ἐστὶν ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

δ'. Ἀχθήτω ἐφαπτομένη κοινὴ εἰς δύο κύκλους (Σχ. 93).

Ἐν τῷ μείζονι κύκλῳ διαγράφεται ἕτερος ὁμόκεντρος, οὗτινος ἡ ἀκτὶς ΓΖ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων τῶν δύο κύκλων Ἐκ τοῦ σημείου Γ' ἄγεται ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν ταύτην ἡ Γ'Τ. Ἑνοῦται ΓΤ καὶ παρατείνεται μέχρις Α, ἄγεται Γ'Α' παράλληλος τῇ ΓΑ, ἑνοῦται ΑΑ', καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ ζητουμένη κοινὴ εἰς τὰς δύο περιφερείας ἐφαπτομένη. Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ἑτέρα κοινὴ ἐφαπτομένη Β Β' (138).

Ἐὰν διαγραφῇ ὁ ὁμόκεντρος κύκλος, μὲ ἀκτῖνα ΓΤ=ΓΑ+Γ'Α' (Σχ. 94), διὰ τῆς αὐτῆς ὡς ἄνω ἐργασίας, προσδιορίζονται αἱ μεταξὺ τῶν δύο κύκλων τεμνόμεναι κοιναὶ ἐφαπτόμεναι ΑΑ', ΒΒ' (138).

ε'. Ἐὰν κατὰ τὸ πρόβλημα β' ζητεῖται μόνον τὸ τόξον τὸ διερχόμενον διὰ τῶν τριῶν σημείων οὐχὶ δὲ καὶ ἡ ὅλη περιφέρεια καὶ τὸ κέντρον, τοῦτο δύναται νὰ διαγραφῇ πρακτικῶς διὰ τοῦ *περιγραφικοῦ διαβήτου* (Σχ. 95). Συνίσταται δ' οὗτος εἰς δύο κανόνας ΜΓ καὶ ΜΔ προσαρμοζομένους εἰς Μ ἐνάρθρως ἔνθα ὑπάρχει ὀπὴ ἐν ᾗ εἰσάγεται μολυβδοκόνδυλον. Ἐὰν ὅθεν ὁ ἄξων τῆς στροφῆς τεθῇ ἐπὶ τοῦ σημείου Μ, καὶ ἀνοιχθῶσιν οἱ κανόνες οὕτως ὥστε νὰ ἐπακουμβήσωσιν ἐπὶ δύο ἀκίδων ἐμπηχθεισῶν εἰς τὰ δύο σημεῖα Α, Β, φανερὸν ὅτι στρεφομένου τοῦ διαβήτου εἰς τρόπον ὥστε αἱ δύο πλευραὶ νὰ ἐπακουμβῶσι πάντοτε ἐπὶ τῶν ἀκίδων Α, Β, τὸ εἰς Μ μολυβδοκόνδυλον θέλει διαγράψει τὸ ζητούμενον τόξον.

179. α'. Ἡ εἰς ἴσα μέρη διαίρεσις εὐθείας τινος γίνεται διὰ δοκιμῶν. Ἐὰν πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἰς 7 ἴσα μέρη, (Σχ. 96), ἀνοίγεται ὁ διαβήτης ὅσον ὡς ἔγγιστα τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς εὐθείας ταύτης, καὶ μεταφέρεται ἡ ἀπόστασις αὕτη ἐκ τοῦ Α ἑπτάκις. Ἐὰν μένῃ διάστημά τι ΓΒ, ἀνοίγεται ἔτι ὁ διαβήτης κατά τι ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{7}$ ὡς ἔγγιστα τοῦ ΓΒ καὶ δοκιμάζεται ἐκ νέου, καὶ οὕτω μετὰ τρεῖς

ἢ τέσσαρας δοκιμὰς εὑρίσκεται μὲ ἀρκετὴν ἀκρίβειαν τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς ΑΒ. Διαιρεῖται ὅθεν αὕτη εἰς 7 ἴσα μέρη. Ἐὰν ἡ ἑπτάκις μεταφορὰ τοῦ διαβήτου ἔφθανεν εἰς Γ', θὰ ἐκλείετο κατὰ τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς ΒΓ', ἄχρις οὗ αὕτη τελευτᾷ εἰς Β.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρέσεων ἀναλύεται εἰς παράγοντας ὡς $28 = 4 \times 7$, διαιρεῖται πρῶτον ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς 4 ἴσα μέρη, καὶ κατόπιν ἕκαστον τούτων εἰς 7.

β'. Κατασκευᾶσαι πολύγωνον ὅμοιον ἑτέρῳ (139) (Σχ. 97).

Ἔστω τὸ δοθὲν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ὅπερ ἀναλύεται διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΑΔ εἰς τρίγωνα. Ἄγεται Α'Β' παράλληλος τῆς ΑΒ, καὶ ἐπίσης διὰ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ κανόνος αἱ Β'Γ' καὶ Α'Γ' παράλληλοι ταῖς ΒΓ καὶ ΑΓ, οὕτω δὲ παράγεται τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. Ὁμοίως διὰ παραλλήλων κατασκευάζονται τὰ τρίγωνα Α'Γ'Δ', Α'Δ'Ε', ὅμοια τοῖς ΑΓΔ, ΑΔΕ, ταῦτα δὲ πάντα ἀποτελοῦσι τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε' ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ.

180. α'. Ἵνα διαιρεθῇ περιφέρεια κύκλου (98) εἰς, 2,4,8...ἴσα μέρη, ἄγεται πρῶτον διὰ τοῦ κανόνος ἡ διάμετρος ΑΒ ἥτις διαιρεῖ ταύτην εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἡ ἐπὶ ταύτης κάθετος ΓΔ ὑψουμένη διὰ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ κανόνος (177 προβ. Στ.) διαιρεῖ ταύτην εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (177 προβ. η')· ἄγεται ἡ διάμετρος ΕΖ καὶ ἡ ἐπ' αὐτῆς κάθετος ΗΘ, καὶ οὕτω ἡ περιφέρεια διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη. Ἄγεται ἡ διάμετρος ΙΚ παράλληλος τῆς χορδῆς ΑΓ, ἥτις ὅμως δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ χαραχθῇ, καὶ τῇ ἐκτελέσει ἐπὶ ταύτης τῶν αὐτῶν ἐργασιῶν ὡς ἐπὶ τῆς ΑΒ, διαιρεῖται ἡ περιφέρεια εἰς 16 ἴσα μέρη. Διὰ τῆς δὶς ἰδίας κατασκευῆς, πρῶτον μὲν ἐπὶ διαμέτρου παραλλήλου τῆς χορδῆς ΑΚ, καὶ κατόπιν ἐπὶ παραλλήλου τῆς ΙΖ, διαιρεῖται ἡ περιφέρεια εἰς 32 ἴσα μέρη. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς ἐργασίας ταύτης ἡ περιφέρεια δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς ἄπειρον ἀριθμὸν ἀρτίων ἴσων μερῶν.

Εἰς μικροὺς κύκλους προτιμώτερον ἐστὶ μετὰ τὴν ὡς ἄνω διαίρεσιν τῆς περιφερείας εἰς 8 ἴσα μέρη, ἡ διαίρεσις νὰ ἐξακολουθήσῃ ἐπὶ τῶν μερῶν τούτων διὰ τοῦ διαβήτου.

β'. Ἡ διαίρεσις γωνίας ἢ τόξου εἰς τρία ἴσα μέρη δὲν ἐπιλύεται γεωμετρικῶς ἐκτὸς ἂν ἡ γωνία εἶναι ὀρθή. (Σχ. 99). Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει μὲ κέντρα Β καὶ Γ, καὶ ἀκτῖνα τὴν τοῦ τόξου, χαράσ-

σονται δύο τόξα τέμνοντα τοῦτο εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἅτινα εἰσὶ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τοῦ τόξου τούτου εἰς τρία ἴσα μέρη.

γ'. Ἐκ τούτου προκύπτει καὶ ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς 12 ἴσα μέρη (Σχ. 100), διότι ἀγομένων δύο διαμέτρων καθέτων πρὸς ἀλλήλας ΑΒ καὶ ΓΔ, διαιρεῖται κατὰ τὸν ἄνω τρόπον ἕκαστον τέταρτον αὐτῆς εἰς τρία ἴσα μέρη.

δ'. Ἵνα διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς 6 ἴσα μέρη, μεταφέρεται ἑξάκις ἐπὶ ταύτης τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος (144). Ἀνὰ δύο δὲ λαμβανόμεναι αἱ διαιρέσεις αὗται, παρέχουσι τὴν διαίρεσιν τῆς περιφερείας εἰς τρία ἴσα μέρη.

Ἡ τοιαύτη διαίρεσις τῆς περιφερείας δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τοῦ ὀρθογωνίου οὗτινος ἡ μία γωνία εἶναι 60° (Σχ. 101).

Χαράσσεται ἡ διάμετρος ΑΒ διὰ τῆς ὑποτεινούσης τοῦ ὀρθογωνίου, οὗτινος ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν στηρίζεται ἐπὶ κανόνος. Τούτου μένοντος ἀκινήτου στρέφεται τὸ ὀρθογώνιον εἰς θέσιν ΘΔΓ καὶ χαράσσεται ἡ ΓΔ. Στρέφεται ἀκολούθως εἰς θέσιν ΑΕΗ καὶ χαράσσεται ἡ ΕΖ, καὶ οὕτω διαιρεῖται ἡ περιφέρεια ἄνευ διαβήτου εἰς 6 ἴσα μέρη. Ἐὰν ἐπαναληφθῇ ἡ αὐτὴ ἐργασία καὶ ἐπὶ ἑτέρας διαμέτρου καθέτου τῇ ΑΒ, ἡ περιφέρεια θέλει διαιρεθῇ εἰς 12 ἴσα μέρη.

ε'. Διαιρέσαι περιφέρειαν εἰς 5 ἴσα μέρη. (Σχ. 102). Ἄγεται ἡ διάμετρος ΑΒ, καὶ ἡ ΔΓ κάθετος ἐπὶ ταύτης· ἐκ τοῦ σημείου Ε μέσου τῆς ΓΒ ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνα ΕΔ, γράφεται τόξον τι ΖΔ, τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ ΖΔ μεταφερομένη πέριξ τῆς περιφερείας διαιρεῖ ταύτην εἰς 5 ἴσα μέρη. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας ἐστὶν 72^{0} ἀκριβῶς, δύναται ἡ διαίρεσις νὰ γίνῃ διὰ τοῦ ἀναγωγέως.

Καὶ ἐν γένει πᾶσα διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς μέρη ἴσα, ὧν ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖ τὸν 360, δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀναγωγέως.

ϛ'. Πρὸς ἐγγραφὴν τετραγώνου εἰς κύκλον, ἑνοῦνται αἱ κορυφαὶ δύο καθέτων ἀλλήλαις διαμέτρων. Διὰ τῆς διχοτομήσεως δὲ τῶν ἀνταποκρινομένων τόξων, καὶ τῆς ἀνὰ δύο ἑνώσεως τῶν μέσων αὐτῶν, ἐγγράφεται τὸ κανονικὸν ὀκτάγωνον (Σχ. 103).

Ἡ ἐγγραφὴ τοῦ τετραγώνου, ὀκταγώνου κλπ. δύναται νὰ γίνῃ διὰ μόνου τοῦ ὀρθογωνίου τῶν 45^{0}, κατὰ τὸ ἀνωτέρω δ' πρόβλημα.

ζ'. Κατασκευάσαι κανονικὸν ὀκτάγωνον οὗ ἡ πλευρὰ ἰσοῦται δεδομένῃ τινὶ εὐθείᾳ Α (Σχ. 104).

Γράφεται περιφέρεια ἀκτῖνος κατὰ βούλησιν ΟΑ ἐν ᾗ ἐγγράφεται κανονικὸν ὀκτάγωνον ἢ μόνον πλευρά τις ΑΒ τοῦ ὀκταγώνου τούτου. Ἔκ τινος σημείου Ι ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ ἄγεται Ιλ παράλληλος τῆς ΑΒ καὶ λαμβάνοται Ιλ=Α. Ἄγεται λα παράλληλος τῇ ΙΟ, καὶ μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα Οα γράφεται περιφέρεια κύκλου, ἧς τὸ ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον αβγδε ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

Ἡ κατασκευὴ αὕτη ἐστὶν ἐφαρμόσιμος πρὸς κατασκευὴν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου οὗ ἡ πλευρὰ ἐστὶ δεδομένη.

Πρὸς κατασκευὴν ὅμως κανονικοῦ ἑξαγώνου δεδομένης πλευρᾶς, γράφεται κύκλος μὲ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν ταύτην, καὶ τὸ ἐγγραφόμενον εἰς τοῦτον κανονικὸν ἑξάγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον (180, προβλ. δ.)

η'. Κατασκευάσαι κανονικὸν ἑξάγωνον ἐπὶ δεδομένης ἀκινήτου εὐθείας ΑΒ (Σχ. 105), ὡς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς δεδομένης εὐθείας ὡς κέντρων καὶ ἀκτῖνα αὐτὴν ταύτην, γράφονται δύο τόξα τεμνόμενα εἰς Ο, ὅπερ ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ἐν ᾗ τὸ ζητούμενον κανονικὸν ἑξάγωνον ἐστὶν ἐγγεγραμμένον. Μὲ Γ καὶ Ζ ὡς κέντρα καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν, γράφονται δύο τόξα τέμνοντα τὴν περιφέρειαν εἰς Δ καὶ Ε, ἡ ἕνωσις πάντων τῶν τομῶν τούτων παράγει τὸ ζητούμενον ἑξάγωνον.

θ'. Κατασκευάσαι ἰσόπλευρον τρίγωνον δεδομένης πλευρᾶς Α.

Κατασκευάζεται ὡς (177, προβλ. δ, 3ον.), τῇ λήψει τῶν πλευρῶν α, ϐ, γ=Α.

ι'. Κατασκευάσαι δωδεκάγωνον ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΑΒ ὡς πλευρᾶς αὐτοῦ (Σχ. 106).

Ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ὑψοῦται ἡ κάθετος ΓΟ, καὶ ἐκ τοῦ Α ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνα ΑΒ, γράφεται τόξον τέμνον τὴν κάθετον εἰς Δ. Κέντρον Δ, καὶ ἀκτῖνα ΔΑ=ΔΒ, γράφεται περιφέρεια ἧς τὸ ἐγγεγραμμένον δωδεκάγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον.

ια'. Ἐγγράψαι εἰς κύκλον κανονικὸν δεκάγωνον, καὶ κατόπιν πεντάγωνον (Σχ. 107).

Ἄγονται δύο κάθετοι διάμετροι ΟΑ,ΟΒ. Ἐπὶ τῆς ΟΒ ὡς διαμέ-

τρου γράφεται κύκλος ο' καὶ ἑνοῦται Αο', ὁπότε ΑΔ=ΑΓ ἐστὶν ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου δεκαγώνου, διότι ἰσοῦται μὲ τὸ μεγαλείτερου μέρος τῆς ἀκτῖνος ΟΑ, διαιρουμένης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. (138, 139, 144).

Ἡ παράτασις τοῦ τόξου ΔΓ ἄχρις Ε καὶ ἕνωσις ΔΕ, δίδει τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου.

Ἐπειδὴ τὸ τόξον τοῦ ἑξαγώνου ἐστὶ τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας, τὸ δὲ τοῦ δεκαγώνου τὸ $\frac{1}{10}$ ταύτης ἕπεται ὅτι $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$, ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου τοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου ἐκ τοῦ τοῦ ἑξαγώνου, δίδει τὸ τόξον τὸ ὑποτεῖνον τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Ἡ πλευρὰ ὅθεν αὕτη εὑρίσκεται εὐκόλως.

181. Πρὸς περιγραφὴν κανονικοῦ πολυγώνου εἰς δεδομένον κύκλον, ἀρκεῖ εἰς τοῦτον νὰ ἐγγραφῇ πολύγωνον κανονικὸν ἰσαρίθμων πλευρῶν, καὶ ἐκ τοῦ μέσου τῶν ὑποτεινόντων τὰς πλευρὰς τούτου τόξων ν' ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι (178, γ) εἰς τὴν περιφέρειαν, αἵτινες συναντώμεναι διαδοχικῶς, ὁρίζουσι περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον (145) (Σχ. 103).

182. α'. Ἐγγράψαι κανονικὸν ὀκτάγωνον ἐντὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ (Σχ. 108).

Ἄγονται αἱ διαγώνιοι, καὶ ἐκ τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ ὡς κέντρων καὶ ἀκτῖνα ΑΟ, γράφονται τόξα τέμνοντα τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ ζητουμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου.

β'. Καλύψαι ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν διὰ κανονικῶν πολυγώνων.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν συνακολούθων γωνιῶν πέριξ σημείου τινὸς ἐπὶ ἐπιπέδου, ἰσοῦται 4 ὀρθαῖς (130), πᾶν κανονικὸν πολύγωνον οὗτινος ἡ γωνία περιέχεται ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν εἰς 4 ὀρθάς, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς κάλυψιν ἐπιπέδου.

Δύναται ὅθεν νὰ γίνῃ χρῆσις

1ον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου οὗ ἡ γωνία ἐστὶ $\frac{2}{3}=\frac{4}{16}$ τῆς ὀρθῆς, (Σχ. 109).

2ον τοῦ τετραγώνου οὗ ἡ γωνία ἐστὶ $\frac{4}{4}$ τῆς ὀρθῆς, (Σχ. 110).

3ον τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου οὗ ἡ γωνία ἐστὶ $\frac{2\times4}{6}=\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς, (Σχ. 111).

Ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου οὖσα $\frac{2\times6}{8}=\frac{3}{2}$ τῆς ὀρθῆς, δὲν περιέχεται ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν εἰς 4 ὀρθάς, ὥστε δὲν δύναται

νὰ γίνῃ χρῆσις τοῦ ὀκταγώνου, οὐχ ἧττον ὅμως συνδυαζόμενον τὸ ὀκτάγωνον μετὰ τοῦ τετραγώνου εἰς τρόπον ὥστε δύο γωνίαι τοῦ ὀκταγώνου καὶ μία τοῦ τετραγώνου νὰ κεῖνται περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ δίδει $\frac{3}{2}\times2+1=4$ ὀρθαί, κατορθοῦται ἡ διὰ κανονικῶν ὀκταγώνων κάλυψις τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 112).

Αἱ διατάξεις αὗται εἰσὶν εἰς καθημερινὴν χρῆσιν παρὰ τοῖς πλινθοστρώταις.

183. α′. Κατασκευάσαι τετράγωνον, ἴσον τῇ διαφορᾷ δύο δεδομένων τετραγώνων, πλευρῶν α καὶ β (Σχ. 113).

Ἐπὶ δύο κατ' ὀρθὴν γωνίαν τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ λαμβάνεται ΑΒ=α, καὶ μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα β διαγράφεται τόξον τέμνον τὴν ΑΓ εἰς Γ, ΑΓ δ' ἐστὶν ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, διότι $ΑΓ^2=β^2-α^2$ (142). Ἐπίσης ἠδύνατο νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα τοῦτο, διὰ τῆς ἐγγραφῆς γωνίας μὲ πλευρὰν α, ἐντὸς ἡμικυκλίου οὗ β ἐστὶν ἡ διάμετρος.

Κατασκευάσαι τετράγωνον ἴσον μὲ τὴν κατ' ἄθροισμα καὶ κατὰ διαφορὰν ἕνωσιν πλειόνων τετραγώνων.

Ἔστωσαν α, β, γ, δ, αἱ διάφοροι πλευραὶ τῶν δεδομένων τετραγώνων· πρόκειται ὅθεν εὑρεῖν ἕτερον Κ, ἔχον τὴν σχέσιν $Κ^2=α^2+β^2+γ^2-δ^2$. (Σχ. 114).

Ἄγονται δύο εὐθεῖαι κάθετοι μεταξύ των ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσαι α καὶ β καὶ ἑνοῦται ΒΓ. Εἰς Γ ὑψοῦται κάθετος καὶ λαμβάνεται ΓΔ=γ, καὶ ἑνοῦται ΔΒ, ἐφ' ἧς ὡς διαμέτρου γράφεται ἡμιπεριφέρεια. Ἐπὶ ταύτης λαμβάνεται ΔΕ=δ, ἑνοῦται ΒΕ, καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, διότι

$$\overline{ΒΓ}^2=α^2+β^2$$
$$\overline{ΒΔ}^2=\overline{ΒΓ}^2+γ^2=α^2+β^2+γ^2$$
$$\overline{ΒΕ}^2=\overline{ΒΔ}^2-δ^2=α^2+β^2+γ^2-δ^2.$$

β′. Κατασκευάσαι ὀρθογώνιον ἴσον δεδομένῳ τετραγώνῳ, καὶ οὗτινος αἱ δύο διαστάσεις, σχηματίζουσι γινόμενον Α×Β (Σχ. 115). Ἐπὶ εὐθείας ΑΒ ἴσης τῷ ἀθροίσματι τῶν δεδομένων γραμμῶν γράφεται ἡμιπεριφέρεια. Ὑψοῦται κάθετος εἰς Γ, καὶ λαμβάνεται ΓΔ =γ τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραγώνου. Ἡ ἐκ Δ παράλληλος τῆς ΑΒ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς Ε, ἐξ οὗ καταβιβάζεται ἡ κάθετος ΕΖ. Αἱ

δύο πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου εἰσὶν ΑΖ καὶ ΖΒ, διότι $\overline{\mathrm{EZ}}^2$ ἢ $\gamma^2 = \mathrm{AZ} \times \mathrm{ZB}$.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν ἐπιδέχεται λύσεως παρὰ ἑνόσῳ $\gamma < \frac{\mathrm{AB}}{2}$.

Ἐὰν αἱ κορυφαὶ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, χρησιμεύσωσιν ὡς κορυφαὶ δύο ἰσοπλεύρων τριγώνων, αἱ πλευραὶ τούτων ἀνὰ δύο τεμνόμεναι, σχηματίζουσι κανονικὸν ἀστερίσκον μὲ ἓξ κορυφάς. (Σχ. 116).

Πρὸς διαίρεσιν τῆς περιφερείας εἰς 7 ἴσα μέρη, (Σχ. 117) ἐπὶ τοῦ μέσου ἀκτῖνος τινος ΟΑ ὑψοῦται ἡ κάθετος ΓΔ, ἧς τὸ ἥμισυ ΓΕ ἐστὶ τὸ τόξον τοῦ $\frac{1}{7}$ τῆς περιφερείας. Ἡ μέθοδος αὕτη δὲν εἶναι μαθηματικῶς ἀκριβής, πλὴν παρέχει ἀρκοῦσαν ἀκρίβειαν, ἵνα ᾖ ἐν χρήσει ἐν τῇ ἐφαρμογῇ.

184. Τὰ σχήματα 118, 119, 120, 121, 122 εἰσὶν αἱ ἀναπτύξεις τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων. Καὶ τὰ μὲν 118, 120, 122 χαράσσονται διὰ τοῦ ὀρθογωνίου τῶν 60°, τὸ τοῦ δωδεκαένδρου ὅμως (Σχ. 121) χαράσσεται ὡς ἑξῆς.

Μετὰ τὴν χάραξιν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου Π, προεκβάλλονται αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, ἄχρις οὗ συναντηθῶσιν ἀνὰ δύο, διὰ τῶν κορυφῶν δὲ τούτων διέρχεται περιφέρεια. Διὰ παραλλήλων ἐκ τῶν κορυφῶν τούτων τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, χαράσσονται πέριξ αὐτοῦ πέντε ἴσα πεντάγωνα, καὶ οὕτω εὑρίσκεται τὸ ἥμισυ τῆς ἀναπτύξεως τοῦ δωδεκαέδρου. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἑτέρου ἡμίσεως, παρατείνεται ἡ αϐ, λαμβάνεται γδ=αϐ, καὶ ἐπὶ τῆς γδ ὡς χορδῆς γράφεται περιφέρεια ἴση τῇ προηγουμένῃ, ἐν ταύτῃ δὲ διὰ παραλλήλων τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων τοῦ πρώτου ἡμίσεως τῆς ἀναπτύξεως, προσδιορίζεται τὸ δεύτερον ἥμισυ τῆς ἀναπτύξεως τοῦ δωδεκαέδρου.

185. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα δεδομένης τινος σφαίρας. (Σχ. 123.)

Λαμβάνονται κατ' ἀρέσκειαν δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Α καὶ Β, καὶ ἐκ τούτων ὡς κέντρων καὶ κατὰ βούλησιν ἀκτῖνα, γράφονται δύο τόξα τεμνόμενα εἰς Δ καὶ Δ'. Μὲ τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου προσδιορίζεται καὶ τρίτον σημεῖον Δ''. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Δ Δ' Δ'', ἀπέχουσιν ἰσάκις τῶν Α καὶΒ, ἕπεται ὅτι ταῦτα εὑρίσκονται ἐπὶ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, καθέτου ἐπὶ τοῦ μέ-

σου τῆς ΑΒ, ὥστε ἂν κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τρίγωνον, οὗ αἱ πλευραὶ νὰ ὦσι τὰ τόξα ΔΔ', Δ'Δ'' ΔΔ'', ὁ περιγεγραμμένος εἰς τοῦτο κύκλος, ἔσεται ἴσος μεγίστῳ κύκλῳ τῆς σφαίρας, καὶ ἑπομένως ἡ ἀκτὶς τούτου ἔσεται ἡ τῆς σφαίρας.

Ἡ κατασκευὴ τετραγώνου ἴσου μὲ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, δὲν δύναται νὰ κατορθωθῇ διὰ στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν, οὐχ' ἧττον ὅμως ὁ ἑπόμενος τρόπος ἐπιλύει τὸ πρόβλημα τοῦτο μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως, διότι ἡ διαφορὰ τούτου ἐκ τῆς μαθηματικῆς ἐπιλύσεως, μόλις ἄρχεται ἀπὸ τοῦ πέμπτου δεκαδικοῦ ψηφίου ὡς δεικνύει ὁ ὑπολογισμός.

Ἔστω ἡ σφαῖρα Ο (Σχ. 124). Εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΒ ἄγεται ἐφαπτομένη ἡ ΒΓ. Λαμβάνεται ΟΗ ἴσον τῷ ἕκτῳ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ, καὶ μὲ κέντρον Η καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, γράφεται τόξον ὅπερ τέμνει τὴν ἐφαπτομένην εἰς Γ, ἑνοῦται ΑΓ, καὶ ἡ χορδὴ τοῦ τόξου ΔΒ ἐστὶν ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

186. Εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν θόλων, ἐκτὸς τῶν κυκλικῶν καὶ ἐλλειπτικῶν καμπύλων, γίνεται χρῆσις καὶ ἑτέρων πολυκέντρων τοιούτων. Διάφοροι εἰσὶν οἱ τρόποι τῆς διαχαράξεως αὐτῶν, οἱ συνηθέστεροι τῶν ὁποίων εἰσὶν οἱ ἀκόλουθοι.

Ἐκ τοῦ Γ (Σχ. 125) καταβιβάζεται ἡ κάθετος ΓΔ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἥτις διχοτομεῖ ταύτην εἰς Ε, ἐκ τοῦ ὁποίου ὡς κέντρου γράφεται ἡμικύκλιον ΑΗΒ. Τὸ ἀπόστημα ΗΓ διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη, καὶ λαμβάνεται ΓΖ ἴσον μὲ ἓν τούτων. Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡς κέντρων, καὶ ἀκτῖνα ΕΖ, διαγράφονται τὰ τόξα ΘΙ καὶ ΚΛ. Ἐπίσης ἐκ τῶν τομῶν τούτων μετὰ τῆς ΑΒ ὡς κέντρων καὶ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα, γράφονται τὰ τόξα ΑΙ καὶ ΒΛ ἅτινα εἰσὶ μέρη τῆς ζητουμένης καμπύλης. Ἐκ τῶν σημείων Ι καὶ Λ ὡς κέντρων καὶ ἀκτῖνα ΙΛ, γράφονται δύο τόξα τεμνόμενα ἐπὶ τῆς κατακορύφου εἰς Δ, ἐκ τοῦ ὁποίου ὡς κέντρου, καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν ὡς ἄνω, γραφεται τὸ τόξον ΙΛ, ὅπερ συμπληροῖ τὴν ζητουμένην καμπύλην, ἥτις ἐστὶν ἡ ΑΙΛΒ.

Ἡ καμπύλη αὕτη χαράσσεται διὰ τριῶν κέντρων, ἐν χρήσει ὅμως προσέτι ἐστὶ καὶ ἡ ἑξῆς χαρασσομένη διὰ πέντε κέντρων (Σχ. 126).

Ἔστωσαν οἱ δύο ἄξονες ΑΒ καὶ ΒΓ. Λαμβάνεται ΓΗ ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὕψους ΓΔ, καὶ μὲ κέντρον Η καὶ ἀκτίνα ΗΔ=Ρ γράφεται τόξον τι ΔΜ. Διαιροῦνται ΑΓ καὶ ΓΒ εἰς τρία ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τῶν διαιρέσεων Ι καὶ Κ, καὶ ἀκτίνας ΙΑ=ΚΒ=ρ, γράφονται τὰ τόξα ΑΤ, ΒΤ′. Εὑρίσκεται κατόπιν μέση ἀνάλογος ἀκτὶς $Ρ'=\sqrt{Ρρ}$, καὶ ἐκ τοῦ Ι ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνα ΙΟ=Ρ′—ρ γράφεται τόξον τι, καὶ ἐκ τοῦ Η ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνα Ρ—Ρ′, γράφεται ἕτερον τόξον τέμνον τὸ πρῶτον εἰς Ο. Ἐκ τοῦ Ο ὡς κέντρου, καὶ ἀκτῖνα ΟΤ= ΟΛ=$Ρ'=\sqrt{Ρρ}$ γράφεται τὸ τόξον ΤΛ, καὶ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς γενομένης διὰ τὸ σημεῖον Ο′, συμπληροῦται ἡ πεντάκεντρος καμπύλη ΑΤΛ ΔΜΤ′Β, ἥτις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπιτυχῶς, πλὴν δέον νὰ χαράσσηται μετὰ προσοχῆς, διὰ τὴν καλὴν τῶν τόξων συνάντησιν.



ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΟΣ ΤΕΧΝΙΤΟΥ
ἢ
ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.
ΓΕΝΙΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ.

Ὁρισμὸς καὶ κατάστασις τῶν σωμάτων. — Μᾶζα καὶ βάρος αὐτῶν. — Ὁρισμὸς καὶ μέτρον τῆς δυνάμεως. — Κίνησις ὁμαλὴ καὶ μεταβαλλομένη. — Περὶ ταχύτητος εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιστάσεις. — Ἐφαρμογὴ τῆς ὁμαλῆς μεταβαλλομένης κινήσεως εἰς τὴν πτῶσιν τῶν σωμάτων. — Μηχανικὸν ἔργον. — Ποσότης κινήσεως. — Κεντρόφυξ δύναμις. — Ζῶσα δύναμις.

Ὁρισμὸς καὶ κατάστασις τῶν Σωμάτων.

187. Τὰ σώματα πάντα διαιροῦνται εἰς τρεῖς τάξεις, εἰς στερεά, εἰς ὑγρὰ καὶ εἰς ἀέρια.

Καὶ στερεὰ μὲν εἰσὶν οἱ λίθοι, τὰ ξύλα, τὰ μέταλλα κλ. ὑγρὰ τὸ ὕδωρ, ὁ οἶνος, τὰ πνευματώδη ποτὰ κλ. ἀέρια δὲ ὁ ἀήρ, τὸ ὀξυγόνον, τὸ ὑδρογόνον καὶ οἱ σχηματιζόμενοι ἐκ τῆς τῶν ρευστῶν θερμάνσεως ἀτμοί.

Σῶμά τι εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν ἢ κίνησιν, καθ' ὅσον εἰς δύο τινὰς διαδοχικὰς στιγμάς, ἅπαντα τὰ σημεῖα αὐτοῦ κατέχουσιν ἢ οὐ τὴν αὐτὴν ἐν τῷ διαστήματι θέσιν.

Σῶμά τι θεωρεῖται ἐν ἠρεμίᾳ εὑρισκόμενον, ὁπόταν δὲν μεταβάλλει θέσιν σχετικῶς πρὸς τὰ περὶ αὐτὸ σώματα θεωρούμενα ἐπίσης ἐν ἠρεμίᾳ, τουτέστιν ὅταν ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἐκ τούτων μένῃ ἀμετάβλητος. Ὅθεν ἡ κατάστασις τῆς ἠρεμίας ἐστὶ σχετική, διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον σῶμά τι ἐπὶ τῆς τραπέζης ἐντὸς ἀτμοπλοίου, ἐστὶν ἐν ἠρεμίᾳ, μολοντοῦτο αὐτὸ ὡς καὶ πάντα τὰ περὶ αὐτό, ὑπόκεινται εἰς τὴν γενικὴν τοῦ ἀτμοπλοίου κίνησιν, καὶ ἔτι

γενικώτερον, πᾶν σῶμα ἐπὶ τῆς γῆς ὑπόκειται εἰς τὴν γενικὴν αὐτῆς περὶ τὸν ἄξονα κίνησιν. Ἀπόλυτος ὅθεν ἠρεμία δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ, ἡ δὲ φαινομένη ἠρεμία σώματός τινος ἐστὶν ὅλως σχετική.

Ἐπίσης καὶ ἡ κίνησις ὁριζομένη ἐκ τῆς ἀποστάσεως τοῦ κινουμένου σώματος πρὸς τὰ περὶ αὐτὸ, ἐστὶν ὅλως σχετικὴ ἐν τῇ μηχανικῇ, ἐν ᾗ οὐδόλως λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ ῥηθεῖσα γενικὴ κίνησις, ἣν τοῦτο μετὰ πάντων τῶν περὶ αὐτὸ κέκτηται.

188. Προκειμένου περὶ κινήσεως σώματός τινος, ὁ ὄγκος τούτου θεωρεῖται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον συγκεντρωμένος, εἰς ἓν μόνον σημεῖον αὐτοῦ. Ἡ γραμμὴ ὅθεν ἣν διαγράφει κατὰ τὴν κίνησίν του τὸ σημεῖον τοῦτο ἐν τῷ διαστήματι καλεῖται *τροχιά*· καθ' ὅσον δὲ ἡ γραμμὴ αὕτη ἐστὶν εὐθεῖα ἢ καμπύλη, ἡ κίνησις τοῦ σώματος ἐστὶν εὐθύγραμμος ἢ καμπυλόγραμμος.

189. Ἡ πεῖρα κατέδειξε νόμον τινα, εἰς ὃν πάντα τὰ σώματα ὑπόκεινται, καὶ ὅστις καθιστᾷ πρώτην τινα καὶ θεμελιώδη ἀρχὴν τῆς Μηχανικῆς. Ὁ νόμος οὗτος ὃν ἀνεκάλυψεν ὁ Νεύτων, συνίσταται εἰς τὴν ἰδιότητα ἣν κέκτηται ἡ ὕλη τοῦ διατηρεῖσθαι ἐν ᾗ καταστάσει εὑρίσκεται. Οὕτω σῶμα τι δὲν δύναται ἀφ' ἑαυτοῦ νὰ μεταβάλλῃ τὴν κατάστασιν τῆς ἠρεμίας ἐν ᾗ εὑρίσκεται εἰς τὴν τῆς κινήσεως, ἢ τροποποιήσῃ τὴν δοθεῖσαν αὐτῷ ἀρχικὴν διεύθυνσιν.

Ἡ ἰδιότης αὕτη τῆς ὕλης καλεῖται *ἀδράνεια*.

Ταύτης ἕνεκα σῶμά τι ὑπεῖκον εἰς ἀρχικήν τινα ὤθησιν, ἤθελε κινηθῇ εὐθυγράμμως, ὁμοιομόρφως, καὶ ἀεννάως ἐν τῷ διαστήματι, ἐὰν ἕτερόν τι αἴτιον δὲν ἤθελε μεταβάλλει τὴν κίνησιν ταύτην. Παράδειγμα τοιαύτης κινήσεως ἐν τῇ φύσει δὲν ὑπάρχει, διότι πλεῖστα αἴτια ἐπιδρῶσι πρὸς μεταβολὴν τῆς κινήσεως ταύτης ὡς ἡ βαρύτης, ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος κλ.

190. *Μάζα καὶ βάρος τῶν σωμάτων*. Μάζα σώματός τινος ἐστὶν ἡ ποσότης τῆς ὕλης ἣν τὸ σῶμα τοῦτο ἐμπεριέχει, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν ἀπείρως μικρῶν ἀτόμων τῶν συνιστώντων αὐτό. Ὄγκος δὲ σώματός τινος ἐστὶν ὁ παρ' αὐτοῦ κατεχόμενος ἐν τῷ διαστήματι χῶρος. Καὶ ὁ μὲν ὄγκος δύναται νὰ ἐκτανθῇ ἢ συμπτυχθῇ, ὡς εἰς τὸ ἐλαστικὸν κόμμι, ἡ μάζα ὅμως ἐστὶν ἀμετάβλητος·

191. Πᾶν σῶμα ἐλεύθερον ἐν τῷ διαστήματι, φέρεται ἐκ φυσι-

κῆς τινος δυνάμεως πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς. Τὸ παράγον τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἄγνωστον αἴτιον καλεῖται *βαρύτης*.

Ὅθεν ἡ διεύθυνσις τῆς βαρύτητος, ἤτοι σώματός τινος καταπίπτοντος ἢ φερομένου πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ἐστὶ κατακόρυφος (130).

192. Ὅταν σῶμά τι ὑποκείμενον εἰς μόνην τὴν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος, τηρεῖται ἐν ἠρεμίᾳ δι' ἐμποδίου τινος, ἡ παραγομένη πίεσις ἐστὶ τὸ βάρος τοῦ σώματος τούτου. Δέον νὰ διακρίνηται καλῶς ἡ βαρύτης τοῦ βάρους, διότι ἡ μὲν βαρύτης ἐμφαίνει γενικόν τι αἴτιον ὅπερ φέρει ἅπαντα τὰ σώματα πρὸς τὴν γῆν, τὸ δὲ βάρος ἐστὶ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐνεργείας τοῦ γενικοῦ αἰτίου ἐπὶ τοῦ ἰδίου σώματος.

Πρὸς σύγκρισιν τοῦ βάρους διαφόρων σωμάτων μεταξύ των, γίνεται χρῆσις τοῦ στατῆρος, τοῦ ζυγοῦ κλ. περὶ ὧν κατωτέρω, ὡς μονὰς δὲ λαμβάνεται τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ ὑποδεκαμέτρου ἀποσταγμένου ὕδατος εἰς 4^0, ἤτοι τὸ γράμμον, διὰ μεγαλείτερα δὲ βάρη τὸ χιλιόγραμμον (86).

193. *Ὁρισμὸς καὶ μέτρον τῆς δυνάμεως*. Ἵνα σῶμά τι ἠρεμοῦν τεθῇ εἰς κίνησιν, ἢ κινούμενον μεταβάλλει τὴν κίνησίν του, δέον νὰ ἐνεργήσῃ ἐπ' αὐτοῦ ἐξωτερικόν τι αἴτιον. Τὸ αἴτιον τοῦτο ὅπερ θέτει ἠρεμοῦν τι σῶμα εἰς κίνησιν ἢ μεταβάλλει τὴν κίνησιν αὐτοῦ κινουμένου, καλεῖται *δύναμις*. Ἡ βαρύτης ἥτις τείνει νὰ φέρῃ τὰ σώματα πρὸς τὴν γῆν ἐστὶ δύναμις.

Πλεῖσται ὅσαι δυνάμεις ὑπάρχουσιν, ὡς ἡ φέρουσα τὰ σώματα πρὸς τὴν γῆν, ἡ ἐπαναφέρουσα καμφθεῖσαν λεπίδα εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτῆς θέσιν, ἡ ὠθοῦσα τὴν σφαῖραν ἐκ τοῦ στομίου τοῦ πυροβόλου, καὶ ἐν γένει πᾶν αἴτιον ὅπερ προξενεῖ ἢ μεταβάλλει κίνησίν τινα.

Ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως ὁ ἄνθρωπος ἀντιλαμβάνεται ὅτι αὕτη ἔχει ἐπίτασιν καὶ ῥοπήν.

Ὅθεν φυσικῶς ἡ μὲν ῥοπὴ τῆς δυνάμεως δύναται νὰ παρασταθῇ δι' εὐθείας κατὰ τὴν διεύθυνσιν πρὸς ἣν αὕτη τείνῃ νὰ ὠθήσῃ τὸ σῶμα, ἡ δ' ἐπίτασις αὐτῆς διὰ τοῦ μήκους τῆς εὐθείας ταύτης. Διὰ τῆς παραστάσεως ταύτης αἱ δυνάμεις ὑπάγονται εἰς ὑπολογισμὸν ὡς αἱ λοιπαὶ ποσότητες.

194. Τὸ σημεῖον ἐφ' οὗ ἐνεργοῦσα ἡ δύναμις μεταβάλλει τὴ

κατάστασιν τοῦ σώματος καλεῖται σημεῖον τῆς *ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως*. Διεύθυνσις δ' αὐτῆς ἐστὶν ἡ πρὸς ἣν τείνῃ νὰ κινηθῇ μετὰ τὴν ἐνέργειαν αὐτῆς τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως. Οὕτω (Σχ. 127) δυνάμεώς τινος ἐνεργησάσης ἐπὶ τοῦ σημείου α τοῦ σώματος Α, καὶ δούσης εἰς αὐτὸ κίνησιν πρὸς Κ, ἡ μὲν ΑΚ παριστᾷ τὴν διεύθυνσιν, ἡ δὲ ΑΠ τὴν ἐπίτασιν αὐτῆς, ἥτις ἐστὶ συγκριτικὴ πρὸς ἑτέραν τινὰ ὡς τὴν Α'Π', οὖσαν κατὰ τὸ ἥμισυ μικροτέραν.

195. Πᾶσα δύναμις ἐνεργοῦσα ἐπὶ σώματός τινος, δὲν παράγει πάντοτε κίνησιν, ἐπιφέρει ὅμως ἐπ' αὐτοῦ πίεσιν ἢ θλίψιν. Ἡ βαρύτης δὲν παράγει κίνησιν εἰς λίθον ἐπὶ τῆς τραπέζης, ἐπιφέρει ὅμως ἐπὶ ταύτης πίεσιν. Ἐπίσης ἡ αὐτὴ δύναμις δὲν παράγει κίνησιν εἰς λίθον κρεμάμενον, ἐπιφέρει ὅμως τὴν ἔντασιν τοῦ νήματος δι' οὗ ὁ λίθος κρέμαται.

Πᾶσα δύναμις παράγουσα κίνησίν τινα, καλεῖται κινοῦσα ἢ *κινητήριος δύναμις*, τὸ δὲ κινούμενον σῶμα καλεῖται *κινητόν*.

196. Αἱ δυνάμεις μετρῶνται ἢ συγκρίνονται πρὸς ἀλλήλας διὰ τῶν δυναμογνωμόνων, λαμβανομένου τοῦ χιλιοδραχμίου ὡς μονάδος.

Ὁ δυναμογνώμων ὅστις καὶ εἰς τὸ ἐμπόριον χρησιμεύει πρὸς ζύγησιν, σύγκειται ἐκ χαλυβδίνου ἐλατηρίου μνπ καμφθέντος εἰς σχῆμα υ (Σχ. 128), εἰς τὸν βραχίονα τοῦ ὁποίου ἐστὶ προσκεκολλημένον τοξοειδὲς μετάλλινον τμῆμα λσ, οὗτινος τὸ ἕτερον ἄκρον σ διέρχεται ἐλευθέρως δι' ἐγκοπῆς ἐν τῷ κάτω βραχίονι τοῦ ἐλατηρίου, εἰς τοῦτον δὲ τὸν βραχίονα ἐστὶ προσκεκολλημένον ἕτερον ὅμοιον τμῆμα ΒΔ, οὗτινος τὸ ἕτερον ἄκρον διέρχεται ἐλευθέρως δι' ἐγκοπῆς εἰς τὸν ἄνω βραχίονα εἰς μ. Ἐὰν ἤδη τὸ σύστημα κρεμασθῇ εἰς Α δι' ἀγγίστρου, εἰς δὲ τὸ σ κρεμασθῶσι βάρη διαδοχικῶς 1, 2, 3...χιλιοδραχμίων, καὶ σημειωθῶσιν αἱ διάφοροι θέσεις ἃς λαμβάνῃ ὁ βραχίων μ ἀναλόγως ἑκάστου βάρους, ἀκολούθως δὲ ὑποδιαιρεθῶσιν αἱ διαιρέσεις αὗται, ἕπεται ὅτι θέλει ἀποτελεσθῇ κλίμαξ χρησιμεύουσα πρὸς κατάδειξιν τοῦ κρεμασθέντος βάρους εἰς χιλιοδράχμια. Ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΔ εἰς Γ, ὑπάρχει πτέρνα κωλύουσα τὴν περαιτέρω κάμψιν τοῦ ἐλατηρίου, ὁπόταν τὸ εἰς σ τεθὲν βάρος εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἠδύνατο νὰ θλάσῃ τὸ ἐλατήριον.

Ὁ Δυναμογνώμων (Σχ. 129) ἀπαρτίζεται ἐκ σωλῆνος ἐντὸς τοῦ ὁποίου διέρχεται ῥάβδος ἀπολήγουσα εἰς κεφαλήν, ἔνθα προσαρμό-

ζεται τὸ ἄκρον ἑλικοειδοῦς ἐλατηρίου. Εἰς τὸ ἄνω ἄκρον τῆς ῥάβδον ὑπάρχει δακτύλιος κρεμάνσεως. Ὁ σωλὴν ὅστις κατὰ τὸ ἄνω ἄκρου ἐρείδεται ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου, φέρει εἰς τὸ κάτω ἄγγιστον, ἐφ' οὗ κρέμανται τὰ ζυγισθησόμενα βάρη. Καθ' ὅσον τὸ κρεμάμενον βάρος ἐστὶ μεγαλείτερον ἢ μικρότερον, τὸ ἄνω μέρος τῆς ῥάβδου ἐκκαλύπτεται κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἀπὸ τὸν σωλῆνα. Ἀνάλογα ὅθεν βάρη τιθέμενα διαδοχικῶς, παρέχουσι τὸ μέσον τῆς ἐπὶ ταύτης χαράξεως κλίμακος ὡς ἐγένετο διὰ τὸν ἄνω δυναμογνώμονα. Ὁ δυναμογνώμων οὗτος εἶναι ἐν χρήσει ἐν τῇ ἀγορᾷ πρὸς ζύγισιν μικρῶν βάρεων.

197. Πᾶσα δύναμις ἀντίθετος οὖσα ἑτέρας, καὶ τείνουσα νὰ ματαιώσῃ τὴν ἐνέργειαν αὐτῆς καλεῖται *ἀντίστασις*. Ὅταν δύο ἢ πλείονες δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ σώματος τινος ἐξουδετεροῦνται μεταξύ των, τουτέστι τὸ σῶμα μένει ὡς εἰ δὲν εὑρίσκετο ὑπὸ τὴν ἐπίῤῥοιαν τούτων, τότε λέγεται ὅτι αὗται *ἰσοῤῥοποῦσι*, τὸ δὲ σῶμα εὑρίσκεται ἐν *ἰσοῤῥοπίᾳ*. Οὕτω δύο ἵπποι τῆς αὐτῆς δυνάμεως τείνοντες νὰ σύρωσιν ἅμαξαν, ὁ μὲν κατ' ἀντίθετον ἔννοιαν τοῦ δὲ ἰσοῤῥοποῦσι, ἡ δὲ ἅμαξα εὑρίσκεται ἐν ἰσοῤῥοπίᾳ.

Κίνησις ὁμαλή. — Κίνησις μεταβαλλομένη. — Ταχύτης εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιστάσεις.

198. Ἡ ὑποδιαίρεσις τῶν ὡρῶν εἰς πρῶτα λεπτά, καὶ τούτων εἰς δεύτερα, παρέχει τὸ μέσον τῆς ἐκτιμήσεως τοῦ χρόνου μεταξὺ δύο τινων στιγμῶν, μετὰ τῆς εὐκολίας ἐκείνης μεθ' ἧς μετρῶνται τὰ μήκη ἢ αἱ ἀποστάσεις.

Καλεῖται *διάστημα* ὁ διανυθεὶς δρόμος ἐντὸς χρονικοῦ τινος διαστήματος, τὸ δὲ διανυθὲν διάστημα ὑπὸ κινητοῦ τινος ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου καλεῖται *ταχύτης*. Ἡ ταχύτης ἐκφράζεται γενικῶς εἰς μέτρα.

199. Δυνάμεως ἐνεργησάσης προκύπτει ταχύτης, ἄρα ὑπάρχει κίνησις.

Ἡ κίνησις λέγεται *ὁμαλὴ* ὁπόταν τὸ κινητὸν διανύει ἴσα διαστήματα εἰς ἴσους χρόνους. Τουτέστιν ἐὰν κινητόν τι διανύει 5 μ. εἰς τὸ αον δευτερόλεπτον, 5 μ. ἕτερα ἐπίσης εἰς τὸ δεύτερον δευτερό-

λεπτον, καὶ ἐν γένει ἀνὰ 5 μ. εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον, ἡ κίνησις αὐτοῦ λέγεται ὁμαλή. Προκύπτει ὅθεν ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς ἐκφράσεως τῆς κινήσεως ὅτι τὸ διανυθὲν διάστημα ἐστὶν ἀνάλογον τῆς διαρκείας τοῦ χρόνου, ὥστε ἐὰν Ε κληθῇ τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς χρόνον τινα Τ, καὶ Υ τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ἢ 1″, τουτέστιν ἡ ταχύτης (198), ἕπεται ὅτι

$$E : \Upsilon :: T : 1'' \text{ ἐξ ἧς } (78)$$

$$E = \Upsilon T, \text{ καὶ } T = \frac{E}{\Upsilon}, \text{ καὶ } \Upsilon = \frac{E}{T}.$$

Ὁ πρῶτος τῶν τύπων τούτων δεικνύει ὅτι τὸ διανυθὲν διάστημα ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ταχύτητος ἐπὶ τὸν χρόνον, ὥστε ἂν ἡ ταχύτης κινητοῦ τινος ἐστὶ 3,00 μ. κατὰ δευτερόλεπτον, μετὰ χρόνον 10″ τὸ διανυθὲν διάστημα ἔσεται $A = 3 \times 10'' = 30.00$ μ.

Ὁ δεύτερος τύπος δεικνύει ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου ὃν διήνυσε κινητόν τι ἵνα διατρέξῃ τὸ διάστημα Ε μὲ ταχύτητα Υ, διαιρετέον τὸ διάστημα τοῦτο διὰ τῆς ταχύτητος, ἤτοι $T = \frac{30,00}{3} = 10''$.

Ὁ δὲ τρίτος δεικνύει ὅτι ἡ ταχύτης ἐν τῇ ὁμαλῇ κινήσει, ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τοῦ διανυθέντος διαστήματος διὰ τοῦ δαπανηθέντος χρόνου· ὥστε αὕτη ἐστὶ σταθερά. Ἡ ταχύτης ὅθεν κινητοῦ διανύσαντος 30,00 μ. εἰς 10″ ἐστὶ $\Upsilon = \frac{30,00}{10''} = 3.00$ μ.

200. Ὁ τύπος $E = \Upsilon T$ ἐστὶ γενικός, δι' ὃ καὶ ἕτερόν τι διάστημα E' ἰσοῦται τῇ ταχύτητι Υ' ἐπὶ τὸν χρόνον T', τουτέστιν $E' = \Upsilon' T'$. Διὰ τῆς διαιρέσεως μέλους διὰ μέλους τῶν ἰσοτήτων τούτων, προκύπτει

$$\frac{E}{E'} = \frac{\Upsilon T}{\Upsilon' T'}.$$

Τουτέστι τὰ διανυθέντα διαστήματα δύο διαφόρων ὁμαλῶν κινήσεων εἰσὶ μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν ταχυτήτων ἐπὶ τοὺς δαπανηθέντας χρόνους. Ἐὰν $T = T'$, τουτέστιν οἱ χρόνοι εἰσὶν ἴσοι

$$\frac{E}{E'} = \frac{\Upsilon}{\Upsilon'}$$

τουτέστιν εἰς ἴσους χρόνους τὰ διανυθέντα διαστήματα εἰσὶν ἀνάλογα τῶν ταχυτήτων.

Ἐὰν δὲ τὰ διαστήματα εἰσὶν ἴσα, $υ=υ'$

$$\frac{E}{E'}=\frac{T}{T'}$$

τουτέστιν ὁπόταν ἡ ταχύτης ἐστὶν ἡ αὐτὴ, τὰ διανυθέντα διαστήματα εἰσὶν ἀνάλογα τῶν δαπανηθέντων χρόνων.

201. Ἡ κίνησις λέγεται *μεταβαλλομένη*, ὁπόταν τὰ εἰς ἴσους χρόνους διανυθέντα διαστήματα δὲν εἶναι ἴσα, τουτέστιν ὁπόταν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ, δὲν εἶναι σταθερὰ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως.

202. Ὁπόταν τὸ κινητὸν διατρέχει ἴσα διαστήματα εἰς ἴσους χρόνους, ἐνῷ αἱ συνθῆκαι αὗται δὲν πληροῦνται διὰ τὰ ἐνδιάμεσα τῶν διαστημάτων τούτων μέρη, ἡ κίνησις λέγεται *περιοδικῶς ὁμαλή*.

Τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς ἕνα τῶν ἴσων χρόνων ἐστὶ τὸ διάστημα μιᾶς περιόδου, ὁ δὲ δαπανώμενος χρόνος πρὸς διάνυσιν τοῦ διαστήματος τούτου ἐστὶν ἡ διάρκεια τῆς περιόδου. Ἐὰν ἡ διάρκεια τῆς περιόδου ληφθῇ ὡς μονὰς τοῦ χρόνου, καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὴν μονάδα ταύτην τοῦ χρόνου ὡς ταχύτης Υ, τὸ διανυθὲν διάστημα Ε κατὰ τὸν χρόνον Τ, ὅστις σύγκειται ἐξ ἀκεραίου ἀριθμοῦ διαρκειῶν περιόδων, δίδεται ὡς ἐν τῇ ὁμαλῇ κινήσει διὰ τοῦ τύπου $E=YT$.

203. Ὁπόταν τὸ κινητὸν διανύει εἰς ἴσους χρόνους διαστήματα αὐξομειούμενα κατὰ σταθερὰν ποσότητα, ἡ κίνησις λέγεται *ὁμαλῶς μεταβαλλομένη*.

Τὸ διάστημα ἐν τῇ ὁμαλῶς μεταβαλλομένῃ κινήσει ἰσοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν δύο ἄκρων ταχυτήτων, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς δευτερόλεπτα. Διότι τῆς ταχύτητος αὐξομειουμένης κατὰ σταθερὰν ποσότητα, λαμβάνεται ὁ μέσος ὅρος καὶ ἐφαρμόζεται ὁ τύπος (199). Ὥστε ἂν υ ἐστὶν ἡ ταχύτης κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ θεωρουμένου διαστήματος, καὶ υ' ἡ κατὰ τὸ τέλος, τὸ διάστημα ἔσεται

$$E=\frac{υ+υ'}{2}T.$$

Ὅθεν τὸ διανυθὲν διάστημα ὑπὸ κινητοῦ τινος εἰς 4'', τῆς ταχύτητος οὔσης ἐν μὲν τῇ ἀρχῇ 2,00μ., κατὰ δὲ τὸ τέλος 6,00μ. ἐστὶν

$$E=\frac{2+6}{2}\times 4=16,00^{μ.}$$

Ἐὰν ὅμως ἐν μὲν τῇ ἀρχῇ ἡ ταχύτης ἐστὶν 6,00μ. κατὰ δὲ τὸ τέλος 2,00μ. πάλιν τὸ διάστημα εἰς 4″ ἔσεται.

$$E = \frac{6+2}{2} \times 4 = 16,00.^{\mu.}$$

Ὅθεν καταφαίνεται ὅτι ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας τὸ διάστημα τὸ διανυθὲν, ἐστὶ τὸ αὐτὸ ἐν τῇ ἐπιταχυνομένῃ καὶ ἐπιβραδυνομένῃ κινήσει.

204. Ἡ ταχύτης ἐν τῇ ὁμαλῶς μεταβαλλομένῃ κινήσει, ὅταν αὕτη ἐστὶν ἐπιταχυντικὴ, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος, καὶ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου ἐπὶ τὴν σταθερὰν τῆς ταχύτητος ἐπαύξησιν.

Ἐὰν ὅθεν ἡ ταχύτης ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς κινήσεως ἐστὶν=1, ἡ δὲ ἐπαύξησις 3,00μ. κατὰ δευτερόλεπτον, ἡ ταχύτης μετὰ 8″ ἔσεται

$$\Upsilon = 1 + (8 \times 3) = 25,00^{\mu.}$$

Ἡ δὲ ταχύτης ἐν τῇ ὁμαλῶς μεταβαλλομένῃ κινήσει, ὅταν αὕτη ἐστὶ βραδύνουσα, ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος, καὶ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου ἐπὶ τὴν σταθερὰν μείωσιν τῆς ταχύτητος κατὰ δευτερόλεπτον. Ὅθεν ἡ ταχύτης σώματός τινος ἔχοντος ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς κινήσεως ταχύτητα 22,00μ., καὶ ὑποκειμένης εἰς μείωσιν ταχύτητος 2,00 μ. κατὰ δευτερόλεπτον, ἔσεται μετὰ 10″

$$\Upsilon = 22,00 - (2 \times 10) = 2,00^{\mu.}$$

Ἐὰν ἐζητεῖτο ἡ ταχύτης μετὰ 11″ ὁ τύπος ἤθελεν εἶσθαι

$$\Upsilon = 22,00 - (2 \times 11) = 0.$$

Τουτέστιν ἡ ταχύτης ἤθελεν εἶσθαι 0, ἄρα τὸ κινητὸν ἤθελε σταματίσει μετὰ 11″.

Ἐὰν ἡ μείωσις ἦτο 3,00μ. κατὰ δευτερόλεπτον, ἡ ταχύτης ἤθελεν εἶσθαι $\Upsilon = 22,00 - (3 \times 10) = -8$ (120),
τουτέστι μετὰ 10″, τὸ κινητὸν θέλει ἔχει ταχύτητα 8,00μ. πλὴν κατ' ἀντίστροφον τάξιν, ἤτοι στρέφει πρὸς τὰ ὀπίσω, καὶ ἐπειδὴ δὲν ἐνήργησεν ἀντίθετός τις δύναμις πρὸς τοῦτο, δέον νὰ ὑποτεθῇ ὅτι τὸ κινητὸν ἐσταμάτησε πρὸ τῆς παρελεύσεως τῶν 10″.

205. *Ἐφαρμογὴ τῆς ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως εἰς τὴν πτῶσιν τῶν σωμάτων.* Σῶμά τι ἐλευθέρως καταπίπτον φέρεται ὑπὸ τῆς βαρύτητος πρὸς τὴν γῆν (191)· ἡ βαρύτης ὅθεν ἐνεργεῖ συνεχῶς ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπαυξάνουσα τὴν ταχύτητα τῆς πτώ-

σεως, ἄρα ἡ κίνησις ἐστὶν ὁμαλῶς μεταβαλλομένη ἐπιταχυντική.

Διὰ πειραμάτων ἀπεδείχθη ὅτι κινητὸν ἐλευθέρως καταπίπτον ἐν τῷ κενῷ, διανύει διάστημα κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον 4,90,μ. κέκτηται δὲ ταχύτητα εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ 9,81μ.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὅστις ἐμφαίνει τὴν ταχύτητα ἣν κέκτηται τὸ κινητὸν κατὰ τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου, παριστάνεται διὰ τὴν βαρύτητα διὰ τοῦ γράμματος g.

Ἐπειδὴ ἡ βαρύτης ἐνεργεῖ διαρκῶς καὶ σταθερῶς, ἕπεται ὅτι ὅσας καὶ ὁποίας ὠθήσεις δίδει εἰς τὸ κινητὸν κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον, τοσαύτας καὶ τοιαύτας θέλει δώσει καὶ κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον, τὸ τρίτον κλ. T δευτερόλεπτον, ἄρα ἡ ταχύτης κατὰ τὸ τέλος τῶν δευτερολέπτων τούτων ἔσεται 2g, 3g, 4g..καὶ μετὰ T χρόνον θέλει εἶσθαι $υ=gT$ ·········(1).

Ὥστε ἡ ταχύτης ἐλευθέρου καταπίπτοντος σώματος εἰς δεδομένον χρόνον, δίδεται διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου τούτου ἐπὶ τὸ $g=9,81$.

Κατὰ ταῦτα ἡ ταχύτης κινητοῦ πίπτοντος ἐλευθέρως, μετὰ 12″ ἐστὶν $υ=9.81\times12=117,72$ μ.

Εἰς χρόνον τινα T′ ἡ ταχύτης ἔσεται $υ'=gT'$.

Διὰ τῆς διαιρέσεως τῆς ἐξισώσεως (1) μέλος πρὸς μέλος διὰ ταύτης, προκύπτει $\frac{υ}{υ'}=\frac{gT}{gT'}=\frac{T}{T'}$ ἢ $υ:υ' : : T:T'$,

ὅπερ δεικνύει ὅτι αἱ ταχύτητες εἰσὶν ἀνάλογοι τῶν δαπανωμένων χρόνων.

206. Κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν τῶν σωμάτων, τὸ διάστημα E ἐστὶν ὕψος H, ἑπομένως ὁ τύπος (203) ἐστὶν ὁ

$$E=\frac{υ+υ'}{2}T.$$

Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης ἐν ἀρχῇ τῆς κινήσεως ἐστὶν O, μετὰ δὲ T″, ἐστὶν $υ'=gT$, ὁ τύπος γίνεται

$$H=\frac{gT}{2}T=\tfrac{1}{2}gT^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ὥστε τὸ ὕψος ὅπερ διατρέχει σῶμά τι καταπίπτον εἰς 5″ ἐστὶν

$$H=\tfrac{1}{2}\times9.81\times5^2=122,\ 61^{μ.}$$

Ἐπίσης τὸ διάστημα εἰς χρόνον τινα T′ ἔσεται $H'=\frac{1}{2}gT'^2$.

Τῇ διαιρέσει τῶν ἐξισώσεων τούτων μέλος πρὸς μέλος προκύπτει

$$\frac{H}{H'}=\frac{\frac{1}{2}gT^2}{\frac{1}{2}gT'^2}=\frac{T^2}{T'^2} \text{ ἢ}$$

$$H : H' :: T^2 : T'^2$$

Ἄρα ἐν τῇ ὁμαλῶς μεταβαλλομένῃ κινήσει, ἤτοι ἐν τῇ βαρύτητι, τὰ διανυόμενα διαστήματα εἰσὶν ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν δαπανωμένων χρόνων.

207. Ἐκ τοῦ τύπου (2) ἐξάγεται

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

τουτέστιν ὁ χρόνος ὃν δαπανᾷ σῶμά τι καταπίπτον, ἵνα διατρέξῃ ὕψος A=122, 61^μ· ἐστὶ

$$T=\sqrt{\frac{2\times122{,}61}{9{,}81}}=5''.$$

208. Ἡ ταχύτης ἐστὶν (1) $Υ=gT$.

Καὶ τῇ ἀντεισαγωγῇ ἐν ταύτῃ τῆς τιμῆς τοῦ T (3) προκύπτει

$$Υ=g\sqrt{\frac{2H}{g}}=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\times9.81\times H}=\sqrt{19{,}62H}\ldots(4)$$

Ἤτοι πρὸς εὕρεσιν τῆς ταχύτητος ἣν κέκτηται σῶμά τι καταπίεξ ὕψους H, πολλαπλασιάζεται τὸ ὕψος τοῦτο ἐπὶ 19,62, τοῦ δὲ γινομένου ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα.

Ὅθεν ἡ ταχύτης ἣν κέκτηται σῶμά τι καταπίπτον ἐξ ὕψους 65,00^μ· ἐστὶν $Υ=\sqrt{19{,}62\times65}=35{,}72$^μ·

Ὁ τύπος $Υ=\sqrt{2gH}$ δίδει

$$Υ^2=2gH \text{ ἐξ ἧς } H=\frac{Υ^2}{2g}=\frac{Υ^2}{19{,}62}$$

τουτέστι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὕψους ἐξ οὗ κατέπεσε σῶμά τι ἔχον γνωστὴν ταχύτητα, διαιρετέον τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος ταύτης διὰ 19,62· ὥστε ἂν σῶμά τι κέκτηται ταχύτητα 35,70^μ·, ἵν' ἀποκτήσῃ ταύτην κατέπεσεν ἐξ ὕψους

$$H=\frac{(35{,}70)^2}{19{,}62}=65{,}06^{μ}$$

Οἱ τύποι οὗτοι εἰσὶν ἐν μεγίστῃ χρήσει ἐν τῇ Μηχανικῇ, δίδουσι δὲ ὁ μὲν (1) τὴν ταχύτητα συνεκθέσει τοῦ χρόνου, ὁ (2) τὸ ὕψος τῆς πτώσεως συνεκθέσει τοῦ χρόνου, ὁ (3) τὸν χρόνον συνεκθέσει τοῦ ὕψους τῆς πτώσεως, ὁ (4) τὴν ταχύτητα συνεκθέσει τοῦ ὕψους

τῆς πτώσεως, καὶ τέλος ὁ (5) τὸ ὕψος τῆς πτώσεως συνεκθέσει τῆς ταχύτητος.

209. Οἱ τύποι οὗτοι εὑρέθησαν διὰ τὴν κίνησιν τῆς βαρύτητος, πλὴν εἰσὶν ἐφαρμόσιμοι καὶ εἰς πᾶσαν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν, ἀρκεῖ μόνον ἵνα τὸ g ἀντικατασταθῇ ἐν αὐτοῖς διὰ τῆς παραστάσεως τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς δυνάμεως ἐν ἑκάστῃ μονάδι τοῦ χρόνου. Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ γίνεται μεγαλειτέρα ἡ χρῆσις αὐτῶν σχετικῶς πρὸς τὴν βαρύτητα, δι' ὃ προετιμήθη ἐνταῦθα ἡ ὡς πρὸς ταύτην παράστασις αὐτῶν.

Ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς τῆς μηχανικῆς γίνεται συχνοτάτη χρῆσις τοῦ g ὑπὸ διαφόρους μορφάς, ὁ ἑπόμενος πίναξ δίδει τὴν ἀριθμητικὴν ἀξίαν τῶν διαφόρων αὐτοῦ δυνάμεων καὶ ῥιζῶν.

	g	g^2	g^3	$\sqrt{g}$	$\sqrt[3]{g}$
1	9,8088	96,2125	943,7297	3,1319	2,1406
2	19,6176	192,4251	1887,4594	6,2638	4,2812
3	29,4264	288,6376	2831,1892	9,3957	6,4218
4	39,2352	384,8502	3774,9189	12,5276	6,5624
5	49,0440	481,0627	4718,6486	15,6595	10,7030
6	58,8528	577,2753	5662,3784	18,7914	12,8436
7	68,6616	673,4879	6606,1081	21,9233	14,9843
8	78,4704	769,7004	7549,8378	25,0552	17,1249
9	88,2792	865,9130	8493,5676	28,1871	19,2655

	$\frac{1}{g}$	$\frac{1}{g^2}$	$\frac{1}{g^3}$	$\sqrt{\frac{1}{g}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{g}}$
1	0,1019	0,0103	0,0011	0,3193	0,4672
2	0,2039	0,0207	0,0021	0,6386	0,9343
3	0,3058	0,0311	0,0031	0,9579	1,4014
4	0,4078	0,0415	0,0042	1,2772	1,8686
5	0,5097	0,0519	0,0053	1,5964	2,2357
6	0,6117	0,0623	0,0063	1,9157	2,8029
7	0,7136	0,0727	0,0074	2,2350	3,2701
8	0,8155	0,0831	0,0084	2,5543	3,7372
9	0,9175	0,0935	0,0095	2,8736	4,2044

Ὁ ἑπόμενος πίναξ δίδει ἐπίσης τὰς τιμὰς τῆς ταχύτητος $P=gT$, καθὼς καὶ τοῦ ὕψους τῆς πτώσεως $H=\frac{1}{2}gT^2=\frac{1}{2}PT$, ἀναλόγως τῶν τιμῶν τοῦ χρόνου T.

Τιμαί			Τιμαί			Τιμαί		
T	Υ	H	T	Υ	H	T	Υ	H
0″,1	0,9808	0,0490	1″,8	17,6559	15,8902	3″,5	34,3308	60,0789
0,2	1,9617	0,1961	1,9	18,6367	17,7049	3,6	35,3117	63,5610
0,3	2,9426	0,4413	2,0	19,6176	19,6176	3,7	36,2925	67,1412
0,4	3,9235	0,7847	2,1	20,5985	21,6284	3,8	37,2734	70,8195
0,5	4,9044	1,2261	2,2	21,5793	23,7373	3,9	38,2543	74,5959
0,6	5,8853	1,7655	2,3	22,5602	25,9442	4,0	39,2352	78,4704
0,7	6,8661	2,4031	2,4	23,5411	28,2493	4,1	40,2161	82,4429
0,8	7,8470	3,1388	2,5	24,5220	30,6525	4,2	41,1969	86,5136
0,9	8,8279	3,9725	2,6	25,5029	33,1537	4,3	42,1778	90,6823
1,0	9,8088	4,9044	2,7	26,4837	35,7530	4,4	43,1581	94,9492
1,1	10,7897	5,9343	2,8	27,4646	38,4505	4,5	44,1396	99,3141
1,2	11,7705	7,1623	2,9	28,4255	41,2460	4,6	45,1205	103,7771
1,3	12,7514	8,2884	3,0	29,4264	44,1396	4,7	46,1013	108,3382
1,4	13,7323	9,6126	3,1	30,4073	47,1313	4,8	47,0822	112,9973
1,5	14,7132	10,0349	3,2	31,3881	50,2210	4,9	48,0631	117,7546
1,6	15,6941	12,5552	3,3	32,3690	53,4089	5,0	49,0440	122,6100
1,7	16,6749	14,1737	3,4	33,3499	56,6948			

Μηχανικὸν ἔργον. Ζῶσα δύναμις. Ποσότης κινήσεως.

210. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς κινητηρίου δυνάμεως ἥτις προξενεῖ κίνησιν (195) ἐστὶ *μηχανικὸν ἔργον*. Ἐν τῇ ἐκφράσει ταύτῃ ἐμπεριέχεται ἥ τε ὤθησις, καὶ ὁ διανυθεὶς δρόμος κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς ὠθήσεως. Ἐργάζεσθαι, ἐστὶ νικᾷν ἐπί τινα χρόνον ἀντιστάσεις ἀκαταπαύστως ἀναγεννωμένας κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον. Οὕτω πριονίζειν, σύρειν βάρη, στρέφειν ἄξονα, εἰσὶν ἐργασίαι. Δέον ὅμως πρὸς ὕπαρξιν μηχανικοῦ ἔργου, ἵνα ἡ κίνησις τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς, ἐστὶν ἀνεξάρτητος τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως, διότι ἄνθρωπος ἐντὸς λέμβου ἕλκων σχοινίον προσδεδεμένον εἰς σημεῖόν τι ταύτης, δὲν ἤθελεν ἐργάζεσθαι, ἂν καὶ πλείστη δύναμις δύναται νὰ τεθῇ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει εἰς ἐνέργειαν.

Τὸ μηχανικὸν ἔργον προκύπτον ἐκ τῆς ἀμοιβαίας συνδρομῆς δύο

ποσοτήτων, τῆς δυνάμεως δηλονότι καὶ τοῦ διανυθέντος δρόμου, ἐκφράζεται φυσικῶς διὰ τοῦ γινομένου τῆς ἀριθμητικῆς ἐκφράσεως τῶν δύο τούτων ποσοτήτων.

Ἡ ὀνομασία μηχανικὸν ἔργον, δὲν ἀπαντᾶται εἰς ὅλα τὰ τῆς μηχανικῆς συγγράμματα, καθότι οἱ μὲν Ἄγγλοι καλοῦσιν αὐτὸ μηχανικὴν δύναμιν, οἱ Γάλλοι δὲν συμφωνοῦσι πάντες, καὶ ὁ μὲν Καρνώ, καλεῖ αὐτὸ στιγμὴν ἐνεργείας, ὁ Monge καὶ Hachette δυναμικὸν ἀποτέλεσμα, ὁ Ῥενιὲ χρήσιμον ἐργασίαν, καὶ τέλος ὁ Coulomb ὁ Navier καὶ πλεῖστοι ἄλλοι, ποσότητα ἐνεργείας, παρ' ἡμῖν ὅμως ἂν καὶ ἡ σπουδὴ τῆς μηχανικῆς ἐστὶν ἔτι λίαν περιωρισμένη, ἐπεκράτησεν ἡ ὀνομασία τοῦ Poncelet μηχανικὸν ἔργον.

211. Ὡς μονὰς συγκρίσεως τοῦ μηχανικοῦ ἔργου, λαμβάνεται ἡ μονὰς τοῦ βάρους (86) ἀνυψουμένη εἰς τὴν μονάδα τοῦ μήκους (84), ὅπερ καλεῖται *χιλιογραμμόμετρον*, ἐν ᾧ ἐμπεριέχεται τό τε χιλιόγραμμον καὶ τὸ μέτρον ἢ ὁ Βασιλικὸς πῆχυς.

Ὑποτεθείσθω ὅτι πρόκειται ἀνυψῶσαι 35,50 χιλιογ. εἰς 64,00μ. ὕψος· τὸ ἀναπτυσσόμενον μηχανικὸν ἔργον ἔσεται $35,50 \times 64 =$ 2.400 χιλγ.μ.

Πρὸς εὐκολωτέραν δὲ σύγκρισιν τοῦ τοιούτου ἔργου, ἐλήφθη μονὰς συνεκθέσει τῆς μονάδος τοῦ χρόνου, ἂν καὶ τὸ μηχανικὸν ἔργον ἐστὶν ὅλως ἀνεξάρτητον τούτου. Ἡ μονὰς αὕτη ἐκ συνηθείας ληφθεῖσα καὶ εἰς γενικὴν ἐν τῷ κόσμῳ χρῆσιν οὖσα, ἐστὶ τὸ παραγόμενον μηχανικὸν ἔργον πρὸς ἀνύψωσιν 75 χιλιογράμμων εἰς ἑνὸς Β. πήχεως ὕψους ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου, σημειοῦται δὲ 75 χιλγ.μ. καὶ καλεῖται γενικῶς *Ἵππου δύναμις*.

Ὅθεν τὸ μηχανικὸν ἔργον ἐκφράζεται γενικώτερον, διὰ τοῦ γινομένου τῆς δυνάμεως Φ ἐπὶ τὴν ταχύτητα Υ καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον Τ, ἤτοι μηχανικὸν ἔργον$=$ΦΥΤ.

212. Αἱ συνήθεις κινητήριοι δυνάμεις εἰσὶν οἱ ἄνδρες, τὰ ζῶα, ὁ ἀήρ, τὸ ὕδωρ, ὁ ἀτμὸς καὶ τὰ ἀέρια.

Τὸ ὕδωρ, ὁ ἀτμὸς καὶ τὰ ἀέρια, εἰσὶ κινητήριοι δυνάμεις ὑποκείμεναι μόνον εἰς τοὺς νόμους τῆς φύσεως, δύνανται δὲ ἄλλως νὰ ἐνεργῶσι συνεχῶς καὶ ἀεννάως. Δὲν ἔχει ὅμως οὕτω καὶ διὰ τοὺς ἄνδρας καὶ τὰ ζῶα, οἵτινες ὑπόκεινται εἰς κόπωσιν μετά τινα χρόνον, καὶ δέονται ἀναπαύσεως.

Τὸ μηχανικὸν ἔργον τῶν ἀνδρῶν καὶ ζώων, δυνάμενον νὰ κληθῇ ἡμερησία ἐργασία, ἐκφράζεται διὰ τῆς καταβαλλομένης δυνάμεως διὰ τὴν ταχύτητα καὶ τὸν χρόνον, καθ' ὃν ἐξακολουθεῖ ἡ ἐνέργεια. Ὑπάρχει ὅμως ταχύτης τις καὶ διάρκεια ἐνεργείας, δίδουσα τὴν μεγαλειτέραν τιμὴν εἰς τὴν ἡμερησίαν ἐργασίαν ἑκάστης τῶν δύο τούτων ζωϊκῶν δυνάμεων, καλεῖται δὲ ἡ τιμὴ αὕτη *μέγιστον τοῦ ἔργου.*

ΠΙΝΑΞ

Τοῦ μεγίστου τοῦ ἔργου ὅπερ δύναται νὰ παραχθῇ ὑπὸ ἀνδρῶν καὶ ζώων εἴς τινας ειδικὰς περιστάσεις.

Εἶδος τῆς ἐργασίας	Μέση καταβαλλομένη δύναμις	Ταχύτης ἢ διανυόμενον διάστημα κατὰ δευτερόλεπτον	Ἔργον κατὰ δευτερόλεπτον	Διάρκεια ἡμερησίας ἐργασίας	Ποσότης ἐργασίας καθ' ἡμέραν
	Χιλιόγρ.	Μέτρα	Χιλ. Μτ.	Ὧραι	Χιλγρ. Μετρ.
Χειρισμὸς ἐνεργῶν ἐπὶ στροφάλου	8	0,75	6,00	8	172,800
» » γομφωτοῦ τροχοῦ					
1ον εἰς τὸ ὕψος τοῦ ἄξωνος	60	0,15	9,15	8	259,200
2ον πρὸς τὰ κάτω τοῦ τροχοῦ	12	0,70	8,40	8	241,920
Χειρισμὸς ὤθων ἢ ἕλκων ὁριζοντείως	12	0,60	7,20	8	207,360
Χειρισμὸς ἐνεργῶν δι' ὠθήσεως καὶ ἕλξεως ἀλληλοδιαδόχως ὁριζοντείως	5	1,10	5,50	8	158,400
Ἵππος ἐζευγμένος εἰς ἐμψυχοκίνητον	45	0,90	40,50	8	1166,400
Ἵππος σύρων ἅμαξαν, βάδην	70	0,90	63,00	10	1268,000

Κατὰ τὸν πίνακα τοῦτον χειρισμὸς ἐνεργῶν ἐπὶ στροφάλου (μανουάλι), διαγράφει διὰ τοῦ ἄκρου τοῦ στροφάλου τούτου δρόμον $0{,}75^{\mu.}$ κατὰ δευτερόλεπτον, ἢ $60 \times 0{,}75 = 45$ Β. π. κατὰ λεπτόν, ἢ τοῦ στροφάλου ἔχοντος 0,35 ἀκτῖνα ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς περιφέρειαν (148) $2 \times 3{,}14 \times 0{,}35 = 2{,}199$ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς, ὁ ἀνὴρ δύναται νὰ παράξῃ ταχύτητα $\frac{45}{2{,}199} = 21$ περιστροφῶν κατὰ λεπτόν.

Οὕτω διὰ κανονικὸν δρόμον $0{,}75^{\mu.}$ καθ' ὃν καταβάλλεται δύναμις 8, χιλγ. χειρισμὸς παράγει ἔργον κατὰ δευτερόλεπτον $0{,}65 \times 8 = 6$ χ. μ. ἢ $6 \times 60 = 360$ χ. μ. κατὰ λεπτόν, καὶ $366 \times 60 = 21600$ χ. μ. καθ' ὥραν, καὶ ἐπειδὴ ἀνὴρ δύναται νὰ ἐργάζεται κατὰ μέσον ὅρον 8 ὧρ. τὴν ἡμέραν, τὸ ἡμερήσιον ἔργον ἔσεται ὡς δεικνύει ὁ πίναξ 172800. χ. μ.

Ὅθεν ἀνὴρ ἐνεργῶν χειρισμόν, δύναται ἡμερησίως νὰ ἀνυψοῖ διαρκῶς 8 χιλ. εἰς 0,75 μ. ἀνὰ δευτερόλεπτον, προκειμένου ὅμως νὰ ἐνεργήσῃ στιγμιαίως μόνον ἐπὶ χειρισμοῦ ἐξελίκτρου τινος ἢ συσπάστου, δύναται ν' ἀναπτύξῃ ἐπί τινας στιγμὰς δύναμιν πολὺ μεγαλειτέραν.

Προέκυψεν ἐκ πειραμάτων, γενομένων ἐν Ἀγγλίᾳ ἐπὶ γερανίου ἐκφορτώσεως, ὅτι ἀνὴρ ἠδυνήθη νὰ ἀνυψώσῃ ἐντὸς 90″ εἰς ὕψος 5,03 μ. βάρος 485,37 χιλ. (378 ὀκάδων). Πρὸς ἀναγωγὴν τοῦ ἔργου τούτου εἰς τὴν μονάδα τοῦ ἔργου, τουτέστιν 1 χιλ. ἀνυψουμένου εἰς 1,00 μ. ἐντὸς 1″, πολλαπλασιάζεται τὸ ἀνυψωθὲν βάρος 485,57 χιλ. ἐπὶ τὸ ὕψος 5,03, μ. τὸ δὲ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τῆς διαρκείας τοῦ ἔργου 90″, τουτέστι $\frac{485,57 \times 5,03}{90''} = 26,58$ χ. μ., ὅπερ ἐστὶ τὸ παραχθὲν κατὰ δευτερόλεπτον ἔργον.

Ἕτερον πείραμα κατέδειξεν ὅτι Ἰρλανδός τις ἐκτάτου ἰσχύος, κατόρθωσε ν' ἀνυψώσῃ εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος τῶν 5,03 μέτρων, βάρος 1666,25 χιλιογράμμων (1300 ὀκάδων), ἐντὸς 132 δευτερολέπτων, ὅπερ ἀναγόμενον εἰς τὴν μονάδα τοῦ ἔργου, ἤτοι πολλαπλασιαζόμενος ὡς ἄνω ὁ ἀριθμὸς 1666,25 ἐπὶ τὸ ὕψος 5,03, καὶ τοῦ γινομένου διαιρουμένου διὰ 132″, δίδει τὸ κατὰ δευτερόλεπτον ἔργον $\frac{1666,25 \times 5,03}{132''} = 63,40.$ χ. μ.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀνωτέρω χειρισμὸν ἀντὶ δυνάμεως 8 χιλ. ἔδει νὰ καταβληθῇ 12, χιλ. ἡ ταχύτης ἤθελεν εἶσθαι $\frac{6}{12} = 0,50$ ἀντὶ 0,75, ὥστε τῆς καταβαλλομένης δυνάμεως ἐπαυξανομένης ἐλαττοῦται ἡ ταχύτης, καὶ ἀντιστρόφως.

213. Ἀδράνεια (189) λέγεται ἡ κατάστασις ἐκείνη εἰς ἣν εὑρισκόμενα τὰ σώματα, δὲν δύνανται νὰ μεταβῶσιν ἐκ τῆς ἠρεμίας εἰς κίνησιν, ἢ νὰ μεταβάλλωσι τὴν κίνησιν αὐτῶν, ἄνευ τῆς ἐπιδράσεως ἐξωτερικοῦ τινος αἰτίου. Ὅθεν ἵνα τεθῇ σῶμά τι εἰς κίνησιν δέον πρῶτον νὰ νικηθῇ ἡ ἀδράνεια. Τὴν ἀδράνειαν ἀναπόσπαστον οὖσαν τῆς ὕλης, δέον νὰ νικήσῃ ἵππος κατὰ τὴν πρώτην στιγμὴν ἵνα θέσῃ ἅμαξαν εἰς κίνησιν, ἣν ἅπαξ νικηθεῖσαν ἡ κίνησις τῷ ἀποβαίνει εὔκολος. Ἡ ἀδράνεια προσέτι ἐστὶ τὸ αἴτιον ὅπερ ἐμποδίζει τὸν τρέχοντα ἵππον νὰ σταματήσῃ ἀκαριαίως τὴν συρομένην παρ' αὐτοῦ

ἄμαξαν. Τῆς ἀδρανείας ἔτι ἕνεκα τὰ σώματα ἀπαιτοῦσι χρόνον τινα ἵνα καταπέσωσιν εἰς τὴν γῆν, ἄλλως μὴ ὑπαρχούσης ταύτης, καὶ τῆς βαρύτητος μὴ ὑποκειμένης εἰς τὴν ἀντιστάθμησιν τῆς ἀδρανείας ἣν ὑπερνικᾷ συνεχῶς, τὰ σώματα ἤθελον ἀκαριαίως καταπίπτει.

214. Πᾶσά δύναμις παράγουσα κίνησιν νικᾷ τὴν ἀδράνειαν ταύτην, καὶ προξενεῖ ταχύτητα εἰς τὸ κινητόν· αὕτη δ' ἐστὶ διὰ τὴν αὐτὴν δύναμιν τοσοῦτον μικροτέρα, ὅσον ἡ μάζα τοῦ κινητοῦ ἐστὶ μεγαλειτέρα καὶ τ' ἀνάπαλιν· ἄρα ἡ ἐνέργεια δυνάμεώς τινος ἐστὶ σχετικὴ, τῆς τε μάζης τοῦ κινητοῦ καὶ τῆς ταχύτητος, ὥστε δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν. Ὅθεν ἡ δύναμις Φ ἐκφράζεται $Φ=ΜΥ$. Ἡ ἔκφρασις αὕτη ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς ὕλης ἐπὶ τὴν ταχύτητα καλεῖται *ποσότης κινήσεως*.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ποσότητος κινήσεως καὶ τοῦ μηχανικοῦ ἔργου, ἐστὶν ὅτι εἰς τοῦτο μὲν λαμβάνεται ὡς παράγων ἡ κινοῦσα δύναμις, εἰς ἐκείνην δὲ ἁπλῶς ἡ ὕλη.

Ἐπίσης δι' ἑτέραν δύναμιν καὶ ὕλην $Φ'=Μ'Υ'$.

Καὶ τῇ διαιρέσει τῆς ἀνωτέρω τοιαύτης ἐξισώσεως διὰ ταύτης

$$Φ : Φ' :: ΜΥ : Μ'Υ'$$

Ὅταν δὲ $Μ=Μ'$, $Φ : Φ' :: Υ : Υ'$

ἤτοι αἱ δύο ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὕλης ἐνεργοῦσαι δυνάμεις εἰσὶν ἀνάλογοι τῶν ταχυτήτων.

Ἐὰν Μ ἡ ὕλη σώματος τινος (190), g ἐστὶν ἡ κατὰ δευτερόλεπτον ταχύτης τῆς πτώσεως, ἡ νικωμένη ἀδράνεια ἤτοι ἐν τῇ ἐλευθέρᾳ πτώσει τὸ βάρος τοῦ σώματος Ρ, ἔσεται

$$P=Mg \text{ καὶ } M=\frac{P}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ἡ ἔκφρασις αὕτη τοῦ βάρους διαιρουμένου διὰ τοῦ g, καλεῖται *ποσότης ὕλης*.

215. Ἐὰν Η ἐστὶ τὸ διανυθὲν διάστημα ἢ τὸ ὕψος τῆς πτώσεως σώματός τινος βάρους Ρ, τὸ μηχανικὸν ἔργον ἔσεται Ρ.Η.

Εἰς τὸν τύπον τοῦτον, τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς τοῦ Η (208,5ου) εὑρίσκεται $P\frac{Y^2}{2g}$ ἢ $\frac{1}{2}\,\frac{P}{g}Y^2$ ἢ $\frac{1}{2}\,MY^2$. . . . . (2)

Τὸ διπλάσιον τῆς ἐκφράσεως ταύτης, ἤτοι τὸ MY^2 καλεῖται *Ζῶσα*

δύναμις. Ὅθεν ἡ ζῶσα δύναμις ἐστὶ τὸ γινόμενον τῆς ὕλης ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος, ἢ το διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἀναπτυσσομένου μηχανικοῦ ἔργου. Ἐὰν ὑποτεθῇ τὸ σῶμα ὠθούμενον ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, τὸ ἔργον τῆς βαρύτητος ἐκφραζόμενον πάντοτε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ βάρους ἐπὶ τὸ ὕψος εἰς ὃ τοῦτο ἀνυψώθη κατακορύφως, ἂν καὶ τεῖνον νὰ καταστρέψῃ τὴν δοθεῖσαν ταχύτητα, ἤθελεν ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ ἡμίσεως τῆς δυνάμεως ἣν ἐκέκτητο τὸ σῶμα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκσφενδονήσεως ἢ ἀνυψώσεως ταύτης.

216. Αἱ τεθεῖσαι αὗται ἀρχαὶ, εἰσὶν ἡ βάσις τῆς θεωρίας τῶν κινητηρίων μηχανῶν, ὡς τῶν ὑδραυλικῶν τροχῶν, τῶν ἀτμομηχανῶν, τῶν ἀνεμομύλων κλ. αἵτινες δέχονται ἀμέσως τὴν ἐνέργειαν τῶν κινητηρίων, ἤτοι τὴν ῥοὴν τοῦ ὕδατος, τὸν ἀτμὸν, τὸν ἀέρα κλ., ἵνα μεταδόσωσι καὶ χρησιμοποιήσωσι τὴν ἐνέργειαν ταύτην.

Ἐφαρμογαί. Ἐὰν πρόκειται νὰ κινηθῇ ἅμαξα βάρους 10,000 χιλ. ἐπὶ ὁριζοντείου ὁδοῦ δι' ἵππων, μετὰ ταχύτητος 1.00μ. κατὰ δευτερόλεπτον, τὸ ἔργον ὅπερ δέον ν' ἀναπτυχθῇ κατὰ τὴν πρώτην στιγμὴν, πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς ἀδρανείας ἔσεται (215)

$$\tfrac{1}{2}M\Upsilon^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{P}{g}\Upsilon^2.$$

καὶ τῇ ἀντεισαγωγῇ P=10,000, g=9.81, Υ=1.00μ. προκύπτει

$$\tfrac{1}{2}.\frac{10\,000}{9.81}\times 1,^2 00 = 510.\ \text{χ. μ.}$$

Ἔστω ὅτι ἐφαρμόζεται κινητήριός τις δύναμις, πρὸς ἀνύψωσιν κατακορύφως βάρους 5000 χιλ. μὲ ταχύτητα 0,3 μ. κατὰ δευτερόλεπτον. Τὸ δαπανώμενον ὑπὸ τῆς ἀδρανείας ἔργον πρὸ τῆς στιγμῆς καθ' ἣν θ' ἀποκτήσῃ τὴν ταχύτητα ταύτην, ἔσεται

$$\tfrac{1}{2}.\frac{P}{g}\Upsilon^2 = \tfrac{1}{2}.\ \frac{5000}{9.81}\times,0,3^2 = 23\ \text{χ. μ.}$$

Τὸ δαπανώμενον τοῦτο ἔργον ἐστὶν ἀνεξάρτητον τοῦ ὑπὸ τῆς βαρύτητος καταναλισκομένου, ὅπερ ἐστὶ μεγαλείτερον, διότι ἂν ἡ κινητήριος δύναμις ἔμελλε ν' ἀνυψώσῃ τὸ βάρος εἰς ὕψος 1.20, μ. τὸ ἔργον τοῦτο ἤθελεν εἶσθαι 5000×120=6000 χ. μ. τουτέστι 260 φορὰς μεγαλείτερον.

Ἔστω ποταμὸς, οὗ ἡ ῥοὴ παρέχει κατὰ δευτερόλεπτον 10 χ. μ.

ὕδατος, ὧν τὸ βάρος ἐστὶ 10,000 χιλ. περίπου, καὶ ἔστω ἡ ταχύτης τῆς ῥοῆς αὐτοῦ κατὰ μέσον ὅρον 0,80 κατὰ δευτερόλεπτον. Ἡ ζῶσα δύναμις τοῦ ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου διερχομένου ῥευστοῦ ἐστὶ $\frac{P}{g}Y^2 = \frac{10000}{9.81} \times (0,80)^2 = 652$, ὅπερ, ἀντιστοιχεῖ πρὸς μηχανικὸν ἔργον $\frac{1}{2}$ 652=326, χ.μ. τουτέστι περίπου 4 $\frac{1}{2}$ ἵππων δύναμιν, καὶ ὅπερ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς κίνησιν τροχοῦ κλ.

Ἐὰν ἀντὶ νὰ γίνῃ χρῆσις τῆς ταχύτητος τῆς ῥοῆς τοῦ ὕδατος ἐν τῇ φυσικῇ αὐτοῦ κοίτῃ, ἀνυψοῦτο τὸ ἐπίπεδον τοῦτο δι' ἐπιχωμάτων, ἤθελε διὰ τῆς ἐκ τούτων καταπτώσεως, ἐνεργεῖ διὰ τοῦ βάρους αὐτοῦ. Ἐὰν φερ' εἰπεῖν τὸ ἐπίχωμα ἀνύψου τὸ ὕδωρ μόνον κατὰ 2,50, μ. τὸ παραγόμενον μηχανικὸν ἔργον διὰ τῶν αὐτῶν 10 κ. μ. ὕδατος κατὰ δευτερόλεπτον, καταφερομένων ἐξ ὕψους 2,50μ. ἤθελεν εἶσθαι·

10,000 χιλ. × 2,50=25000=333 $\frac{1}{2}$ ἵππων δύναμιν.

Τὸ παράδειγμα τοῦτο δεικνύει τίνι τρόπῳ ὑπολογίζεται ἡ ἐργασία τῆς ζώσης δυνάμεως, καὶ ἐκείνη τῆς ἐνεργείας τῆς βαρύτητος, καὶ ταυτοχρόνως τὴν ὑπεροχὴν τῆς χρήσεως τῶν ὑδάτων τῶν ποταμῶν δι' ἀνυψώσεως, δι' ἧς ἐνεργοῦσιν ἐπὶ τῶν μηχανῶν διὰ τοῦ βάρους αὐτῶν, ἐπὶ τῆς ἁπλῆς χρήσεως τῆς ζώσης αὐτῶν δυνάμεως.

217. Σῶμά τι ἐλευθέρως περὶ ἄξονα στρεφόμενον, ὑπόκειται εἰς δύο κεντρικὰς δυνάμεις ἐνεργούσας ταυτοχρόνως ἐπ' αὐτοῦ. Ἐκ τούτων ἡ μὲν τείνει νὰ σύρῃ τὸ σῶμα πρὸς τὸ κέντρον, καὶ καλεῖται *κεντρόμωλος*, ἡ δὲ τείνῃ ν' ἀπομακρύνῃ αὐτὸ τούτου, καὶ καλεῖται *κεντρόφυξ δύναμις*.

Ὅθεν ἡ κεντρόφυξ δύναμις ἐστὶν ἡ τείνουσα ν' ἀπομακρύνῃ τὸ περιστρεφόμενον κινητὸν ἐκ τοῦ κέντρου. Ἐν πάσῃ τοιαύτῃ ἐλευθέρᾳ κινήσει, ἐὰν ἡ τῶν δυνάμεων ἐνέργεια παύσῃ, καὶ ἐγκαταλειφθῇ αἴφνης τὸ κινητὸν εἰς ἑαυτὸ, τοῦτο θέλει διαφύγει κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸν κύκλον τῆς στροφῆς, μὲ τὴν κτηθεῖσαν ταχύτητα κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην. Τὸ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει παραγόμενον μηχανικὸν ἔργον, ἐστὶ πάντοτε ἀνάλογον τῆς ἀκτῖνος τῆς στροφῆς, διότι ἡ ταχύτης ἐστὶ τοσοῦτον μικροτέρα, ὅσον ἡ ἀκτὶς μεγαλειτέρα, δι' ὃ εἰς τὴν ἔκφρασιν αὐτὴ δέον νὰ εἰσέλθῃ ὡς

διαιρέτης τῆς ταχύτητος. Ὅθεν τὸ ἔργον ἤτοι ἡ κεντρόφυξ δύναμις N ἐκφράζεται

$$N=\frac{P}{g}\ \frac{\Upsilon^2}{A},$$

ἔνθα P ἐστὶ τὸ βάρος τοῦ σώματος, Υ ἡ εἰς μέτρα ταχύτης κατὰ δευτερόλεπτον, καὶ A ἡ ἀκτὶς ἢ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς στροφῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ σώματος.

Ἔστω σφαῖρα βάρους P=10, χιλ. εὑρισκομένη εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος 1,50, μ. καὶ στρεφομένη μὲ ταχύτητα στροφῆς 12,00 μ. κατὰ δευτερόλεπτον. Ἡ κεντρόφυξ δύναμις, ἡ τείνουσα ν' ἀποσπάσῃ τὴν σφαίραν ταύτην τῆς ἀκτῖνος ἔσεται

$$N=\frac{10\,\chi\iota\lambda.\times 12{,}00^2}{9.81\ \times\ 1.50}=47{,}88.\ \chi.\ \mu.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Σύνθεσις καὶ ἀποσύνθεσις τῶν δυνάμεων. — Κέντρον βαρύτητος.

218. Δύο δυνάμεις ἴσαι καὶ ἀντίῤῥοποι, ἐφαρμοσμέναι ἐπί τινος σημείου, ἰσοῤῥοποῦσι (197). Ἐπίσης δύο δυνάμεις ἴσαι καὶ ἀντίῤῥοποι, ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας ἀμεταβλήτου τὸ μῆκος καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ταύτης ἰσοῤῥοποῦσι. Συνάγεται ἐκ τούτων ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐνεργείας δυνάμεως ἐφαρμοσμένης ἐπί τινος σώματος δὲν μεταβάλλεται, εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τῆς διευθύνσεως αὐτῆς θεωρηθῇ αὕτη ἐφαρμοσμένη, ἀρκεῖ μόνον ἕκαστον νέον σημεῖον ἐφαρμογῆς νὰ ἦναι σημεῖον τοῦ σώματος, ἢ συνδεδεμένον μετὰ τούτου ἀμεταβλήτως.

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ σημείου A (Σχ. 130), ἐνεργοῦσι δύο δυνάμεις Π καὶ K, φανερὸν ὅτι αὗται θέλουσι δώσει εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο κίνησιν πρός τινα διεύθυνσιν, ἑπομένως δυνατόν ἐστιν ἵνα ἀντιθέτως τῇ διευθύνσει ταύτῃ, ἐφαρμοσθῇ ἀνάλογός τις δύναμις P ὅπως σταματήσῃ τὴν κίνησιν, ἢ ἰσοῤῥοπήσῃ τὰς δύο δυνάμεις Π καὶ K. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει αἱ τρεῖς δυνάμεις Π, K, P, ἰσοῤῥοποῦσι πέριξ τοῦ σημείου A.

219. Πᾶσα δύναμις κατάλληλος καὶ ἀνάλογος ἵν' ἀντικαταστήσῃ δύο ἢ πλειοτέρας δυνάμεις ἐνεργούσας ἐπί τινος σώματος, χωρὶς νὰ ἐπιφέρῃ μεταβολήν τινα εἰς τὴν κίνησιν τοῦ σώματος τούτου, κα-

λεῖται *συνισταμένη* τῶν δυνάμεων τούτων. Αἱ ἀρχικαὶ δυνάμεις ἃς δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ ἡ συνισταμένη αὕτη ἄνευ μεταβολῆς τινος τῆς κινήσεως καλοῦνται *συνιστῶσαι*.

Κατὰ ταῦτα αἱ δύο δυνάμεις Π καὶ Κ, αἵτινες προξενοῦσι κίνησιν εἰς τὸ σημεῖον Α πρός τινα διεύθυνσιν, καὶ ἃς ἰσοῤῥοπεῖ τρίτη τις δύναμις Ρ ἀντίθετος τῆς διευθύνσεως ταύτης, ἔχουσι φανερῶς συνισταμένην τινα, ἧς ἴση καὶ ἀντίθετος ἐστὶν ἡ ἰσοῤῥοποῦσα δύναμις Ρ, φανερὸν δ' ὅτι ἡ παράτασις ταύτης, ἤτοι ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΠΑΚ.

220. Ὅταν δύο ἢ πλειότεραι δυνάμεις, ἐνεργοῦσι κατὰ τὴν αὐτὴν ῥοπὴν καὶ διεύθυνσιν, κατάδηλον ἐστὶν ὅτι ἡ συνισταμένη τούτων ἔχει τὴν αὐτὴν ῥοπὴν καὶ διεύθυνσιν, καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἐπίσης ὅταν δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσιν ἀντιῤῥόπως πλὴν κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἕπεται ὅτι ἡ κίνησις θέλει ἔχει τὴν αὐτὴν μὲν διεύθυσιν, πλὴν κατὰ τὴν ῥοπὴν τῆς μεγαλειτέρας, θέλει δὲ κινηθῇ κατὰ τὴν ἐνέργειαν τῆς μεγαλειτέρας ταύτης δυνάμεως, ἐλαττωθείσης κατὰ τὴν ἀντιπράττουσαν εἰς τὴν κίνησιν μικροτέραν δύναμιν, ἤτοι ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, καὶ ἐνεργεῖ κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτῶν, καὶ κατὰ τὴν ῥοπὴν τῆς μεγαλειτέρας.

221. Ἔστωσαν (Σχ. 131) δύο δυνάμεις Π καὶ Κ παράλληλοι, ὁμόῤῥοποι καὶ ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ πέρατα ἀμεταβλήτου τινος εὐθείας ΑΒ. Ἐφαρμοζομένων δύο ἴσων καὶ ἀντιῤῥόπων δυνάμεων εἰς τὰ πέρατα ταύτης Μ καὶ Ν, ἐνεργουσῶν κατὰ τὴν αὐτὴν τῆς εὐθείας διεύθυνσιν, τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῶν ἔσεται μηδὲν (218).

Αἱ δυνάμεις Π καὶ Μ εἰς Α, καὶ Κ, Ν εἰς Β ἔχουσι συνισταμένας Σ καὶ Τ ἐντὸς τῶν γωνιῶν ΜΑΠ καὶ ΚΝΒ (219) διευθυνομένας, αἵτινες ἀντὶ νὰ θεωρῶνται ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῶν σημείων Α καὶ Β, δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Ο τῆς συναντήσεώς των, χωρὶς νὰ ἐπέλθῃ μεταβολή τις εἰς τὴν κίνησιν. Ὅθεν αἱ δυνάμεις Σ καὶ Τ, ἐφαρμοσμέναι εἰς τὸ σημεῖον Ο, παράγουσι τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ὡς αἱ Π καὶ Κ ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ ἐπειδὴ ἡ παραγομένη κίνησις εἶναι ἡ αὐτή, ἕπεται ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν Σ καὶ Τ, ἐστὶν ἡ αὐτὴ μὲ τὴν συνισταμένην τῶν Π

καὶ Κ. Ἡ συνισταμένη ὅμως αὕτη κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΣΟΤ, ἤτοι μεταξὺ Π καὶ Κ, καὶ ἀντὶ εἰς Ο, δύναται νὰ θεωρηθῇ ἐφαρμοσμένη εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὅθεν συνάγεται ὅτι ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων παραλλήλων, ἐνεργουσῶν κατὰ τὴν αὐτὴν ῥοπὴν, καὶ εἰς τὰ πέρατα εὐθείας τινος ἀμεταβλήτου, ἔχει τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης, καὶ μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

Αἱ εἰς Ο ἐφαρμοσμέναι δυνάμεις Σ καὶ Τ, δύνανται ν' ἀναλυθῶσιν εἰς ἑτέρας Μ′ Π′, καὶ Ν′ Κ′, ἀκριβῶς ἴσας καὶ παραλλήλους τῶν ΜΠ καὶ ΝΚ. Αἱ δύο δυνάμεις Μ′ Ν′, ἀκριβῶς ἴσαι καὶ ἀντίῤῥοποι, καταστρέφονται ἀμοιβαίως, μένει δὲ ἡ κίνησις ἀποτελουμένη ἐκ τῶν Π′ καὶ Κ′ ἴσων ταῖς Π καὶ Κ, ὁμοῤῥόπων, κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, καὶ παραλλήλων τῶν Π καὶ Κ, καὶ ὧν ἡ συνισταμένη, ἥτις ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῶν Π καὶ Κ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν (220) καὶ ἐστὶν ἐφαρμοσμένη εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἄρα ἡ συνισταμένη τῶν δύο ὁμοῤῥόπων παραλλήλων δυνάμεων, ἐνεργουσῶν εἰς τὰ πέρατα ἀμεταβλήτου εὐθείας, οὐ μόνον ἔχει τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της, ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ ἐντὸς τῶν περάτων Α καὶ Β, ἀλλ' ἔτι ἐστὶ παράλληλος καὶ ἴση τῷ ἀθροίσματι αὐτῶν. Ἐὰν αἱ δύο δυνάμεις Π καὶ Κ, εἰσὶν ἴσαι, φανερὸν ἐστὶν ὅτι τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης θέλει εἶσθαι τὸ μέσον τῆς ἀμεταβλήτου εὐθείας ΑΒ.

Τῇ ἀνὰ δύο συνθέσει ἐπανειλημμένως πλειόνων ἴσων παραλλήλων δυνάμεων, ὁμοῤῥόπων καὶ ἐνεργουσῶν ἀνὰ δύο ἐπὶ σημείων ἰσαπεχόντων τοῦ μέσου εὐθείας τινος, καταδείκνυται ὅτι ἡ συνισταμένη αὐτῶν, ἐστὶ παράλληλος καὶ ἴση τῷ ἀθροίσματι αὐτῶν, πρὸς δὲ ἐφαρμοσμένη ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ταύτης.

Ἀντιστρόφως πᾶσα δύναμις ἐφαρμοσμένη ἐπί τινος εὐθείας, δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς ὁσασδήποτε παραλλήλους ὁμοῤῥόπους δυνάμεις, ἐφαρμοσμένας εἰς διάφορα τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖα, ἀρκεῖ μόνον αἱ δυνάμεις αὗται ἀνὰ δύο, νὰ ὦσιν ἴσαι καὶ ἰσαπέχουσαι τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως Ρ, τὸ δὲ ὁλικὸν αὐτῶν ἄθροισμα νὰ ἰσοῦται τῇ ἀρχικῇ δυνάμει Ρ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ Κ ἀχθῇ παράλληλος ΚΤ τῆς ΒΝ, καὶ ἐκ Ν παράλληλος τῆς ΒΚ, αὗται θέλουσι τμηθῇ εἰς Τ ἐπὶ τῆς συνισταμένης,

ὡς θέλει δειχθῇ κατωτέρω, καὶ ἡ διαγώνιος θέλει μετρᾷ τὴν συνισταμένην ταύτην. Ἀγομένων τῶν παραλλήλων ΠΣ καὶ ΜΣ, τὰ ὅμοια τρίγωνα ΒΝΤ καὶ ΟΓΒ δίδουσι

ΚΤ ἢ Ν : ΒΚ ἢ Κ : : ΒΓ : ΟΓ

Ἐπίσης τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΜΣ καὶ ΟΑΓ δίδουσι

Π : Μ : : ΟΓ : ΑΓ

Τῷ πολλαπλασιασμῷ ὅρου πρὸς ὅρον τῶν ἀναλογιῶν τούτων, ἐπειδὴ Μ=Ν

Π : Κ : : ΒΓ : ΑΓ

Τουτέστιν ὅταν αἱ δύο παράλληλοι καὶ ὁμόῤῥοποι δυνάμεις Π καὶ Κ, αἱ ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ πέρατα εὐθείας τινος ΑΒ, δὲν εἶναι ἴσαι, ἡ συνισταμένη αὐτῶν, οὖσα πάντοτε παράλληλος καὶ ὁμόῤῥοπος τούτων διαιρεῖ τὴν ἀμετάβλητον εὐθεῖαν ΑΒ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν δυνάμεων Π καὶ Κ.

222. Ἐὰν αἱ τρεῖς παράλληλοι δυνάμεις Π, Κ, Ρ, (Σχ. 132) ἰσοῤῥοποῦσιν ἐπί τινος εὐθείας, ἑκάστη τούτων ὡς ἡ Κ, θεωρουμένη ἀντιθέτως, ἐστὶν ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἄλλων Π καὶ Ρ. Ἐπειδὴ ἐνταῦθα Π καὶ Κ ἐνεργοῦσαι ὁμοῤῥόπως, ἔχουσι συνισταμένην Ρ=Π+Κ, ἕπεται ὅτι Κ=Ρ—Π, τουτέστιν ἡ συνισταμένη τῶν Π καὶ Ρ ἐστὶν ἡ Κ, ἥτις ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τούτων, καὶ ἐνεργεῖ κατὰ τὴν φορὰν τῆς μεγαλειτέρας. Τοῦτο ἐφαρμόζεται καὶ ἐν περιπτώσει καθ' ἣν, ἐνεργοῦσι πλειότεραι παράλληλοι δυνάμεις ἐπί τινος εὐθείας, κατὰ ῥοπὰς ἀντιθέτους αἱ μὲν τῶν δὲ, διότι ἡ εὕρεσις τῆς συνισταμένης αὐτῶν ἀνὰ δύο ἐπανειλημμένως, δεικνύει ὅτι ἡ τοῦ συνόλου αὐτῶν συνισταμένη, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἀθροίσματος, τῶν κατὰ μίαν ῥοπὴν ἐνεργουσῶν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐνεργουσῶν κατὰ ῥοπὴν ἀντίθετον, ἐνεργεῖ δὲ κατὰ τὴν ῥοπὴν τοῦ μεγαλειτέρου ἀθροίσματος.

223. Ἔστωσαν αἱ δυνάμεις Π, Π', Π'', Π''' (Σχ. 133), ἐφαρμοσμέναι ἐπί τινος σώματος εἰς τὰ σημεῖα ΑΒΓΔ, ἢ ἀμεταβλήτως συνδεδεμένα ὄντα. Ἡ συνισταμένη τῶν Π καὶ Π' ἔσεται ἡ Ρ, εἰς τὸ σημεῖον Γ ἐφαρμοσμένη. Ἐπίσης ἡ συνισταμένη τῶν Ρ καὶ Π'', ἐστὶν ἡ Ρ' εἰς Γ' ἐφαρμοσμένη, καὶ τέλος ἡ τῶν Ρ' καὶ Π'', ἤτοι ἡ γενικὴ συνισταμένη ἔσεται ἡ Ρ'' εἰς Ο ἐφαρμοσμένη. Ἐὰν ἅπασαι αἱ δυνάμεις αὗται κλίνωσι κατ' ἴσην γωνίαν, καὶ μένουσι πάλιν παράλ-

ληλοι, λαμβάνουσαι τὰς θέσεις π, π′, π″, π‴, εὐκόλως δείκνυται ὅσι αἱ συνιστάμεναι ἀνὰ δύο διέρχονται ἐκ τῶν αὐτῶν σημείων Γ καὶ Γ′, καὶ ἡ γενικὴ συνισταμένη τούτων ἡ ρ″, διέρχεται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Ὅθεν ἡ συνισταμένη ἑκάστου συστήματος παραλλήλων δυνάμεων, ἐφαρμοσμένων εἰς τὰ σημεῖα ΑΒΓΔ σώματός τινος, φυλαττομένου τοῦ παραλληλισμοῦ ὁπωσδήποτε καὶ ἂν κλίνωσιν αἱ δυνάμεις, καὶ τῆς μεταξύ των ἀναλογίας, διέρχεται πάντοτε δι᾽ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅπερ ἕνεκα τῆς ἰδιότητός του ταύτης καλεῖται *κέντρον τῶν παραλλήλων δυνάμεων*.

224. Καθὼς δύο ἢ πλειότεραι δυνάμεις παράλληλοι, συντίθενται εἰς μίαν, παρομοίως διὰ τῆς τηρήσεως τῶν αὐτῶν ὅρων, δύναμίς τις δύναται ν᾽ἀναλυθῇ εἰς δύο ἢ πλειοτέρας δυνάμεις, παραλλήλους ταύτης, αἵτινες θὰ ὦσι συνιστῶσαι αὐτῆς, αὕτη δὲ συνισταμένη τούτων.

225. Ἔστωσαν αἱ δύο δυνάμεις Π καὶ Κ, ἐνεργοῦσαι κατὰ διαφόρους διευθύνσεις ἐπὶ τοῦ σημείου Α (Σχ. 134). Ἐὰν Αα καὶ Αα′ ε[illegible] τὰ διανυθέ τα διαστήματα ὑπὸ τὴν ἐπίῤῥοιαν τῶν δυνάμεων τούτων εἰς χρόνον τινὰ Τ, ἕπεται ὅτι (214)

Π : Κ : : Αα : Αα′.

Τὸ κινητὸν Α θέλει κινηθῇ κατὰ τὴν συνισταμένην τῶν Π καὶ Κ, ἥτις εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΠΑΚ (219), μετὰ δέ τινα χρόνον Τ, θέλει εὑρεθῇ εἰς Α′ τοῦ παραλληλογράμμου Αα Α′α′, καὶ ἐπειδὴ τὰ παραλληλόγραμμα ΑαΑ′α′ καὶ ΠΑΚΡ εἰσὶν ὅμοια (138), ἕπεται ὅτι ΑΑ′ συμπίπτει μετὰ τῆς ΑΡ, ὥστε τὸ κινητὸν κινεῖται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς διαγωνίου ΑΡ. Τὰ διανυθέντα διαστήματα εἰς ΑΑ′, ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΡ, ὄντα ἀνάλογα τῶν Αα καὶ Αα′, ὑπὸ τὴν ἐπίῤῥοιαν τῶν δυνάμεων Π καὶ Κ, ἐὰν διὰ Ρ παρασταθῇ ἡ συνισταμένη δύναμις ἥτις παράγει τὴν αὐτὴν κίνησιν, ἣν καὶ αἱ δυνάμεις Π καὶ Κ κατὰ τὴν διαγώνιον, ἕπεται ὅτι

Π : Ρ : : Αα : ΑΑ′

καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑαΑ′ καὶ ΑΠΡ

ΑΠ ἢ Π : : ΑΡ : : Αα : ΑΑ′

καὶ ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν προκύπτει ὅτι

Ρ=ΑΡ

Ἤτοι ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐνερ-

γουσῶν, ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς διαγωνίου τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου ἐπὶ τῶν δυνάμεων τούτων, ἔτι δὲ μετρᾶται διὰ τοῦ μήκους τῆς διαγωνίου ταύτης. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητός του ταύτης, τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο καλεῖται *παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων.*

Πρὸς ἀνεύρεσιν τῶν συνιστωσῶν ὅταν ἡ συνισταμένη ἐστὶ δεδομένη, τουτέστι πρὸς ἀνάλυσιν δυνάμεώς τινος Ρ, εἰς δύο ἄλλας Π καὶ Κ ἐφαρμοσμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, καὶ ὧν αἱ διευθύνσεις νὰ ὦσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μετὰ τῆς Ρ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΠΡΚ, οὗτινος ἡ δεδομένη δύναμις Ρ ἐστὶν ἡ διαγώνιος, αἱ δὲ πλευραὶ δίδουσι τὰς συνιστώσας.

226. Πρὸς εὕρεσιν τῆς συνισταμένης πλειόνων δυνάμεων, Π, Κ, Σ, Τ, ἐνεργουσῶν ἐπί τινος σημείου Α (Σχ. 135), εὑρίσκεται πρῶτον ἡ συνισταμένη ρ τῶν δύο δυνάμεων Π καὶ Κ, κατόπιν ἡ συνισταμένη ρ′ ταύτης τῆς ρ καὶ τῆς δυνάμεως Σ, ἀκολούθως ταύτης τῆς ρ′ καὶ τῆς δυνάμεως Τ, καὶ οὕτω ἡ τελευταία συνισταμένη ρ, ἐστὶν ἡ συνισταμένη τοῦ συνόλου τῶν ἀρχικῶν δυνάμεων.

Τὸ σχῆμα τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ συνισταμένη Ρ ἀριθμοῦ τινος δυνάμεων, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εὑρισκομένων, ἐστὶν ἡ εὐθεῖα ΑΡ, ἥτις κλείει τὸ πολύγωνον ΑΠρρ′Ρ, οὗτινος πρώτη μὲν πλευρὰ ἐστὶ μία τῶν δυνάμεων, αἱ δὲ λοιπαὶ παριστάνονται διαδοχικῶς δι’ ἴσων καὶ παραλλήλων εὐθειῶν τῶν δυνάμεων τούτων. Οὕτω αἱ δύο δυνάμεις Π καὶ Κ, ἔχουσι συνισταμένην Αρ, ἥτις κλείει τὸ πολύγωνον οὗτινος πρώτη πλευρὰ ἐστὶν ἡ ΑΠ=Π, καὶ οὗ ἡ δευτέρα Πρ ἐστὶν ἴση καὶ παράλληλος τῇ Κ. Ὁμοίως ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων Π, Κ, Σ, ἐστὶν ἡ Αρ′, ἥτις κλείει τὸ πολύγωνον τὸ σχηματιζόμενον ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΠ,ΠΡ, καὶ ρρ′ ἴσης καὶ παραλλήλου τῇ δυνάμει Σ, καὶ τέλος ἡ συνισταμένη ΑΡ τῶν δυνάμεων Π, Κ, Σ, Τ, κλείει τὸ πολύγωνον ΑΠρρ′Ρ.

Παρομοίως συμβαίνει καὶ διὰ τὴν συνισταμένην τῶν διαφόρων δυνάμεων πέριξ σημείου τινος ἐνεργουσῶν, καὶ ὁπόταν αὗται δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι τὸ σχηματιζόμενον πολύγωνον δὲν εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα.

Κατ’ ἀναλογίαν τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων, τὸ πολύγωνον ὅπερ παρέχει τὴν εὕρεσιν τῆς συνισταμένης πλειόνων δυνά-

μεων ἐνεργουσῶν πέριξ σημείου τινος, καλεῖται *πολύγωνον τῶν δυνάμεων*.

Ὅταν τὸ σημεῖον Ρ, συμπίπτῃ εἰς Α, τουτέστιν ὅταν τὸ πολύγωνον τῶν δυνάμεων κλείει ἀφ' ἑαυτοῦ, ἡ συνισταμένη ΑΡ ἐστὶ μηδὲν, αἱ δὲ δυνάμεις Π, Κ. Σ, Τ, εὑρίσκονται ἐν ἰσοῤῥοπίᾳ πέριξ τοῦ σημείου Α.

227. Κατὰ τ' ἀνωτέρω ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων Π καὶ Κ (Σχ. 136) ἐστὶν ἡ Αρ, διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου ΑρΡΣ, ὥστε ΑΝ ἐστὶν ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων Π, Κ, Σ. Ἐὰν ἤδη τὸ παραλληλόγραμμον ΑΠΡΚ, θεωρηθῇ ὡς βάσις παραλληλεπιπέδου οὗτινος ΑΣ ἐστὶ μία τῶν ὀρθίων κόψεων, ἡ ρΡ ἐστὶν ἡ ἀπέναντι ταύτης κόψις, καὶ ΑΡ ἤτοι ἡ συνισταμένη, ἐστὶν ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου.

Ὅθεν ἡ συνισταμένη τριῶν δυνάμεων, ἐφαρμοσμένων ἐπί τινος σημείου, καὶ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παριστάνεται κατά τε διεύθυνσιν καὶ μέγεθος, διὰ τῆς διαγωνίου τοῦ σχηματιζομένου ἐπὶ τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων παραλληλεπιπέδου. Καλεῖται δὲ τοῦτο κατ' ἀναλογίαν, *παραλληλεπίπεδον τῶν δυνάμεων*.

Ἐὰν δεδομένης οὔσης τῆς συνισταμένης, ἐζητοῦντο αἱ συνιστῶσαι, τουτέστιν ἐὰν ἐπρόκειτο ν' ἀναλυθῇ δύναμίς τις Ρ, εἰς τρεῖς ἑτέρας δεδομένων διευθύνσεων, ἡ πορεία ἤθελεν εἶσθαι ἀντίστροφος, τουτέστιν ἤθελεν ἀχθῇ Ρρ παράλληλος τῆς ΑΣ, καὶ τὸ σημεῖον ἔνθα ἤθελε συναντήσει τὸ ἐπίπεδον ΠΑΚ, ἤθελεν ἑνωθεῖ μετὰ τοῦ Α, καὶ τέλος διὰ τῆς συμπληρώσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΣΡρ, ἡ ΑΡ ἤθελεν ἀναλυθεῖ εἰς τὴν ΑΣ, ἥτις ἐστὶ μία τῶν ζητουμένων συνιστωσῶν, καὶ εἰς τὴν Αρ ἥτις ἀναλυομένη εἰς δύο ἑτέρας ΑΠ καὶ ΑΚ, ἤθελε παρέξει τὰς δύο ἑτέρας συνιστώσας Π καὶ Κ, εἰς ἃς ἡ ΑΡ ἀναλύεται.

228. *Κέντρον βαρύτητος.* Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος σώματός τινος ἢ συστήματος σωμάτων, ἐστὶ τὸ κέντρον τῶν παραλλήλων δυνάμεων (223) τῆς ἐνεργείας τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῶν ἀτόμων τοῦ σώματος ἢ τοῦ συστήματος τῶν σωμάτων τούτων, τουτέστι τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης ἁπασῶν τῶν παραλλήλων δυνάμεων, τῶν ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἐνεργουσῶν ἐπὶ τῶν ἀτόμων τοῦ σώματος ἢ τοῦ συστήματος τούτου τῶν σωμάτων.

Ὅθεν ἐπειδὴ αἱ ἐνέργειαι τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῶν ἀτόμων σώμα-

τός τινος, δύνανται ν' ἀντικατασταθῶσι διὰ τῆς συνισταμένης αὐτῶν ἥτις ἐπιφέρει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος αὐτοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σημεῖον ἐφ' οὗ ἐστὶν ἐφαρμοσμένη, δύναμις ἴση καὶ παράλληλος μὲ τὸ βάρος τοῦ σώματος. Προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι ἐν περιπτώσει καθ' ἣν πρόκειται νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν τὸ βάρος τῶν σωμάτων, ἐν τῇ ἰσορροπίᾳ ἢ προβλήματι τινι τῆς μηχανικῆς, ἀρκεῖ ἵνα ἐν ἑκάστῳ σώματι, τοῦτο θεωρεῖται ὡς δύναμις ἴση καὶ παράλληλος τοῦ βάρους, ἐφαρμοσμένη εἰς τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος αὐτοῦ, αἱ δὲ δυνάμεις αὗται θέλουσι συνδυασθεῖ μετὰ τῶν λοιπῶν ἐπὶ τοῦ συστήματος ἐνεργουσῶν δυνάμεων.

Ἐκ τούτων προκύπτει

1ον Ὅτι σῶμά τι εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, ὅταν στηριχθῇ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος αὐτοῦ, οἱασδήποτε θέσεως διδομένης εἰς τὸ σῶμα τοῦτο.

2ον Ἐν περιπτώσει ἰσορροπίας κρεμαμένου τινος σώματος, ἡ διεύθυνσις τοῦ νήματος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος, διότι ἡ ἔντασις τοῦ νήματος ἐνεργοῦσα κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτοῦ, δὲν δύναται νὰ μηδενίσῃ τὸ βάρος τοῦ σώματος, παρ' ἐνόσῳ αὕτη ἐστὶν ἴση καὶ ἀντίῤῥοπος αὐτοῦ, ὅθεν ἕπεται ὅτι διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος.

Τῇ ἀλληλοδιαδόχῳ κρεμάνσει στερεοῦ τινος σώματος ἐκ δύο αὐτοῦ σημείων, ἡ συνάντησις τῶν δύο διευθύνσεων τοῦ νήματος τῶν κρεμάνσεων ἐντὸς τοῦ σώματος, δίδει τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος αὐτοῦ. Ὅθεν οὗτος ἐστὶ μηχανικός τις τρόπος τοῦ προσδιορίζειν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος σώματός τινος.

3ον Γνωστῶν ὄντων τῶν κέντρων βαρύτητος πλειόνων σωμάτων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ κέντρου βαρύτητος τοῦ ὅλου συστήματος τούτων, ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ κέντρου τῶν παραλλήλων δυνάμεων (223), θεωρουμένων ὡς δυνάμεων τῶν βάρεων τῶν διαφόρων σωμάτων. Οὕτω τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος δύο σωμάτων, ὧν τὰ βάρη εἰσὶ P καὶ ρ, ἢ αἱ μάζαι $M = \frac{P}{g}$ καὶ $\mu = \frac{\rho}{g}$, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἑνούσης τὰ δύο κέντρα τῆς βαρύτητος τῶν σωμάτων τούτων εὐθείας, καὶ εἰς ἀπόστασιν ἐκ τούτων, ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῶν βάρεων αὐτῶν (221).

229. Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται ὅτι ἡ θέσις τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος σώματός τινος ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν εἰσὶ διατεθειμένα τὰ ἄτομα καθ' ὅλην αὐτοῦ τὴν ἔκτασιν. Ὅθεν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ σώματος πρῶτον, καὶ δεύτερον ἐκ τοῦ τρόπου τῆς διατάξεως τῶν ἀτόμων αὐτοῦ, τουτέστιν ἐκ τῆς σχετικῆς πυκνότητος κατὰ τὰ διάφορα αὐτοῦ μέρη.

Ὅθεν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος, δέον νὰ λαμβάνονται ταῦτα ὑπ' ὄψιν· πλὴν ἐὰν τὸ σῶμα ἐστὶν ὁμογενές, τουτέστιν ἰσόπυκνον καθ' ὅλα αὐτοῦ τὰ μέρη, τότε μόνον τὸ σχῆμα αὐτοῦ ληπτέον ὑπ' ὄψιν, ὥστε ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος, ἀποβαίνει ἁπλῆ ἐπίλυσις γεωμετρικοῦ τινος προβλήματος.

Ἐν τῇ ἐφαρμογῇ, τὰ πλεῖστα τῶν σωμάτων θεωροῦνται ὁμογενῆ, ὥστε ἡ εὕρεσις τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος περιορίζεται εἰς τὸ γεωμετρικὸν αὐτῶν σχῆμα, ἀντικαθισταμένων τῶν βάρεων διὰ τῶν ὄγκων ὧν εἰσὶν ἀνάλογα. Ἐν περιπτώσει δὲ καθ' ἣν τὸ πάχος τοῦ σώματος ἐστὶν ἑνὸς ἀτόμου, τὸ πρόβλημα ἀποβαίνει ἡ εὕρεσις τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος ἁπλῆς ἐπιφανείας.

230. Καλεῖται κέντρον τοῦ σχήματος, σημεῖόν τι δι' οὗ πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διαιρεῖ τὸ σχῆμα εἰς δύο ἴσα μέρη. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἐστὶ καὶ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τοῦ σχήματος, διότι πᾶν δι' αὐτοῦ τέμνον ἐπίπεδον διχοτομεῖ τὸ σχῆμα, ὥστε αἱ παράλληλοι δυνάμεις τῆς βαρύτητος τοῦ ἑνὸς μέρους εἰσὶν ἴσαι μὲ τὰς τοῦ ἑτέρου, ἅπασαι δ' ἔχουσι συνισταμένην ἐφαρμοσμένην πάντοτε ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν διὰ τοῦ σημείου τούτου διχοτομούντων ἐπιπέδων, ἄρα ἡ συνισταμένη τῆς βαρύτητος τοῦ ὅλου σώματος, ἐστὶν ἐφαρμοσμένη ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου, ὅπερ ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τοῦ σχήματος.

Προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι

1ον Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος εὐθείας τινος, ἐστὶ τὸ μέσον αὐτῆς.

2ον Ὅτι τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς περιμέτρου ἢ ἐπιφανείας παραλληλογράμμου τινος, ἐστὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο διαγωνίων αὐτοῦ.

3ον Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς περιμέτρου ἢ ἐπιφανείας κανονικοῦ τινος πολυγώνου, ἐστὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ (143).

4ον Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς περιφερείας ἢ τοῦ κύκλου, ἐστὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ.

5ον Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς ἐλλείψεως, ἐστὶ τὸ κέντρον ἤτοι ἡ διασταύρωσις τῶν ἀξόνων αὐτῆς.

6ον Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος παραλληλεπιπέδου τινος, ἐστὶ τὸ σημεῖον τῆς διασταυρώσεως τῶν διαγωνίων αὐτοῦ (154).

7ον Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος κανονικοῦ τινος πολυέδρου, ἐστὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ.

8ον Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς σφαίρας, ἐστὶ τὸ κέντρον αὐτῆς.

9ον Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος κυλίνδρου κυκλικῆς βάσεως, ἐστὶ τὸ μέσον τοῦ ἄξονος αὐτοῦ.

231. Ἡ εὕρεσις τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος ἐπιπέδου τινος σχήματος, ἀνάγεται ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν ἐπίλυσιν γεωμετρικοῦ τινος προβλήματος. Ὅθεν γεωμετρικῶς προσδιορίζεται τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῶν διαφόρων σχημάτων, ὧν τὰ μᾶλλον ἐν χρήσει εἰσὶ τὰ ἑξῆς.

Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τριγώνου τινος ΑΒΓ (Σχ. 137), ἐστὶ τὸ κέντρον Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὗτινος κορυφαὶ εἰσὶ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου οὗ ζητεῖται τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος.

Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος Δ, τόξου τινος κύκλου ΑΒ (Σχ. 138), εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὴν χορδὴν αὐτοῦ ἀκτῖνος ΓΟ, καὶ εἰς τοιαύτην ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία ΟΔ : ΟΓ : : ΑΒ : τόξον ΑΓΒ.

Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς ἐπιφανείας τριγώνου τινος ΑΒΓ (Σχ, 139) εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἑνούσης τὴν κορυφὴν Α μετὰ τοῦ μέσου τῆς βάσεως, εὐθείας ΑΔ, καὶ εἰς ἀπόστασιν ἐκ μὲν τῆς βάσεως ΚΔ$=\frac{1}{3}$ΑΔ, ἐκ δὲ τῆς κορυφῆς ΑΚ$=\frac{2}{3}$ΑΔ.

Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος Κ τραπεζίου τινος ΑΒΓΔ (Σχ. 140), εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διασταυρώσεως τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν δύο παραλλήλων βάσεων εὐθείας ΕΖ, καὶ τῆς εὐθείας ΗΘ, ἥτις ἑνόνει τὸ Η ληφθὲν ἐπὶ τῆς ΑΗ ὥστε ΔΗ=ΒΓ, καὶ τὸ Θ ληφθὲν ἐπὶ τῆς ΒΓ οὕτως ὥστε ΒΘ=ΑΔ.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τετραπλεύρου τινος ΑΒΓΔ (Σχ. 141), ἀχθήτω ἡ διαγώνιος ΒΔ, καὶ ἑνωθήτωσαν Α καὶ Γ μετὰ τοῦ μέσου ταύτης Ε. Τὰ κέντρα τῆς βαρύτητος τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΒΔΓ, εἰσὶν ὡς ἀνωτέρω εὑρισκόμενα τὰ κ καὶ κ'.

Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος Κ τοῦ τετραπλεύρου, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κκ', οὕτως ὥστε αἱ ἀποστάσεις κΚ καὶ Κκ' εἰσὶν ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ.

Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος κυκλικοῦ τινος τομέως ΟΑΒ (Σχ. 142) εὑρίσκεται εἰς Κ, ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ ἀκτῖνος, καὶ εἰς ἀπόστασιν ἐκ τοῦ κέντρου, ἴσης μὲ τὰ δύο τρίτα τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς χορδῆς διὰ τοῦ τόξου, τουτέστιν

$$\text{ΟΚ} = \tfrac{2}{3}\text{ΟΓ} \times \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ΄Γ}}.$$

Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος σφαιρικῆς τινος ζώνης, περιεχομένης μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 143), εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἀκτῖνος ΟΕ, καὶ εἰς τὸ μέσον Κ, τῆς μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων ἀποστάσεως ΖΗ.

Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος πρίσματός τινος, εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τῆς βαρύτητος τῶν δύο βάσεων εὐθείας.

Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος πυραμίδος τινός, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ἥτις ἑνόνει τὴν κορυφὴν ταύτης, μὲ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς βάσεως, καὶ εἰς ἀπόστασιν ἐκ μὲν τῆς βάσεως, ἴσης μὲ τὸ $\frac{1}{4}$, ἐκ δὲ τῆς κορυφῆς μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἰδίας ταύτης εὐθείας.

Τὸ αὐτὸ λεκτέον καὶ περὶ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τοῦ κώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄.

ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ.

Μοχλός. — Τροχαλίαι ἁπλαῖ καὶ σύνθετοι. — Σύσπαστα. — Ἐξέλικτρον. — Κρὲξ. — Κεκλιμένον ἐπίπεδον. — Ἕλιξ. — Σφήν. — Ἱμὰς ἀτέρμων.

232. *Μοχλός*, ἐστὶ ῥάβδος τις Α (Σχ. 144), δι' ἧς τῇ ἀναλόγῳ δυνάμει ἐνεργούσῃ εἰς τὸ ἓν ἄκρον Β, ἀνυψοῦται βάρος τι εἰς Α. Ἡ ῥά-

6δος αὕτη ἐρείδεται ἐπὶ τῆς ἄνω κόψεως ὑποστηρίγματος εἰς Γ. Ὑποτεθείσθω τὸ βάρος Μ ὀλίγον τι ὑψωμένον, καὶ ἐν ἰσορροπίᾳ εὑρισκόμενον ἐν τῇ θέσει ταύτῃ τῇ βοηθείᾳ τοῦ μοχλοῦ. Ἐν τοιαύτῃ θέσει οὗτος θέλει ὑπόκεισθαι εἰς τὴν ἐνέργειαν δύο δυνάμεων, ὧν ἡ μὲν ἐστὶν ἡ θλίψις ἣν ἐπιφέρῃ τὸ βάρος Μ εἰς Α, ἡ δὲ ἐστὶν ἡ ἀπαιτουμένη ἵνα ἐνεργῇ εἰς Β, ὅπως ἐμποδίζεται ἡ κατάπτωσις τοῦ σώματος Μ. Αἱ δύο αὗται δυνάμεις αἵτινες δύνανται νὰ θεωρηθῶσι παράλληλοι, ἔχουσιν ἀναγκαίως συνισταμένην ἥτις ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σημείου Γ, διότι ἂν δὲν ἐνήργει ἐπὶ τοῦ Γ ἀλλὰ κατὰ τὴν πκ ἢ μν, ὁ μοχλὸς ἤθελε στραφεῖ πέριξ τοῦ σημείου Γ, ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως ταύτης. Ὅθεν ἡ ἰσορροπία ἀπαιτεῖ ἵνα ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων Α καὶ Β, διέρχεται διὰ τοῦ ὑποστηρίγματυς Γ, ὁπόταν γνωστὸν ἐστὶν ὅτι (221) πρὸς τοῦτο δέον ἵνα αἱ δύο ἐνεργοῦσαι εἰς Α καὶ Β δυνάμεις εἰσὶν εἰς ἀντίστροφον λόγον τῶν μερῶν ΑΓ καὶ ΒΓ, ἅτινα καλοῦνται βραχίονες τοῦ μοχλοῦ. Ὅθεν ἡ ἰσορροπία τοῦ μοχλοῦ δίδει τὴν ἀναλογίαν

Θλίψις Α : Δύναμιν Β : : ΒΓ : ΑΓ.

Ὥστε ἐὰν ΒΓ ἐστὶ δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις μεγαλειτέρα τῆς ΑΓ, ἡ δύναμις ἥτις δέον νὰ ἐνεργήσῃ εἰς Β πρὸς ἰσορροπίαν τῆς ἐπιφερομένης εἰς Α θλίψεως, ἐστὶ δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις μικροτέρα τῆς θλίψεως ταύτης. Ὅθεν δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ ἄκρα μοχλοῦ τινος, ἰσορροποῦσιν ὅταν εὑρίσκονται εἰς ἀντίστροφον λόγον τῶν βραχιόνων τοῦ μοχλοῦ ἐφ' οὗ εἰσὶν ἐφαρμοσμέναι.

Τὴν ἀρχὴν ταύτην ἀνεκάλυψεν ὁ Ἀρχιμήδης, ὅστις κατανοῶν τὴν σπουδαιότητα αὐτῆς πάνυ εὐλόγως εἶπε «Δός μοι πᾶ στῶ, ἵνα καὶ τὰν γᾶν κινήσω».

233. Ἔστω μοχλός τις (Σχ. 145), ἐρειδάμενος ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος Α, ὅπερ καλεῖται *ὑπομόχλιον*. Π ἐστὶν ἡ δύναμις ἡ ἐνεργοῦσα διὰ τοῦ μοχλοβραχίονος α, καὶ ρ ἡ ἀντίστασις ἡ ἐνεργοῦσα διὰ τοῦ μοχλοβραχίονος 6. Ἡ ἰσορροπία ἀπαιτεῖ τὴν ἀναλογίαν Π : Ρ : : 6 : α.

Ὁ μοχλὸς οὗτος, οὗτινος τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς δυνάμεως Π καὶ τῆς ἀντιστάσεως Ρ, καλεῖται μοχλὸς τοῦ *πρώτου εἴδους*.

Ὅταν τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἓν ἄκρον, τοῦ μοχλοῦ, ἡ δύναμις εἰς τὸ ἕτερον, ἡ δὲ ἀντίστασις μεταξὺ τῶν δύο τούτων, ὁ μοχλὸς καλεῖται τοῦ *δευτέρου εἴδους* (Σχ. 146).

Ὅταν δὲ τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἓν ἄκρον, ἡ ἀντίστασις εἰς τὸ ἕτερον, καὶ ἡ δύναμις μεταξὺ τῶν δύο τούτων, ὁ μοχλὸς καλεῖται τοῦ *τρίτου εἴδους* (Σχ. 147).

234. Ἐκ τῆς ἀναλογίας τῆς ἰσοῤῥοπίας τοῦ μοχλοῦ

$$\Pi : P :: B : \alpha$$

προσδιορίζεται εἷς τῶν ἀγνώστων αὐτῆς ὅρων, ὅταν οἱ λοιποὶ τρεῖς εἰσὶ γνωστοί· ἤτοι $\Pi = \frac{P\beta}{\alpha}$, $P = \frac{\Pi\alpha}{\beta}$, $\beta = \frac{\Pi\alpha}{P}$ καὶ $\alpha = \frac{P\beta}{\Pi}$.

235. Εὑρεῖν τὴν ἀπαιτουμένην δύναμιν πρὸς ἀντιστάθμησιν βάρους 80 χιλ. ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριῶν εἰδῶν μοχλῶν.

Ἔστω τὸ μῆκος ἑκάστου μοχλοῦ 60,ὑφ ἡ ἀπόστασις τῆς ἀντιστάσεως ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου, εἰς τοὺς μοχλοὺς τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου εἴδους 10, ὑφ. εἰς δὲ τὸν τοῦ τρίτου εἴδους ἡ ἀντίστασις αὕτη ἐστὶ τὸ μῆκος τοῦ ὅλου μοχλοῦ, καὶ τελευταῖον ἡ ἀπόστασις τῆς δυνάμεως ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου, εἰς μὲν τοὺς μοχλοὺς τοῦ πρώτου καὶ τρίτου εἴδους 50, ὑφ. εἰς δὲ τὸν τοῦ δευτέρου εἴδους τὸ μῆκος τοῦ ὅλου μοχλοῦ Ἡ ζητουμένη δύναμις ἔσεται εἰς τὸν μοχλὸν

Τοῦ αου εἴδους $\Pi = \frac{80 \times 10}{50} = 16$ χιλιογρ.

Τοῦ βου εἴδους $\Pi = \frac{80 \times 10}{60} = 13{,}33$ χιλιογρ.

Τοῦ γου εἴδους $\Pi = \frac{80 \times 60}{50} = 96$ χιλιογρ.

ἐξ οὗ δείκνυται ὅτι ὁ μοχλὸς τοῦ βου εἴδους ἐστὶν ὁ καταλληλότερος ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς ἐφαρμογῆς μικροτέρας δυνάμεως, πρὸς ἀντιστάθμησιν τῆς ἀντιστάσεως.

Αἱ σιδηραὶ λαβίδες αἱ χρησιμεύουσαι πρὸς ἀνύψωσιν τῶν λίθων, καὶ αἱ χειράμαξαι, εἰσὶ μοχλοὶ τοῦ βου εἴδους.

236. Καθόσον ὁ μοχλοβραχίων αὐξάνει, τοσοῦτον ἡ ἐνέργεια τοῦ βάρους αὐξάνει, καὶ ἀντιστρόφως.

Παρομοίως, καθ' ὅσον ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως ἐστὶ μεγαλείτερος, τοσοῦτον τὸ τόξον ἢ τὸ διάστημα ὅπερ διατρέχει ἐστὶ μεῖζον, συγκριτικῶς πρὸς τὸ τόξον ἢ τὸ διατρεχόμενον διάστημα ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως· τουτέστιν ἐὰν ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις ἐστὶ μικροτέρα τῆς ἀντιστάσεως, ὁ μοχλοβραχίων αὐτῆς (τὸ διάστημα,

ἡ ταχύτης) ἐστὶ μείζων τοῦ μοχλοβραχίονος (διαστήματος ἢ ταχύτητος) τῆς ἀντιστάσεως, καὶ ἀντιστρόφως.

237. Ὁπόταν πλείονες μοχλοὶ συνδυάζονται μεταξύ των πρὸς μετάδοσιν δεδομένης τινος δυνάμεως, πρὸς ὕπαρξιν ἰσοῤῥοπίας δέον ἵνα τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ πάντας τοὺς μοχλοβραχίονας αὐτῆς, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἀντιστάσεως, ἐπὶ τοὺς μοχλοβραχίονας ταύτης, ἤτοι (Σχ. 148)

$$\Pi \times \alpha \times \alpha' = \text{P} \times \beta \times \beta'.$$

α΄. Θλίψις 20 χιλ. ἐφαρμόζεται εἰς τὸ ἄκρον μοχλοβραχίονος α εἰς ἀπόστασιν ἐκ τοῦ ὑπομοχλίου 300 ἑκατοστά. Ὁ μοχλοβραχίων τῆς ἀντιστάσεως ἐστὶ β=10 ἑκ. Ὁ δεύτερος μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως ά=84 ἑκατ. καὶ ὁ δεύτερος μοχλοβραχίων τῆς ἀντιστάσεως β=6 ἑκατ. Εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μοχλοβραχίονος β΄ ὑπάρχει στιγεὺς (κεντητήρι) πρὸς διατρύπησιν πεταλείου. Ἡ θλίψις ἣν δύναται νὰ ἐπιφέρῃ ὁ στιγεὺς ἔσεται

$$\text{P} = \frac{\Pi \times \alpha \times \alpha'}{\beta \times \beta'} = \frac{20 \times 300 \times 84}{10 \times 6} = 8400 \text{ χιλ.}$$

β΄. Τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον δέον ἵνα ἀνυψωθῇ τὸ ἄκρον τοῦ πρώτου μοχλοῦ τῆς δυνάμεως, ὅπως ὁ στιγεὺς δυνηθῇ νὰ διατρυπήσῃ τὸ πάχος 0,5 ἑκατοστοῦ ἐστὶ $\frac{0,5 \times 84 \times 300}{6 \times 10} = 210$ ἑκ. ἤτοι 2,10, μ. διάστημα ὅπερ διανύει ἡ δύναμις, ἐνῷ ἡ ἀντίστασις διανύει μόνον 0,5. ἑκ. Ὥστε ἡ δύναμις 20, χιλ. διὰ τοῦ συνδυασμοῦ δύο μοχλῶν ἐπέφερε θλίψιν 8400, χιλ. τουτέστι 420πλασίαν, ἡ ἀντίστασις ὅμως διήνυσε διάστημα 420 φορὰς μικρότερον.

238. *Τρυτάνη (Ζυγαριά).* Ἡ τρυτάνη ἐστὶν ὄργανον δι' οὗ εὑρίσκεται τὸ βάρος τῶν σωμάτων, σχετικῶς πρὸς δεδομένην τινὰ μονάδα. Συνίσταται κυρίως εἰς μοχλόν, ὅστις καλεῖται ζυγός, καὶ οὗτινος τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται ἐν τῷ μέσῳ, εἰς δὲ τὰ ἄκρα κρέμανται δίσκοι (Σχ. 149).

Δέον ἵνα ὁ ζυγὸς ἐστὶ λίαν εὐκίνητος πέριξ τοῦ σημείου τῆς στηρίξεως, τοῦτο δὲ νὰ ᾖ διαρκῶς ἐν μέσῳ ἐπακριβῶς αὐτοῦ. Πρὸς τοῦτο ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ ὑπάρχει προσκεκολλημένος ἄρβηλος ἐξέχων ἑκατέρωθεν. Ὁ ἄρβηλος οὗτος φέρει ὀξεῖαν κόψιν ἐστραμμένην πρὸς τὰ κάτω, καὶ δι' ἧς ἐπακουμβᾷ ἐπὶ δύο μικρῶν ὁριζοντείων ἐπιπέδων ἐκ χάλυβος ἢ ἀχάτου, τὸ μὲν ἔμπροσθεν τοῦ ζυγοῦ, τὸ δὲ

ὄπισθεν αὐτοῦ, καὶ προσαρμοσμένων ἐπὶ κατακορύφου στυλίδος. Αἱ παλινδρομικαὶ κινήσεις τοῦ ζυγοῦ λαμβάνουσι χώραν πέριξ τῆς κόψεως ταύτης, ἥτις χρησιμεύει ὡς ἄξων περιστροφῆς.

Τὰ δύο ἄκρα τοῦ ζυγοῦ ἀπολήγουσιν εἰς ἀναλόγους τοῦ περιγραφέντος ἀρβήλους, ὧν ὅμως αἱ κόψεις εἰσὶ πρὸς τὰ ἄνω ἐστραμμέναι. Ἐπὶ τῶν ἀρβήλων τούτων ἐρείδονται τὰ ἄγκιστρα ἐξ ὧν κρέμανται αἱ φέρουσαι τοὺς δίσκους ἁλύσεις.

Ἡ χρῆσις τῆς τρυτάνης γίνεται διὰ τῆς ἐν ἑνὶ τῶν δίσκων τοποθετήσεως τοῦ ζυγισθησομένου σώματος, ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ γνωστῶν βάρεων, ἄχρις ἀποκαταστάσεως ἰσοῤῥοπίας, τουτέστιν ἄχρις οὗ ὁ ζυγὸς μένει ὁριζόντειος. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ τεθέντος εἰς τὸν ἕνα δίσκον βάρους, δεικνύει τὸ βάρος τοῦ σώματος ἐὰν ἡ τρυτάνη ἀκριβὴς ἐστίν.

Ἵνα τρυτάνη τις ἐστὶν ἀκριβής, δέον ὅπως πληροῖ τὰς ἑξῆς δύο συνθήκας· α'. αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τῆς κρεμάνσεως τῶν δίσκων ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς στηρίξεως τοῦ ζυγοῦ, νὰ ὦσιν ἐντελῶς ἴσαι, καὶ β'. ὅταν οἱ δίσκοι εἰσὶ κενοί, ὁ ζυγὸς νὰ ᾖ ὁριζόντειος. Καὶ ὄντως, εὐκόλως κατανοεῖται ὅτι τῶν δύο τούτων συνθηκῶν πληρουμένων, ἐὰν τιθεμένων δύο σωμάτων ἐπὶ τῶν δίσκων, ὁ ζυγὸς μένει ὁριζόντειος, τὰ βάρη τῶν δύο τούτων σωμάτων εἰσὶν ἴσα, διότι τὰ βάρη ταῦτα εἰσὶ δύο παράλληλοι δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ εἰς τὰ ἄκρα ἴσων μοχλοβραχιόνων.

Συνήθως ἡ ἀκρίβεια τρυτάνης τινος ἐστὶ παραδεκτὴ ὅταν καταδειχθῇ ἡ ὕπαρξις τῆς δευτέρας τῶν συνθηκῶν τούτων, πλὴν τοῦτο μόνον δὲν ἀρκεῖ, διότι ἡ ὕπαρξις τῆς συνθήκης ταύτης, δὲν ἀποδεικνύει τὴν ἰσότητα τῶν βραχιόνων τοῦ ζυγοῦ. Ὅθεν πρὸς δοκιμασίαν τούτου, ὅταν τῶν δίσκων ὄντων κενῶν, ὁ ζυγὸς μένει ὁριζόντιος, τίθενται ἐν τοῖς δίσκοις δύο σώματα τοιαῦτα, ὥστε νὰ τηρηθῇ καὶ τότε ὁ ζυγὸς ὁριζόντειος, ἀκολούθως ἀλλάσσονται τὰ ἐν τοῖς δίσκοις σώματα, οὕτω ὥστε τὸ μὲν ἐν τῷ ἀριστερῷ δίσκῳ σῶμα τίθεται ἐν τῷ δεξιῷ τοιούτῳ, καὶ ἀντιστρόφως, καὶ ἂν μετὰ τὴν ἀλλαγὴν ταύτην ὁ ζυγὸς τηρεῖται πάλιν ὁριζόντειος, ἡ τρυτάνη ἐστὶν ἀκριβής.

239. Πρὸς ἀκριβῆ προσδιορισμὸν τοῦ βάρους τῶν σωμάτων, δὲν ἀρκεῖ μόνον ἵνα τρυτάνη τις ἐστὶν ἀκριβής, ἀλλὰ δέον ἵνα αὐτη ᾖ

λίαν αἰσθητική, τουτέστιν ὅταν ὁ ζυγὸς μένῃ ὁριζόντειος ὑπὸ τὴν ἐπίῤῥοιαν δύο ἴσων ἐν τοῖς δίσκοις βάρεων, ἐὰν εἰς ἕνα τῶν δίσκων τούτων προστεθῇ ἐλάχιστόν τι βάρος, ὁ ζυγὸς δέον ἀμέσως νὰ μεταβάλλῃ θέσιν, καὶ ἡ ἰσοῤῥοπία νὰ καταστραφῇ. Ἐπίσης καλὴ τρυτάνη δέον νὰ παρουσιάσῃ τὸν αὐτὸν βαθμὸν αἰσθητικότητος, δι' οἱαδήποτε ἐν τοῖς δίσκοις τεθησόμενα βάρη. Πρὸς ὕπαρξιν τοιαύτης αἰσθητικότητος, δέον ἵνα πληροῦνται αἱ ἑξῆς δύο συνθῆκαι. α'. τὸ σημεῖον ἐφ' οὗ ἐρείδεται ὁ ζυγὸς, καὶ τὰ σημεῖα τῆς κρεμάνσεως τῶν δίσκων νὰ εὑρίσκονται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, καὶ β'. τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τοῦ ζυγοῦ, νὰ εὑρίσκεται κάτωθεν τοῦ σημείου ἐφ' οὗ ἐρείδεται καὶ πολλὰ πλησίον τούτου.

Τῇ προσπαθείᾳ τῆς ἀποκτήσεως ὅσον τὸ δυνατὸν, τῶν δύο τούτων πλεονεκτημάτων, κατωρθοῦται ἡ κατασκευὴ τρυτανῶν, δυναμένων νὰ σταθμίζωσι μετὰ πλείστης ἀκριβείας σώματα διαφόρων βάρεων. Οὕτω ἡ τρυτάνη τοῦ Deleuil ἔχει τοσαύτην αἰσθητικότητα, ὥστε δεικνύει τὴν εἰς ἕνα τῶν δίσκων προσθήκην ἑνὸς χιλιοστοῦ τοῦ δραχμίου, ὁπόταν ἀμφότεροι οἱ δίσκοι φέρουσιν ἕκαστος βάρος 10.χιλ.

240. Ὁπόταν ἡ τρυτάνη ἐστὶ λίαν αἰσθητικὴ, ἡ προσθήκη τοῦ ἐλαχίστου βάρους εἰς ἕνα τῶν δίσκων, μεταβάλλει τὴν θέσιν τῆς ἰσοῤῥοπίας, πλὴν αὕτη δὲν μένει σταθερὰ ἐν τῇ νέᾳ τῆς ἰσοῤῥοπίας θέσει, ἢ μετὰ ἀριθμόν τινα παλινδονήσεων ἑκατέρωθεν τῆς θέσεως ταύτης. Ὅθεν ἵνα μὴ ὑποχρεοῦται ὁ σταθμίζων, ν' ἀναμένῃ τὴν παῦσιν τῶν παλινδονήσεων τούτων, ὁ ζυγὸς φέρει δείκτην πάλλοντα μετ' αὐτοῦ, καὶ οὗ τὸ ἄκρον κινεῖται ἐπὶ διῃρημένου δίσκου, ὥστε ὁπόταν ὁ πάλλων δείκτης ἀπομακρύνεται ἑκατέρωθεν ἐξ ἴσου τῆς θέσεως αὐτοῦ, ἥτις ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν ὁριζόντειον τοῦ ζυγοῦ θέσιν, τὰ ἐν τοῖς δίσκοις βάρη εἰσὶν ἴσα, ὥστε οὐδεμία ὑφίσταται ἀνάγκη ἵνα πρὸς στάθμισιν ἀναμένει ὁ σταθμίζων τὴν παῦσιν τῆς παλινδονήσεως τοῦ ζυγοῦ.

Πολλάκις ἡ τρυτάνη διατίθεται οὕτως ὥστε ὁ μοχλὸς κεῖται κάτωθεν οἱ δὲ δίσκοι ἄνωθεν αὐτοῦ ἐπὶ κατακορύφων κανόνων συνδεομένων μετὰ τοῦ μοχλοῦ ἐνάρθρως. Δεύτερος παράλληλος μοχλὸς χρησιμεύει διὰ τὴν τακτικὴν κίνησιν τῶν δίσκων, ὡς ἐν τῷ (Σχ. 150) δείκνυται.

241. *Στατὴρ* (*Καντάρι*). Σύγκειται τὸ ὄργανον τοῦτο τῆς σταθμήσεως ἐκ μοχλοῦ τοῦ πρώτου εἴδους, στρεφομένου πέριξ τοῦ

σημείου Ο (Σχ. 151). Τὸ πρὸς στάθμησιν βάρος κρέμαται εἰς Β τοῦ μικροῦ μοχλοῦ, καὶ ἰσοῤῥοπεῖται διὰ σταθεροῦ βάρους Π, ὅπερ δύναται νὰ ὀλισθαίνῃ κατὰ μῆκος τοῦ μεγάλου μοχλοῦ. Τὰ σημεῖα τῆς κρεμάνσεως Π καὶ Κ, τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος Τ, καὶ ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς Ο, κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἔτι δὲ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος Τ, καὶ τὸ σημεῖον Β τῆς κρεμάνσεως τοῦ βάρους, κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς. Ἐὰν Ρ ἐστὶ τὸ βάρος τοῦ μοχλοῦ, ρ ἡ ἀπόστασις ΟΒ τῆς κρεμάνσεως τοῦ βάρους ἐκ τοῦ ἄξονος τούτου ἡ ἰσοῤῥοπία ἀπαιτεῖ ἵνα $\Pi \times OM = K\kappa + P\rho$.

Ὁπόταν εἰς Β δὲν ὑπάρχει βάρος, πρὸς ὕπαρξιν τῆς ἰσοῤῥοπίας τὸ Π τίθεται εἰς Α, ὥστε $\Pi \times OA = K\kappa$.

Τῇ ἀφαιρέσει τῆς ἰσότητος ταύτης ἐκ τῆς προηγουμένης μέλος πρὸς μέλος προκύπτει

$$\Pi \times OM - \Pi \times OA = K\kappa + P\rho - K\kappa \text{ ἐξ ἧς}$$

$$\Pi(OM - OA) = P\rho, \text{ ἢ } \Pi \times AM = P\rho \text{ καὶ } AM = \frac{P\rho}{\Pi}$$

ἐξ οὗ καταδείκνυται ὅτι ἡ μεταβλητὴ ἀπόστασις ΑΜ ἐστὶν ἀνάλογος τοῦ βάρους Κ.

Πρὸς διαίρεσιν τοῦ μοχλοῦ, προσδιορίζεται πρῶτον πειραματικῶς τὸ σημεῖον Α, ἔνθα γράφεται Ο· ἀκολούθως κρεμᾶται εἰς Β βάρος γνωστὸν 100 ὀκ. φερ' εἰπεῖν, καὶ εὑρίσκεται τὸ σημεῖον Δ, ἐφ' οὗ τιθέμενον τὸ Π, ἰσοῤῥοπεῖ τὸ βάρος Κ. Σημειοῦται εἰς Δ, 100, καὶ διαιρεῖται ἡ ἀπόστασις ΑΔ εἰς 100 ἴσα μέρη, παρατείνονται δὲ αἱ διαιρέσεις καὶ πέραν τοῦ Δ. Καταφανὲς γίνεται ἤδη ὅτι ἐὰν βάρος τι κρεμάμενον εἰς Β. ἀπαιτεῖ πρὸς ἰσοῤῥοπίαν ἵνα τὸ Π τεθῇ εἰς Μ, τὸ βάρος τοῦτο Κ ὂν ἀνάλογον τῇ ΑΜ, θέλει ἐκφράζεσθαι διὰ τοῦ εἰς Μ σημειουμένου ἀριθμοῦ, εἰς μονάδας τῆς διαιρέσεως τοῦ μοχλοῦ.

242. *Τροχαλίαι καὶ Πολύσπαστα.* Ἡ τροχαλία ἐστὶ τροχὸς φέρων καθ' ὅλην τὴν περιφέρειάν του αὔλακα, καὶ στρεφόμενος περὶ ἄξονα ἐρειδόμενον ἐπὶ τοῦ μετώπου τροχαλιοθήκης ἐντὸς τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ὁ τροχός. Τὴν ἄνω ἡμιαύλακα περιβάλλει σχοινίον ὅπερ κρέμαται ἑκατέρωθεν ἐφαπτομένως τῷ τροχῷ, καὶ δι' οὗ ἡ δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως. Ὁ ἄξων ἀπολήγει εἰς πυργίσκους στρεφομένους ἐντὸς ἀναπαυστηρίων, ἅτινα δέον νὰ τηρῶνται καθαρὰ καὶ ἠλειμμένα πρὸς ἐλάττωσιν τῆς τριβῆς (Σχ. 152).

Ἡ τροχαλία λέγεται παγία, ὁπόταν ὁ ἄξων αὐτῆς τηρεῖται πάγιος, καὶ ἐλευθέρα ὁπόταν ὁ ἄξων αὐτῆς ἐστὶν ἐλεύθερος. Ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιστάσει δύναται νὰ κινεῖται ἐν τῷ διαστήματι, στρεφομένη ταυτοχρόνως περὶ τὸν ἑαυτῆς ἄξονα.

Ἐν τῇ παγίᾳ τροχαλίᾳ (Σχ. 153), τῆς ἀντιστάσεως κρεμαμένης ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ σχοινίου, καὶ τῆς δυνάμεως ἐνεργούσης ἐπὶ τοῦ ἑτέρου, ἤτοι τῶν δυνάμεων τούτων ἐνεργουσῶν ἐφαπτομένως τῷ τροχῷ, φανερὸν ὅτι ἡ ἰσοῤῥοπία ἀπαιτεῖ ἰσότητα δυνάμεως καὶ ἀντιστάσεως. Ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς τροχαλίας, καταστρέφεται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἄξονος, προσέτι δὲ ἐὰν αἱ δυνάμεις ἐνεργοῦσι παραλλήλως, ὁ ἄξων οὗτος ὑφίσταται θλίψιν, ἴσην τῷ ἀθροίσματι αὐτῶν.

Ὅθεν ἡ παγία τροχαλία παρέχει τὸ πλεονέκτημα τῆς ἀλλαγῆς μόνον τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως, ὥστε ὁ ἀντλῶν ὕδωρ ἐκ φρέατος, ἀντὶ νὰ ἕλκῃ πρὸς τὰ ἄνω, δύναται διὰ τῆς χρήσεως τοιαύτης τροχαλίας, νὰ ἐνεργήσῃ διὰ τῆς αὐτῆς μὲν δυνάμεως, πλὴν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω σύρων, ὅπερ δι' αὐτὸν εὐκολώτερον.

243. Ἐν τῇ ἐλευθέρᾳ τροχαλίᾳ (Σχ. 154), τὸ σχοινίον ἐστὶ προσδεδεμένον δι' ἑνὸς τῶν ἄκρων του εἰς πάγιόν τι σημεῖον Ε, ἐπὶ δὲ τοῦ ἑτέρου ἐνεργεῖ ἡ δύναμις Π, ἧς ἡ διεύθυνσις τῆς ἐνεργείας ἀλλάσσεται δι' ἀμεταθέτου τροχαλίας Ν, τέλος τὸ ἀνυψωθησόμενον βάρος ἢ ἡ ἀντίστασις Ρ, κρέμαται δι' ἀγγίστρου ἐκ τοῦ μέσου τῆς τροχαλιοθήκης. Τὸ σταθερὸν σημεῖον Ε, ὑφίσταται θλίψιν ἴσην τῇ εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ σχοινίου ἐνεργούσῃ δυνάμει Π. Πρὸς ὕπαρξιν ἰσοῤῥοπίας δέον ἵνα ἡ ἀντίστασις ἔσεται ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων ἴσων δυνάμεων, τουτέστιν ἐὰν αἱ δυνάμεις αὗται εἰσὶ παράλληλοι $Ρ=2Π$. Ὅθεν διὰ τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας, ἀνυψοῦται τὸ βάρος τῇ καταναλώσει τοῦ ἡμίσεως τῆς δυνάμεως.

244. Τὸ (Σχ. 155) δεικνύει τὸν συνδυασμὸν μοχλοῦ καὶ τροχαλίας. Β ἐστὶ τὸ ὑπομόχλιον, Γ ἡ ἀντίστασις, καὶ Α ἡ δύναμις, τουτέστι τὸ ἄκρον τοῦ μοχλοῦ ἔνθα προσδέεται σχοινίον περιβάλλον παγίαν τροχαλίαν, ὅπερ παρέχει εὐκολωτέραν ἐφαρμογὴν τῆς δυνάμεως.

245. Διὰ τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας δύναμίς τις δύναται νὰ ἰσοῤῥοπήσῃ διπλασίαν ἀντίστασιν. Ὅθεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐλευθέρων τροχαλιῶν, πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ ἀντίστασις ἣν ἰσοῤῥοπεῖ δεδομένη τις δύναμις. Δι' ὃ κατεσκευάσθησαν παρασκευάσματα, ἐκ πλειόνων τροχαλιῶν συνιστάμενα, καὶ ἅτινα *πολύσπαστα* καλοῦνται. Τὸ παρεχόμενον πλεονέκτημα ὑπὸ ἐλευθέρου πολυσπάστου, ἐστὶ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐλευθέρων τροχαλιῶν ἃς φέρει, τῶν παγίων τροχαλιῶν χρησιμευουσῶν μόνον, πρὸς ἀλλαγὴν τῆς τῶν σχοινίων διευθύνσεως.

246. Ὁπόταν ἡ τροχαλία ἔχει δύο αὐχένας, ὅπερ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἁπλούστερον πολύσπαστον (Σχ. 156), καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἰσὶν ὡς 1 : 2, καταφανὲς ἐστὶν ὅτι βάρος Ρ=200 χιλ. κρεμάμενον εἰς τὸ 0,05 π. χ. ἐκ τοῦ κέντρου διερχόμενον σχοινίον, θέλει ἰσοῤῥοπηθῇ διὰ βάρους Σ=100χιλ. μόνον, πλὴν κρεμάμενον εἰς σχοινίον διερχόμενον εἰς ἀπόστασιν 0,1 ἐκ τοῦ ἰδίου κέντρου.

Τὸ μηχανικὸν πλεονέκτημα τοῦ ἐλευθέρου πολυσπάστου, προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς δυνάμεως διανυθὲν διάστημα εἰς ὡρισμένον χρόνον, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν συντομεύσεων τῶν ἐπὶ τῶν ἐλευθέρων τροχαλιῶν κυλισθέντων σχοινίων, ἐνῷ ἡ ἀντίστασις δὲν ἀνυψοῦται ἢ διατρέχει, παρὰ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ διαστήματος τούτου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σχοινίων.

Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι

α΄. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀπαιτουμένης δυνάμεως, πρὸς ἰσοῤῥόπησιν δεδομένης ἀντιστάσεως, διαιρετέον τὸ ἀνυψωθησόμενον βάρος, διὰ τοῦ διπλασίου ἀριθμοῦ τῶν ἐλευθέρων τροχαλιῶν. Οὕτω ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις πρὸς ἀντιστάθμησιν βάρους 176 χιλ. διὰ ζεύγους πολυσπάστων ἐκ τεσσάρων τροχαλιῶν, ἐστὶ

$$\frac{176}{2\times 4}=22. \text{ χιλ.}$$

β΄. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀντιστάσεως τῆς ἰσοῤῥοπούσης δεδομένην δύναμιν, πολλαπλασιασθήτω τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐλευθέρων τροχαλιῶν, ἐπὶ τὴν ἀντίστασιν ταύτην. Οὕτω ἡ ἀντίστασις ἥτις θέλει ἰσοῤῥοπήσει δύναμιν 125 χιλ. διὰ ζεύγους πολυσπάστων ἐκ 3 ἐλευθέρων τροχαλιῶν ἐστὶν $125\times 2\times 3=750$. χιλ.

247. Τὰ σχήματα 157 καὶ 158 δεικνύουσι τὴν διάταξιν τῶν τροχαλιῶν τῶν συνθετωτέρων πολυσπάστων. Αἱ τροχαλίαι πᾶσαι τούτων εἰσὶν ἐλεύθεραι, ἐκτὸς ἐκεί νης ἐφ' ἧς ἐνεργεῖ ἡ δύναμις.

Ἕνεκα τῆς ἐκ τῶν σχοινίων ἀναπτυσσομένης τριβῆς, εἰς πολύ-

σπαστα ἐκ πλειόνων τροχαλιῶν, καὶ τῆς ὡς ἐκ τούτου αὐξήσεως τῆς ἀντιστάσεως, ὁ ἄγγλος Smeaton κατεσκεύασε πολύσπαστον, ἐν ᾧ διέθεσε τὰς τροχαλίας ὡς δεικνύει τὸ (Σχ. 159), καὶ ὅπερ ἠλάττωσε τὸ μειονέκτημα τοῦτο. Αἱ τροχαλίαι ἑκάστου στελέχους κεῖνται εἰς δύο σειρὰς AA′BB′, αἱ δὲ τελευταῖαι εἰσὶν ἐλάσσονες τῶν πρώτων. Τῆς δυνάμεως ἐφαρμοζομένης εἰς τὸ μέσον τοῦ παρασκευάσματος, τὸ σχοινίον περιβάλλει διαδοχικῶς τάς τε μεγάλας καὶ μικρὰς τροχαλίας, κατὰ τὴν δι' ἀριθμῶν ἐνδεικνυομένην τάξιν.

Ἕτερος ἐπίσης Ἄγγλος, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, κατεσκεύασε τὸ δεικνυόμενον διὰ τοῦ (Σχ. 160) πολύσπαστον, οὗ αἱ τροχαλίαι ἑκάστου μέρους ἀπαρτίζουσι σῶμα κωνοειδὲς, καὶ ἃς περιβάλλουσι τὰ σχοινία κατὰ τὴν ἐν τῷ σχήματι ἐνδεικνυομένην τάξιν.

248. *Ἐξέλικτρον καὶ ὄνος* (Βαροῦλκον, ἐργάτης). Τὸ ἐξέλικτρον σύγκειται ἐκ κυλίνδρου A (Σχ. 161), οὗ τὰ ἄκρα λήγουσιν εἰς πυργίσκους στρεφομένους ἐντὸς παγίων ἀναπαυστηρίων Γ, ἐν οἷς στρέφει περὶ τὸν ἑαυτοῦ ἄξονα. Σχοινίον οὗ τὸ ἓν τῶν ἄκρων ἐστὶ προσδεδεμένον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, φέρει εἰς τὸ ἕτερον τὸ ἀνυψωθησόμενον βάρος Π. Ὁ κύλινδρος στρέφεται διὰ μοχλῶν, ἢ ἐπ' αὐτοῦ προσαρμοσμένων, ἢ προσαρμοζομένων κατὰ τὰς στροφὰς δι' ἐγκοπῶν ἐπ' αὐτοῦ εὑρισκομένων. Ἡ περιστροφὴ τοῦ κυλίνδρου, προξενεῖ τὴν ἐπ' αὐτοῦ περιτύλιξιν τοῦ σχοινίου, καὶ ἑπομένως τὴν ἀνύψωσιν τοῦ βάρους. Πρὸς εὕρεσιν τῆς σχέσεως ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ βάρους ὅπερ ἀνυψοῦται, καὶ τῆς ἐνεργούσης δυνάμεως, παρατηρητέον ὅτι ἀδιάφορος ἐστὶν ἡ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου θέσις τῶν μοχλῶν, διότι ὁπόταν τὸ μῆκος αὐτοῦ μένει τὸ αὐτὸ, καὶ ἡ δύναμις ἐνεργεῖ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ καθέτως τῷ μήκει τούτου, ἡ δύναμις αὕτη ἕξει πάντοτε τὴν αὐτὴν ἐνέργειαν πρὸς ἀνύψωσιν τοῦ βάρους Π. Ὅθεν δύναται νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ φέρον τὸ βάρος σχοινίον, καὶ ὁ μοχλὸς ἐφ' οὗ ἐνεργεῖ ἡ δύναμις εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καθέτου εἰς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Ἐν τοιαύτῃ θέσει αἱ δύο δυνάμεις Π καὶ Φ (Σχ. 162), εὑρίσκονται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ὡς εἰ ἦσαν ἐφαρμοσμέναι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἀγκωνωτοῦ μοχλοῦ ΜΟΝ, τουτέστι πρὸς ὕπαρξιν ἰσορροπίας, δέον ἵνα αὗται ὦσιν εἰς ἀντίστροφον λόγον, τῆς ἀκτῖνος τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ μήκους τοῦ μοχλοῦ, ἤτοι

$$\Pi \times OM = \Phi \times ON \text{ ἐξ ἧς } \Phi = \frac{\Pi \times OM}{ON}.$$

Ὅθεν ἐπὶ ἐξελίκτρου οὗ ἡ διάμετρος τοῦ κυλίνδρου ἐστὶ 0,25,$^{\mu.}$ τὸ δὲ μῆκος τοῦ μοχλοῦ 0,75, ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις πρὸς ἀνύψωσιν 50$\chi^{\iota\lambda.}$ βάρους ἐστὶ

$$\Phi = \frac{\Pi \times OM}{ON} = \frac{50 \times 0,25}{0,75} = 16,66 \chi.\mu.$$

249. Ἐν περιπτώσει συνθέσεως ἐξελίκτρου μετὰ ἐμπλεκτικῶν τροχῶν (Σχ. 163), δέον ὅπως ἐν τῇ ἄνω ἀναλογίᾳ εἰσέλθῃ καὶ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν ἀστερίσκων, πρὸς τὰς ἀκτίνας τῶν τροχῶν, ὥστε ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἡ δύναμις ἔσεται πρὸς τὴν ἀντίστασιν, ὡς τὸ γινόμενον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὰς τῶν ἀστερίσκων, πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ μοχλοῦ ἐπὶ τὰ τῶν ἀκτίνων τῶν τροχῶν, ἤτοι

$$\Pi : P :: \beta \times \beta' \times \beta'' : \alpha \times \alpha' \times \alpha''$$

$$\text{Ἐκ ταύτης } \Pi = \frac{P \times \beta \times \beta' \times \beta''}{\alpha \times \alpha' \times \alpha''}.$$

$$P = \frac{\Pi \times \alpha \times \alpha' \times \alpha'}{\beta \times \beta' \times \beta''}.$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{\Pi}{P} = \frac{\beta \times \beta' \times \beta''}{\alpha \times \alpha' \times \alpha''}.$$

250. Ὁ ὄνος ἐστὶν ἐξέλικτρον, οὗτινος ὁ κύλινδρος ἐστὶ κατακόρυφος, καὶ οὗτινος ἥ τε δύναμις καὶ ἀντίστασις ἐνεργοῦσιν ὁριζοντείως (Σχ. 164)· ἐστὶ δ' ἐν χρήσει ἐν τοῖς λιμέσι καὶ πλοίοις πρὸς ἕλξιν μεγάλων βάρεων.

251. Τὸ Σχ. 165, παριστάνει ἓν τῶν συνήθων τῶν φρεάτων ἐξέλικρον δι' οὗ ἀντλεῖται το ὕδωρ. Πρὸς ἀνάπαυσιν τοῦ δι' ἐξελίκτρου ἀντλοῦντος ὕδωρ ὑπάρχει εἰς Α κροτάλιον, ὅπερ παρεμποδίζει τὴν ἀντίθετον στροφὴν τοῦ ἄξονος, καὶ ἑπομένως τὴν κατάπτωσιν τοῦ βάρους, ἐν περιπτώσει καθ' ἣν παύσῃ ἡ ἐπὶ τοῦ μοχλοῦ ἐνέργεια τῆς δυνάμεως πρὸ τῆς ὁλικῆς τοῦ βάρους ἀνέλξεως.

Τὸ κροτάλιον τοῦτο σύγκειται ἐκ μικροῦ τεμαχίου μετάλλου ἢ ξύλου, σχήματος ὡς δείκνυται εἰς α (Σχ. 166), στρεφόμενον περὶ πάγιον ἄξονα, καὶ ὠθούμενον μεταξὺ τῶν ὀδόντων μικροῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ οὗ οἱ ὀδόντες εἰσὶ κεκλιμένοι, καὶ καλουμένου κορα-

κωτοῦ, δι' ἐλατηρίου ϐ. Καταφανές ἐστιν ὅτι τοῦ ῥάμφους τοῦ κροταλίου εἰσερχομένου μεταξὺ τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ γ, δύναται ὁ τροχὸς νὰ περιστρέφεται ἐκ δεξιῶν πρὸς ἀριστερὰ ἀνυψῶν τὸ κροτάλιον καὶ ὑπερνικῶν τὴν ἐνέργειαν τοῦ ἐλατηρίου ϐ, πλὴν ἀδυνατεῖ νὰ περιστρέφεται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιὰ ἐνόσῳ τὸ κροτάλιον τηρῇ τὴν μεταξὺ τῶν ὀδόντων αὐτοῦ θέσιν του. Τὸ ἐλατήριον δύναται νὰ ἐλλείπῃ εἴς τινας περιστάσεις, ὡς εἰς τὴν τοῦ ἐξελίκτρου (Σχ. 165), ἔνθα τὸ κροτάλιον πίπτει μεταξὺ τῶν ὀδόντων τῶν τροχῶν διὰ τοῦ ἰδίου αὐτοῦ βάρους.

252. *Κρὲξ* (κρίκος). Ἡ Κρὲξ χρησιμεύει πρὸς ἀνύψωσιν εἰς μικρὸν ὕψος μεγάλων βαρέων, διὰ μικρᾶς δυνάμεως. Σύγκειται ἀπὸ ὀδοντωμένον κανόνα Α (Σχ. 167), ἐμπλεκόμενον μετὰ ἀστερίσκου Γ, ὁμοκέντρου ὄντος μετὰ τοῦ ἐμπλεκτικοῦ τροχοῦ Β, συστρεφομένου μετ' αὐτοῦ, καὶ ἐμπλεκομένου μετὰ δευτέρου ἀστερίσκου Δ, φέροντος κατὰ τὸν ἄξονα στρόφαλον Ε. Πρὸς χρῆσιν τοῦ ὀργάνου, εἰσάγεται τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος Α, ὑπὸ τὸ ὑψωθησόμενον σῶμα, καὶ περιςρέφεται ὁ στρόφαλος κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ βέλους δεικνυομένην διεύθυνσιν. Ὁ ἀστερίσκος Δ περιστρεφόμενος μετὰ τοῦ στροφάλου, περιστρέφει τὸν τροχὸν Β, ὅστις παρασύρει εἰς τὴν στροφήν του τὸν ἀστερίσκον Γ, δι' οὗ ἀνυψοῦται ὁ παράγων τὸ ἀποτέλεσμα κανών.

Πρὸς ἐκτίμησιν τῆς δυνάμεως ἥτις δέον νὰ ἐνεργήσῃ ἐπὶ τοῦ στροφάλου, πρὸς ἰσοῤῥόπησιν τῆς ἀντιστάσεως ἣν δέον νὰ ὑπερνικήσῃ ὁ κανών, ὑποθετέον ὅτι ὁ βραχίων τοῦ στροφάλου ἐστὶ πενταπλάσιος τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἀστερίσκου Γ, καὶ ὅτι ὁ ἀστερίσκος Δ φέρει 6 ὀδόντας, ὁ δὲ τροχὸς Β, 18. Ἐὰν ὁ στρόφαλος ἐνήργει ἀμέσως ἐπὶ τοῦ ἀστερίσκου Γ, ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦσα δύναμις, ἔχουσα μοχλοϐραχίονα πεντάκις μείζονα τοῦ τῆς ἀντιστάσεως, ἤθελεν εἶσθαι τὸ πεμπτημόριον τῆς ἀντιστάσεως ταύτης. Ἡ ἐνέργεια ὅμως τοῦ στροφάλου, ἐπὶ τοῦ ἀστερίσκου Γ, ἐνεργεῖ διὰ μέσου ἐμπλεκτικότητος, ἐν ᾧ ὁ τροχὸς Β φέρει τριπλασίους τὸν ἀριθμὸν ὀδόντας τοῦ ἀστερίσκου Δ. Ἡ ἐπὶ τοῦ στροφάλου ὅμως ἐνεργοῦσα δύναμις, δέον νὰ ᾖ τρὶς μικροτέρα, ἐκείνης ἥτις ἀπῃτεῖτο ἄνευ τῆς ἐμπλεκτικότητος, τουτέστιν ἔσεται τὸ δέκατον πέμπτον τῆς ἀντιστάσεως, ἣν ὁ κανὼν δέον νὰ ὑπερικήσῃ. Διὰ τοιαύτης κρεγὸς μὲ δύναμιν 40χιλ. ἀνυψοῦται βάρος $40 \times 15 = 600$χιλ.

Ὁ κορμὸς τῆς κρεγὸς συνίσταται ἐκ τεμαχίου ξύλου φέροντος ἐντομὴν κατὰ μῆκος, ἐν ᾗ εὑρίσκονται οἱ ἐμπλεκτικοὶ τροχοί. Οὗτοι καλύπτονται διὰ τεμαχίου πεταλείου, διαπερωμένου ὑπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ στροφάλου, καὶ ὅπερ ἀφηρέθη ἐν τῷ σχήματι 167 πρὸς κατάδειξιν τῶν ἐσωτερικῶν μηχανημάτων. Κροτάλιον (251) εἰς μ (Σχ. 168), κωλύει τὴν ἀντίστροφον περιςροφὴν καὶ ἑπομένως κατάπτωσιν τοῦ βάρους ἐν περιπτώσει παύσεως τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως ἐπὶ τοῦ στροφάλου, καὶ τοῦτο παρέχει τοῖς ἐργάταις καιρὸν ἀναπαύσεως. Τὸ κροτάλιον στρεφόμενον ἀντιστρόφως, καὶ λαμβάνον τὴν θέσιν μ΄, ἐπιτρέπει τὴν ἐκ νέου κάθοδον ἐν ἀνάγκῃ τοῦ βάρους.

Κατὰ τὰ λεχθέντα, τὸ βάρος ὅπερ δύναται ν᾽ ἀνυψώσῃ κρὲξ ἧς τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου ἐστὶν 25 ὑφεκ. ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐμπλεκομένου μετὰ τοῦ κανόνος ἀστερίσκου 3 ὑφ., ἡ τοῦ τροχοῦ 12 ὑφ. καὶ ἡ τοῦ ἀστερίσκου 4 ὑφ., μὲ δύναμιν ἐνεργοῦσαν ἐπὶ τοῦ στροφάλου 30χιλ. ἔσεται $P = \frac{30 \times 25 \times 12}{3 \times 4} = 750$.χιλ.

253. Ὅθεν διὰ τοὺς μοχλοὺς καὶ τὰ ἑξέλικτρα καθὼς καὶ τὰς κρέγας, ἡ θεμελιώδης ἀρχὴ ἐστὶν ὅτι, ἡ δύναμις ἔχει πρὸς τὴν ἀντίστασιν, ὡς τὸ γινόμενον τῶν ἀκτίνων τῶν ἀστερίσκων, πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀκτίνων τῶν τροχῶν, ὅπερ δεικνύει ὅτι αἱ ἀκτῖνες τῶν τροχῶν εἰσὶ μοχλοβραχίονες. Ἡ θεωρητικὴ ὅμως αὕτη ἀρχὴ τροποποιεῖται ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ἕνεκα τῆς τριβῆς, ἥτις καταναλίσκει πολλάκις μέχρι τοῦ τρίτου τῆς δυνάμεως, ὡς λεχθήσεται κατωτέρω.

254. *Κεκλιμένον ἐπίπεδον*. Καλεῖται κεκλιμένον ἐπίπεδον, πᾶν ἐπίπεδον κατέχον θέσιν ἐνδιάμεσον μεταξὺ ὁριζοντείου καὶ κατακορύφου τοιούτου.

Ἔστω τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΒ (Σχ. 169), ἐφ᾽ οὗ ὑπάρχει σῶμά τι. Τοῦτο φανερὸν ὅτι θέλει κατέλθει ὑποκείμενον εἰς τὸ βάρος του, ἀφοῦ δι᾽ αὐτοῦ πρῶτον ὑπερνικήσῃ τὴν τριβὴν, ὥστε καθ᾽ ὅσον τὸ σῶμα καὶ τὸ ἐπίπεδον εἰσὶ λειότερα, κατὰ τοσοῦτον ἡ τριβὴ μικροτέρα. Ἀνεξαρτήτως τῆς τριβῆς ταύτης, ἵνα μένῃ ἐν ἰσοῤῥοπίᾳ τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου τούτου ἐπιπέδου, δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπ᾽ αὐτοῦ δύναμίς τις Κ ἐνεργοῦσα παραλλήλως τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Τὸ σῶμα ὑπόκειται εἰς τὴν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος, ἥτις δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τῆς κατακορύφου ΚΔ, κα

θεωρηθῇ ἀναλυομένη εἰς δύο δυνάμεις, τῆς μὲν ΚΕ ἐνεργούσης παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ, τῆς δὲ ΚΖ καθέτως αὐτῷ. Ἡ συνιστῶσα ΚΖ, τείνουσα νὰ τηρήσῃ τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, καταστρέφεται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως αὐτοῦ, ἀπ' ἐναντίας ὅμως ἡ συνιστῶσα ΚΕ τείνει νὰ σύρῃ τὸ σῶμα κατὰ τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου, ὥστε ἵνα μένῃ τοῦτο ἐν ἰσορροπίᾳ ἐπ' αὐτοῦ, δέον ἵνα ἡ ἀντιθέτως ἐφαρμοζομένη δύναμις Κ ἐστὶν ἴση καὶ ἀντίθετος τῇ συνιστώσῃ ταύτῃ ΚΕ, διότι ἡ τριβὴ δὲν ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν.

Ἤδη ἡ ἐξ Α κατακόρυφος, καὶ ἡ ἐκ Β ριζόντειος τέμνονται κατ' ὀρθὰς εἰς Γ, ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΚΕΔ εἰσὶν ὅμοια (139, δον) δι' ὃ ΕΚ : ΔΚ : : ΑΓ : ΑΒ,

καὶ τῇ καλέσει ΑΓ=Υ τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, καὶ ΑΒ=Μ τὸ μῆκος αὐτοῦ, Ρ τὸ βάρος τοῦ σώματος, καὶ Π τὴν ἀπαιτουμένην διὰ τὴν ἰσορροπίαν δύναμιν, ἡ ἀναλογία

Π : Ρ : : Υ : Μ

δεικνύει ὅτι ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις πρὸς ἰσορροπίαν σώματός τινος ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐστὶ πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος τούτου, ὡς τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὸ μῆκος αὐτοῦ.

Ἐπίσης ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΖΔ καὶ ΑΒΓ ἐξάγεται

ΚΖ : ΒΓ : : Ρ : Μ

ΚΖ ἐστὶν ἡ θλίψις ἣν ἐπιφέρει τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ΒΓ= Β ἡ βάσις αὐτοῦ.

255. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο ἀναλογιῶν τῆς ἰσορροπίας σώματός τινος ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐξάγεται

$$\Pi=\frac{\text{Ρ}\times\Upsilon}{\text{Μ}},\quad \text{Ρ}=\frac{\Pi\times\text{Μ}}{\Upsilon},\quad \text{θλίψις}=\frac{\text{Β}\times\text{Ρ}}{\text{Μ}}.$$

δι' ὧν προσδιορίζεται ἡ δύναμις Π, τὸ βάρος Ρ ἢ ἡ θλίψις ἀναλόγως τῶν δεδομένων συνθηκῶν κεκλιμένου τινος ἐπιπέδου.

256. *Κοχλίας*. Ἐὰν κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, οὗτινος ἡ μὲν βάσις ΒΓ (Σχ. 170) νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως κυκλικοῦ τινος κυλίνδρου, ἕπεται ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ δύναται νὰ περιτυλιχθῇ ἐπ' αὐτοῦ ἐφαρμοζόμενον ἐντελῶς. Ἡ διαγώνιος ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, περιτυλισσομένου περὶ τὸν κύλινδρον θέλει φανερῶς λάβει τὴν θέσιν τῆς ΑΕΒ. Δύναται δὲ νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέ-

σις τῆς διαγωνίου ταύτης ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου, διὰ τῆς εἰς ἴσα μέρη διαιρέσεως τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓ καὶ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, καὶ μεταφορᾶς τῶν διαστημάτων αα, ϐϐ, γγ, εἰς τὰς ἐκ τῶν ἀνταποκρινομένων διαιρέσεων τῆς βάσεως τούτου γεννητρίας τοῦ κυλίνδρου άά, ϐ'ϐ', γ'γ'. Ἡ διαγώνιος ΒΓ' τοῦ ὀρθωγωνίου ΒΒ'Γ'Γ ἴσου τῷ ΑΒΓΔ, θέλει λάϐει τὴν θέσιν ΒΕ'Β' ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου, καὶ οὕτω καθεξῆς, αἱ παράλληλοι διαγώνιοι ἴσων ὀρθογωνίων, ἀνταποκρίνονται πρὸς συνεχῆ καμπύλην γραμμὴν, περιϐάλλουσαν τὸν κύλινδρον, καὶ συναντῶσαν ἑκάστην αὐτοῦ γεννήτριαν, εἰς ἀποστάσεις ἴσας. Ἡ καμπύλη αὕτη γραμμὴ καλεῖται *ἕλιξ*, τὸ δὲ διάστημα τῆς καμπύλης ταύτης ΑΕΒ, ἀπὸ μιᾶς γεννητρίας ἄχρις οὗ πάλιν συναντήσῃ τὴν ἰδίαν ταύτην μετὰ μίαν στροφὴν καλεῖται *σπεῖρα*, τὸ δὲ μῆκος τῆς γεννητρίας ΑΒ, ΒΒ' κλ. μεταξὺ δύο συνακολούθων αὐτῆς συναντήσεων μετὰ τῆς ἕλικος καλεῖται *καμπὴ τῆς ἕλικος*.

257. Ἐπειδὴ ἡ συνεχὴς αὕτη ἕλιξ, εἶναι αἱ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου θέσεις τῶν παραλλήλων διαγωνίων ΑΓ, Β'Γ' κλ. αἵτινες δὲν μεταϐάλλουσι τὴν πρὸς τὸν ὁρίζοντα κλίσιν, ἕπεται ὅτι αὕτη ἔχει ἁπανταχοῦ τὴν αὐτὴν πρὸς τὸν ὁρίζοντα κλίσιν. Ὅθεν σῶμά τι ἀκολουθοῦν τὴν διεύθυνσιν ταύτης, ὑπόκειται φανερῶς εἰς τοὺς νόμους τῆς ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κινήσεως.

Τῇ ὑποθέσει ὅτι ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἢ ὀρθογώνιον, ἐρειδόμενον δι' ὅλης τῆς βάσεώς του ἐπὶ τῆς γεννητρίας τοῦ κυλίνδρου, κινεῖται ἀκολουθοῦν τὴν διεύθυνσιν τῆς ἕλικος, καὶ ὅτι κατὰ τὴν διάϐασίν του ἀφίνει στερεὸν σῶμα, φανερὸν ὅτι θέλει σχηματίσει ἐξέχουσαν ἕλικα ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου τριγωνικῆς ἢ ὀρθογωνίου τομῆς (Σχ. 171). Τὸ σῶμα τοῦτο καλεῖται *ἄῤῥην κοχλίας*. Ἑτέρα ὁμοία ἕλιξ χαρασσομένη πέριξ κενοῦ κυλίνδρου εἰς ἐσοχὴν, καλεῖται *θῆλυς κοχλίας* (Σχ. 172) ἢ *περικόχλιον*. Ὁ θῆλυς οὗτος κοχλίας στρεφόμενος πέριξ τοῦ ἄρσενος, φανερὸν εἶναι ὅτι τὰ σημεῖα τῆς ἕλικος αὐτοῦ εὑρίσκονται ὡς ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐπὶ τῶν τῆς ἕλικος ἐκείνου, ἑπομένως ὠθούμενος διὰ μοχλοῦ Π θέλει κινηθεῖ πέριξ αὐτοῦ. Ἐὰν ἤδη ὁ θῆλυς κοχλίας φέρει βάρος Ρ, κατὰ τὸν νόμον τῆς ἰσοῤῥοπίας ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ δύναμις Π ἥτις ἀπαιτεῖται ἵνα ἰσοῤῥοπήσῃ τὸ βάρος τοῦτο Ρ, ἐστὶ πρὸς αὐτό, ὡς ἡ

καμπὴ τῆς ἕλικος, πρὸς τὸ μῆκος ἤτοι τὴν περιφέρειαν ἣν τείνῃ νὰ διαγράψῃ ἡ δύναμις Π, ὥστε ἂν Υ ἡ καμπὴ τῆς ἕλικος, ἡ ἀκτὶς Α, ἡ ἀναλογία τῆς ἰσοῤῥοπίας ἔσεται Π : Ρ : : Υ : Α ἐξ ἧς $\Pi = \frac{P\Upsilon}{A}$.

Εὑρεῖν τὴν ἀπαιτουμένην δύναμιν πρὸς παραγωγὴν θλίψεως 6750 χιλ. διὰ κοχλίου οὗτινος ἡ καμπὴ ἐστὶ 2 ὑφ. καὶ ἡ περιφέρεια 60 ὑφ. Ἡ δύναμις αὕτη ἔσεται

$$\Pi = \frac{P\Upsilon}{A} = \frac{6750 \times 2}{60} = 225. \text{ χιλ.}$$

Εὑρεῖν τὴν δύναμιν πρὸς παραγωγὴν τῆς αὐτῆς θλίψεως, τιθεμένου τοῦ κοχλίου εἰς κίνησιν μὲ μοχλὸν 36 ὑφ.

Ἡ περιφέρεια του μοχλοῦ ἐστὶ 216 ὑφ. ὥστε ἡ δύναμις

$$\Pi = \frac{6750 \times 2}{216} = 62,50. \text{ χιλ.}$$

258. Ἡ χρῆσις τοῦ κοχλίου εἶναι συχνοτάτη εἰς τὰς τέχνας, οὐχὶ τόσον πρὸς ἀνύψωσιν βάρεων, ὅσον πρὸς παραγωγὴν θλίψεως. Τὸ σύνηθες ἐν τοῖς ἐλαιοτριβείοις θλιπτήριον, καθὼς καὶ τὸ πιεστήριον πρὸς ἐξαγωγὴν ἐλαίου ἀμυγδάλων, ῥόδων κλ. ἐνεργοῦσι διὰ τῆς δυνάμεως τοῦ κοχλίου. Τοιοῦτον μηχάνημα παριστᾷ τὸ (Σχ. 173).

Παρομοίως πρὸς παραγωγὴν θλίψεως, ὁ κοχλίας ἐστὶν ἐν χρήσει παρὰ τοῖς σιδηρουργοῖς, ξυλουργοῖς, λεπτουργοῖς βιβλιοδέταις κλ.

Ἐπίσης χρῆσις τοῦ κοχλίου γίνεται εἰς πάντα τὰ ὄργανα καὶ ἐργαλεῖα τῆς ὀπτικῆς, τυπογραφίας κλ. πρὸς παραγωγὴν ἐλαχίστων στροφῶν ἢ κινήσεως ἀναλόγως τῆς ἀνάγκης. Τελευταῖον δὲ ὁ κοχλίας χρησιμεύει πρὸς ἰσχυρὰν προσκόλλησιν σωμάτων μεταξύ των, δυναμένων ἐν ἀνάγκῃ ν᾽ ἀποχωρισθῶσι διὰ τῆς εὐκόλου αὐτοῦ ἀφαιρέσεως, ἐφαρμοζόμενος ἐπὶ τῆς ἑνώσεως πάντων σχεδὸν τῶν ἀντικειμένων.

259. *Σφήν.* Ὁ σφὴν χρησιμεύει πρὸς διάσχισιν σώματός τινος, ὁπόταν πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται μεγάλη δύναμις. Συνίσταται ἐκ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓ (Σχ. 174) ἐκ σιδήρου συνήθως, οὗτινος ἡ ἕδρα ΑΒ ἐστὶ μικρὰ ἀναλόγως τῶν δύο ἑτέρων ἑδρῶν, οὐσῶν ἴσων μεταξύ των. Τῇ ἐνεργείᾳ δυνάμεως ἐφαρμοζομένης καθέτως ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒ, ἥτις καλεῖται *κεφαλὴ τοῦ σφηνός*, εἰσδύει οὗτος ἐν τῇ ἐγκοπῇ, ἐν ᾗ ἐκ τῶν προτέρων ἐτέθη, ἐξ οὗ προέρχεται ἀπομάκρυνσις τῶν δύο τῆς ἐγκοπῆς παρειῶν. Πρὸς κατανόησιν τοῦ τρόπου

τῆς ἐνεργείας τοῦ σφηνός, ζητητέον τὴν δύναμιν ἥτις ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς ΑΒ, θέλει ἰσοῤῥοπήσει τὰς ἐπὶ τοῦ σφηνὸς θλίψεις εἰς Α καὶ Δ, προξενουμένας ἐκ τῶν παρειῶν τῆς ἐγκοπῆς. Αἱ θλίψεις αὗται ἐνεργοῦσι καθέτως ἐπὶ τῶν ΒΓ καὶ ΑΓ, δι' ὃ παριστάνονται διὰ τῶν καθέτων ἐπ' αὐτῶν ομ καὶ ον, ὥστε τῇ συμπληρώσει τοῦ παραλληλογράμμου μονπ, εὑρίσκεται ἡ οπ ὡς συνισταμένη τῶν δύο τούτων θλίψεων. Πρὸς ὕπαρξιν ἤδη ἰσοῤῥοπίας δέον ἵνα ἡ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἐνεργοῦσα δύναμις, ἰσοῦται τῇ συνισταμένῃ οπ τῶν δύο θλίψεων, καὶ ἔσεται ἀντίθετος αὐτῆς, ἄρα ἡ οπ ἐστὶ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ προσέτι ομ καὶ πμ εἰσὶ κάθετοι ἐπὶ τῶν ΑΓ καὶ ΒΓ, τὰ δύο τρίγωνα ομπ, ΑΒΓ εἰσὶν ὅμοια. Προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι ομ= πμ=ον ἢ ΑΓ=ΒΓ, τουτέστιν ὅτι αἱ δύο ἕδραι τοῦ σφηνὸς ΒΓ καὶ ΑΓ ὑφίστανται ἴσας θλίψεις εἰς Δ καὶ Ε. Ἐπίσης συνάγεται ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς κεφαλῆς τοῦ σφηνὸς ἐνεργοῦσα δύναμις π, ἐστὶ πρὸς μίαν τῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ θλίψεων Ρ, ὡς ἡ εὐθεῖα ΑΒ πρὸς μίαν τῶν ΑΓ ἢ ΒΓ, ἤτοι

$$\Pi : P :: AB : A\Gamma \text{ ἐξ ἧς } \Pi = P\frac{AB}{A\Gamma}.$$

τουτέστιν ἡ δύναμις ἰσοῦται μὲ τὴν ἀντίστασιν πολλαπλασιαζομένην ἐπὶ τὸν λόγον τοῦ πλάτους τῆς κεφαλῆς, πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ σφηνός. Καθ' ὅσον $A\Gamma > AB$ τουτέστιν ἡ κεφαλὴ τοῦ σφηνὸς μικροτέρα, τοσοῦτον ὁ λόγος $\frac{AB}{A\Gamma}$ ἐλαττοῦται, ἑπομένως καὶ ἡ δύναμις ἀπαιτεῖται μικροτέρα, ὅπερ δεικνύει καὶ ἡ πεῖρα.

Ἡ χρῆσις τοῦ σφηνὸς ἐστὶ συχνοτάτη. Τὰ πλεῖστα τῶν ἐργαλείων ἀνάγονται εἰς τὸν σφῆνα, ὡς τὸ γλύφανον (σκαρπέλο), αἱ ψαλίδες, αἱ ῥοκᾶναι, οἱ πρίονες, οἱ πελέκεις, καὶ ὅλα τὰ κοπτερὰ ὄργανα. Διὰ σφηνῶν ἔτι ἐξάγονται οἱ μεγάλοι ἐκ τῶν λατομείων λίθοι.

260. *Ἱμὰς ἀτέρμων* (λωρίον ἀπέραντον). Πρὸς μετάδοσιν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως ἄξονος εἰς ἕτερον παράλληλον, μὴ πολλὰ πλησίον κείμενον, γίνεται χρῆσις ἱμάντος ἀτέρμονος, περιβάλλοντος δύο τύμπανα, ὁμόκεντρα τοῖς ἄξονοις τούτοις. Ὁ τρόπος οὗτος τῆς μεταδόσεως τῆς κινήσεως ἐστὶν ἐν χρήσει ἐν τοῖς συνεργείοις τῶν ἐργοστασίων, ἔνθα πλεῖσται μηχαναὶ τίθενται εἰς κίνησιν διὰ

μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς κινητηρίου δυνάμεως. Ἡ κινητήριος μηχανὴ περιστρέφει ἕνα ἢ πλείονας ἄξονας καθ' ὅλον τὸ μῆκος τοῦ συνεργείου, καὶ ἐπ' αὐτῶν εἰς ἀποστάσεις ἀναλόγους, τίθενται οἱ ἀτέρμονες ἱμάντες οἵτινες μεταδίδουσι τὴν κίνησιν εἰς διαφόρους μηχανάς. Τὸ (Σχ. 175) παριστᾶ τοιαύτην μετάδοσιν κινήσεως περιστροφικῆς, δι' ἀτέρμονος ἱμάντος. Ὁ ἱμὰς παρασυρόμενος ὑπὸ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ ἄξονος ΑΒ, θέτει εἰς κίνησιν θηκτικὴν μύλην (ἀκονητρίαν). Πρὸς σταμάτησιν τῆς κινήσεως, ὠθεῖται πρὸς ἀριστερὰ τὸ ἄκρον Γ, τοῦ πέριξ τοῦ σημείου Δ στρεφομένου μοχλοῦ ΓΔΕ, ὁπόταν τὸ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μοχλοῦ τούτου δικράνιον Ε, ἐν ᾧ διέρχεται ὁ ἱμάς, φέρεται πρὸς τὰ δεξιά, καὶ τοποθετεῖ τοῦτον ἐπὶ δευτέρου παρακειμένου τυμπάνου, ὅπερ ὅμως μὴ ὂν προσκεκολλημένον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, δύναται νὰ περιστραφῇ ἐλευθέρως περὶ αὐτόν. Τῆς κινήσεως ταύτης μὴ μεταδιδομένης εἰς τὸν ἄξονα, οὗτος σταματᾶ, ἑπομένως καὶ ἡ μύλη. Τῇ ἀντιστρόφῳ ὠθήσει τοῦ μοχλοῦ, ἐπαναφέρεται ὁ ἱμὰς ἐπὶ τοῦ πρώτου τυμπάνου, καὶ ἡ περιστροφικὴ κίνησις τοῦ ἄξονος ἐπαναλαμβάνεται.

Πρὸς κατανόησιν τοῦ τρόπου τῆς ἐνεργείας τῶν ἀτερμόνων ἱμάντων, ὑποτεθείσθω ὅτι πρόκειται ν' ἀνυψωθῇ βάρος τι Π (Σχ. 176), κρεμάμενον διὰ σχοινίου περιτυλισσομένου ἐπὶ ἐξελίκτρου Α. Πρὸς τοῦτο διὰ τοῦ στροφάλου Β τίθεται εἰς κίνησιν τὸ τύμπανον Γ, ἡ δὲ περιστροφικὴ αὐτοῦ κίνησις μεταδίδεται εἰς τὸ ἐξέλικτρον διὰ τοῦ ἱμάντος ΜΝ. Οὗτος δέον νὰ ἦναι καθ' ὅλον αὐτοῦ τὸ μῆκος ἐντεταμμένος ὅπως ὑπάρχει ἀρκοῦσα πρόσφυσις μεταξὺ τοῦ ἐσωτερικοῦ αὐτοῦ μετώπου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῶν τυμπάνων, πρὸς παρεμπόδισιν τῆς ἐπ' αὐτῶν ὀλισθήσεως αὐτοῦ· ἡ ἔντασις ὅμως δὲν εἶναι ἁπανταχοῦ ὁμοιόμορφος. Ἵνα ἀνυψωθῇ τὸ βάρος Π, δέον ὅπως ὁ ἡμιϊμὰς Μ, ὅστις καλεῖται κινητήριος ἱμάς, ἐστὶ μᾶλλον ἐντεταμμένος τοῦ Ν, ἡ διαφορὰ δὲ τῶν ἐντάσεων τούτων, ἐνεργεῖ ὡς δύναμις ἐφαπτομένως τῷ τυμπάνῳ Δ, καὶ ἥτις ἰσοῤῥοπεῖ τὸ βάρος Π. Ἀφ' ἑτέρου ἡ ἰδία αὕτη διαφορὰ ἐντάσεως, ἐνεργεῖ ὡς ἀντίστασις, ἐφαπτομένως τῷ τυμπάνῳ Γ, καὶ ἣν δέον νὰ ὑπερνικήσῃ ἡ ἐπὶ τοῦ στροφάλου ἐνεργοῦσα δύναμις Φ. Ἐὰν ὁ βραχίων τοῦ στροφάλου ἐστὶ διπλάσιος τῆς ἀκτῖνος τοῦ τυμπάνου Γ, ἡ διαφορὰ τῶν ἐντάσεων τῶν ἱμάντων Μ καὶ Ν, ἔσεται διπλασία τῆς δυνάμεως Φ,

ἡ διαφορὰ δὲ αὕτη τῶν ἐντάσεων, ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ τυμπάνου Δ, παράγει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δυνάμεως ἴσης τῇ Φ καὶ ἐνεργούσης διὰ ςροφάλου Β′, οὗ ὁ βραχίων ἐστὶ διπλάσιος τῆς ἀκτῖνος τοῦ τυμπάνου Δ. Ὥστε τῆς δυνάμεως Φ, ἐνεργούσης διὰ τοῦ στροφάλου Β πρὸς μετάδοσιν τῆς κινήσεως αὐτοῦ εἰς τὸ ἐξέλικτρον διὰ τοῦ ἀτέρμονος ἵμαντος, ἡ ἐνεργοῦσα διὰ τοῦ στροφάλου Β′ πρὸς ἀπ' εὐθείας κίνησιν τοῦ ἐξελίκτρου θέλει δυνηθῆ νὰ ὑπερνικήσῃ τὸ αὐτὸ βάρος Π. Τὰ μήκη ἤδη τῶν βραχιόνων τῶν στροφάλων Β καὶ Β′ εἰσὶν ἀνάλογα τῶν τυμπάνων Γ καὶ Δ, ἡ δὲ χρῆσις τοῦ ἀτέρμονος ἱμάντος, παράγει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ὡς πρὸς τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως Φ, ὅπερ ἡ ἐπαύξησις τοῦ μοχλοβραχίονος τῆς δυνάμεως ταύτης, κατὰ λόγον τῶν ἀκτίνων Γ καὶ Δ. Ὅθεν ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ τυμπάνου Δ ἐστὶ διπλασία, τριπλασία κτλ, τῆς τοῦ Γ, ἡ δύναμις Φ θέλει δυνηθῆ ν' ἀνυψώσῃ δύναμιν διπλασίαν, τριπλασίαν κτλ. ἐκείνης ἣν ἤθελεν ἀνυψώσει εἰ ἐνήργει διὰ τοῦ αὐτοῦ στροφάλου Β, ἐφαρμοσμένου ὄντος ἐπὶ τοῦ ἐξελίκτρου.

261. Παραδεδεγμένον ἐκ πείρας ἐστὶν ὅτι, ἀτέρμων ἱμὰς δύναται νὰ μεταδώσῃ ἑνὸς ἵππου δύναμιν (211), ὁπόταν τὸ πλάτος καὶ ἡ ταχύτης αὐτοῦ παρέχουσιν ἀνάπτυξιν ἐπιφανείας 1500 τετραγωνικῶν ὑφεκατομέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ὥστε κατὰ ταῦτα τὸ πλάτος Λ δίδεται διὰ τοῦ τύπου $Λ = \frac{1500 \times Φ}{Υ}$ ἐν ᾧ Φ ἐστὶν ἡ δύναμις εἰς ἵππους, Υ ἡ ταχύτης τοῦ ἱμάντος εἰς ὑφεκατόμετρα. Ὅθεν δι' ἀντίστασιν 2 ἵππων δυνάμεως καὶ ταχύτητα 3 μ. τὸ πλάτος ἱμάντος δέον νὰ ἦναι $Λ = \frac{1500 \times 2}{300} = 10$. ὑφ.

Ὁ τύπος οὗτος πληρεῖ τὰς ἑξῆς συνθήκας.

α′. Ὁ ἱμὰς ἀναπτύσσεται ἄνευ ὀλισθήσεως, ἐπὶ τῶν περιβαλλομένων παρ' αὐτοῦ τροχαλιῶν.

β′. Δὲν ἐπιμηκύνεται σπουδαίως.

γ′. Ἀνθίσταται ἀρκούντως εἰς τὴν μεταδιδομένην δύναμιν τῆς ἕλξεως.

Ἐπίσης ἐκ πείρας ἀπεδείχθη ὅτι συμφέρει ἵνα αἱ διάμετροι τῶν ὑπὸ ἀτέρμονος ἱμάντος περιβαλλομένων τροχαλιῶν, μὴ ὑπερβαίνωσι τὸν λόγον 1 : 3.

262. Ἐν πάσαις ταῖς ἁπλαῖς μηχαναῖς γενικῶς παρατηρητέον,

ὅτι ὅσον διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν μηχανικῶν κινητηρίων ἐπαυξάνεται τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως, τὸ ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως διατρεχόμενον διάστημα, ἢ τὸ ὑπὸ τοῦ ἀνυψουμένου βάρους, ἐλαττοῦται συγκριτικῶς πρὸς τὸν ὑπὸ τῆς δυνάμεως διανυόμενον δρόμον, κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν. Ἡ ἄνευ ἐξαιρέσεως ἀληθεστάτη αὕτη ἀρχὴ, ἐκφράζεται ἐν τῇ μηχανικῇ ὡς ἑξῆς. Τὸ εἰς δύναμιν κερδιζόμενον, χάνεται εἰς ταχύτητα καὶ ἀντιστρόφως. Πάντα τὰ προεκτεθέντα παραδείγματα, καὶ πρὸ πάντων τὸ ἐπὶ τῶν συνθέτων μοχλῶν, κατέδειξαν ὅτι διὰ δυνάμεως 20χιλ. δύναται νὰ παραχθῇ θλίψις 8400,χιλ. τουτέστι 420 φορὰς μεγαλειτέρα, ἀλλὰ καὶ ἐπίσης ὅτι, ὁ παράξας τὴν θλίψιν ταύτην στιγεὺς, διήνυσεν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ $\frac{1}{420}$ τοῦ ὑπὸ τῆς δυνάμεως διανυθέντος διαστήματος. Ἐπίσης διὰ τῆς κρεγὸς, μέγα ἀνυψοῦται βάρος ἀλλ' εἰς ὁποῖον μικρὸν ὕψος.

Ὅθεν ἐξάγεται ἐκ τούτου ὅτι ὁ ἀληθὴς τῶν μηχανῶν σκοπὸς, δὲν συνίσταται εἰς τὴν ἐπαύξησιν τῶν ἐφαρμοζομένων δι' αὐτῶν κινητηρίων, ἀλλὰ τὴν μεταβολὴν τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως εἰς ἐργασίαν κατάλληλον διὰ τὰς περιστάσεις. Διὰ μικρᾶς δυνάμεως, ὡς τῆς τοῦ ἀνδρὸς, δύναται ν' ἀνυψωθῇ ἀξιοσημείωτον βάρος (212) πλὴν μετὰ ταχύτητος ἀναλόγως ἐλαχίστης.

Διὰ τῆς χρήσεως τῶν ἁπλῶν μηχανῶν, ποικίλλεται μόνον ὁ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ ἔργου (211. ΦΥ), ἡ δύναμις τουτέστιν ἢ ἡ ταχύτης, τοῦ ἑνὸς εἰς βάρος τοῦ ἑτέρου, ἄνευ ὅμως ἐπαυξήσεως τοῦ λοιποῦ ἀποτελέσματος, διότι τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ταχύτητα μένει σταθερόν, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο, ἐκφράζον τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως, δέον πάντοτε πρὸς ὕπαρξιν ἐνεργείας, νὰ ᾖ ἀνώτερον τοῦ ἔργου τῆς ἀντιστάσεως εἰς τὰς μᾶλλον ἢ ἧττον συνθέτους μηχανάς, ἐν αἷς αἱ τριβαί, αἱ συγκρούσεις κλπ. ἐλαττοῦσι τὴν τῆς δυνάμεως ἐνέργειαν.

Ὅθεν τὸ ἀναπτυσσόμενον ἔργον τῆς δυνάμεως ἐντὸς δεδομένου χρόνου, δέον πάντοτε ἵνα ἰσοῦται τῷ ἀπαιτουμένῳ ἔργῳ, πλέον τοῦ ἔργου τῶν ἀντενεργουσῶν ἀντιστάσεων. Τὸ δὲ χρήσιμον ἀποτέλεσμα μηχανῆς τινος, ἔσεται τοσοῦτον μεῖζον, ὅσον πλειότερον κατωρθοῦται ἡ ἐλάττωσις τοῦ ἔργου τῶν ἀντενεργουσῶν ἀντιστάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'.

Τριβὴ τῶν εἰς ἐπαφὴν σωμάτων. — Κυβικὴ καὶ γραμμικὴ διαστολὴ τῶν σωμάτων.

263. Ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων οὐδέποτε ἐστὶν ἐντελῶς λεῖα, ἕπεται ὅτι ὅταν δύο ἐπιφάνειαι εὑρίσκονται εἰς ἐπαφὴν, εἰσδύει κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἡ μία εἰς τὴν ἑτέραν. Ἡ ἀμοιβαία ὅμως αὕτη εἴσδυσις, δὲν ὀφείλεται μόνον εἰς τὸ ἀτελὲς τῆς στιλπνώσεως, ἀλλ' ἔτι καὶ εἰς τὴν ἀμοιβαίαν αὐτῶν θλίψιν, ἕνεκα τῆς ὁποίας ἐπέρχεται παραμόρφωσις τοσοῦτον μεγαλειτέρα, ὅσον τὰ εἰς ἐπαφὴν σώματα εἰσὶν ἧττον σκληρά, καὶ ἡ θλίψις τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τοῦ ἑτέρου μείζων. Ἐκ τῆς ἀμοιβαίας προσαρμογῆς τῶν ἀτόμων τῶν εἰς ἐπαφὴν σωμάτων, προκύπτει ὅτι ἂν τὸ ἓν τούτων τεθῇ εἰς κίνησιν, πλὴν εἰς τρόπον ὥστε νὰ τηρῆται ἡ ἐπαφὴ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ μετὰ τῆς τοῦ ἑτέρου, θέλει ἀναπτυχθῆ ἀντίστασίς τις ἐναντιουμένη εἰς τὴν κίνησιν. Ἡ ἀντίστασις αὕτη καλεῖται *τριβή*.

Ἐὰν τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἑνὸς τουλάχιστον τῶν σωμάτων, τηρῇ πάντοτε τὴν ἐπαφήν, τουτέστιν ἐὰν ὑπάρχῃ ὀλίσθησις ἑνὸς ἢ ἑκάστου τῶν σωμάτων ἐπὶ τοῦ ἑτέρου, ὡς συμβαίνει συρομένου πλαισίου ἐπὶ ἐπιπέδου, ἡ τριβὴ καλεῖται ἐξ *ὀλισθήσεως*. Ἐὰν ὅμως τὰ μέρη τῶν εἰς ἐπαφὴν ἐπιφανειῶν, μεταβάλλονται καθ' ἑκάστην στιγμήν, ὡς συμβαίνει κατὰ τὴν κίνησιν σφαίρας ἐπὶ τοῦ σφαιριστηρίου, ἡ τριβὴ καλεῖται ἐκ *κυλινδήσεως*.

264. Παραδεκτὸν ἐστὶν ἐκ πείρας ὅτι ἡ τριβὴ ἐστὶν ἀνάλογος τῇ ἀρχικῇ θλίψει ἣν ἡ μία τῶν ἐπιφανειῶν παράγει ἐπὶ τῆς ἑτέρας, ὅτι ποικίλλει κατὰ τὴν φύσιν καὶ τὴν κατάστασιν τῶν εἰς ἐπαφὴν ἐπιφανειῶν, καὶ ὅτι ἐστὶν ἀνεξάρτητος τῆς ταχύτητος καὶ ἐκτάσεως τῶν ἐπιφανειῶν τούτων. Ἐκ τῶν ἄρτι ἐπὶ τῶν σιδηροδρόμων γενομένων πειραμάτων, ἐξήχθη ὅτι διὰ ταχύτητας ἀνωτέρας τῶν 4—5^{m} κατὰ δευτερόλεπτον, ἡ τριβὴ ἐλαττοῦται ἀναλόγως τῆς αὐξήσεως τῆς ταχύτητος. Ἐν τοῖς πειράμασι τούτοις, περιεσφύχθησαν τὰ χαληνωτήρια τῶν ἁμαξῶν, πρὸς παρεμπόδισιν τῆς στροφῆς τῶν τροχῶν. Ἡ ταχύτης ἔφθασε μέχρι 25$^{μ.}$ κατὰ δευτερόλεπτον, καὶ τῇ βοηθείᾳ δυναμογνώμονος ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἐξ ὀλισθήσεως τριβὴ

τῶν τροχῶν ἐπὶ τῶν ῥάβδων, ἠλαττοῦτο καθ' ὅσον ηὔξανεν ἡ ταχύτης. Ἐπὶ τούτων, καὶ ἐπὶ ἰδίων πειραμάτων γενομένων τῷ 1856 καὶ 1860 βασιζόμενος ὁ Bochet ἐξάγει ὅτι[1]

α'. Ἡ ἐλάττωσις τῆς τριβῆς ἀναλόγως τῆς αὐξήσεως τῆς ταχύτητος, ἐστὶ γενικὴ διὰ τὰς μεταξὺ 0 καὶ 25μ. κατὰ δευτερόλεπτον ταχύτητας.

β'. Ἡ τριβὴ δὲν εἶναι πλέον ἀνάλογος τῇ θλίψει, καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι πλέον ἀνεξάρτητος τῇ ἐκτάσει τῶν προστριβομένων ἐπιφανειῶν, ὁπόταν ἡ θλίψις παύσῃ νὰ ἦναι μικρά.

γ'. Δὲν ὑπάρχει γενικῶς εἰδικὴ τριβὴ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως. Διὰ ξύλα καὶ δέρματα ἐπὶ ξηρῶν ῥάβδων, ὀποπέρχιον (γουταπέρκα) ἐπὶ ξηρῶν καὶ βεβρεγμένων ῥάβδων, σίδηρον ἐπίσης, ἡ τριβὴ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως ὑπῆρξεν ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ ὡς καὶ ἐν ἐλαχίστῃ ταχύτητι, καὶ ἀκολούθως μεγαλειτέρα ἐν μεγαλειτέρα ταχύτητι, ἐνῷ ἀπ' ἐναντίας διὰ ξύλα καὶ δέρματα ἐπὶ βεβρεγμένων καὶ ἀλειμμένων ῥάβδων, ἡ τριβὴ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως, ὑπῆρξεν γενικῶς κατὰ μέσον ὅρον διπλασία τῆς εἰς ἐλαχίστην ταχύτητα ἀνταποκρινομένης.

265. Τῇ ἐπιχρίσει τῶν προστριβομένων σωμάτων διὰ παχέων οὐσιῶν, ὡς ἐλαίου, λίπους, σάπωνος κλ. κατωρθοῦται ἐπαισθητῶς ἡ τῆς τριβῆς ἐλάττωσις, καὶ τοσοῦτον μᾶλλον καθ' ὅσον ἡ ἐπίχρισις ἀνανεοῦται συνεχέστερον. Τὸ ὕδωρ ἐστὶ κακὸς ἐπιχριστήρ, καὶ πρὸ πάντων διὰ τὰ μέταλλα, πολλάκις μάλιστα ἐπαυξάνει τὴν τριβήν.

266. Ἡ τριβὴ ἐστὶν ἀνάλογος τῇ παραγομένῃ θλίψει τῶν εἰς ἐπαφὴν σωμάτων μεταξύ των, πλὴν τοῦτο λαμβάνει χώραν μέχρις ὁρίου τινος μόνον, πέραν δὲ τούτου αἱ ἐπιφάνειαι ἐπιξέονται θερμενόμεναι, καὶ ἡ τριβὴ ἐπαυξάνει ἐπαισθητῶς εἰς οὐδένα νόμον ὑποκειμένη. Αἱ παχεῖαι οὐσίαι ἐλαττοῦσαι τὴν τριβήν, παρατείνουσιν ἐπαισθητῶς τὸ ὅριον ἀφ' ὃ αἱ ἐπιφάνειαι ἄρχονται νὰ ἐπιξέονται.

Κατὰ πειράματα τοῦ **Βούδ**, ἡ ἐν τοῖς ἀτάρνοις (δέστροις) τριβὴ τῶν ἀξόνων τῶν ἁμαξῶν, οὐδέποτε πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ 6,χιλ. 33 κατὰ τετραγωνικὸν ὑφεκατόμετρον ἐπιφανείας εἰς ἐπαφήν, ἐκεῖθεν δὲ τοῦ ὁρίου τούτου, τὸ λίπος δι' οὗ εἰσὶν ἀλειμμέναι αἱ εἰς ἐπαφὴν

[1] Annales des mines 1861.

ἐπιφάνειαι συνθλιβήσεται καὶ ἐξωθήσεται, ὁπότε τὰ ξηρῶς πλέον προστριβόμενα σώματα ἄρχονται νὰ ἐπιξέονται, καὶ ἡ τριβὴ καθίσταται σπουδαία. Τὴν σήμερον ὅμως, ὁπότε τὸ περιάλειμα ἐνεργεῖται τακτικῶς καὶ μετὰ προσοχῆς, ἡ θλίψις δύναται νὰ φθάσῃ τὰ 25 χιλ. ἕως 30 χιλ. κατὰ τετραγωνικὸν ὑφεκ.

Ἡ πεῖρα ἐπίσης ἀπέδειξεν ὅτι, ὅταν δύο ἐπιφάνειαι ὑπῆρξαν ἐν ἐπαφῇ καὶ ἠρεμίᾳ ἐπὶ χρόνον τινα, ἡ ἐξ ὀλισθήσεως τριβή, κατὰ τὴν πρώτην τῆς ἐκκινήσεως στιγμὴν ἐστὶ μεγαλειτέρα τῆς κατὰ τὴν κίνησιν ἀναπτυσσομένης, τοσοῦτον δ' ἐπαισθητώτερον ἐστὶ τοῦτο, ὅσον ἡ θλίψις μείζων καὶ τὰ σώματα εὐθλιπτότερα. Αἱ δύο αὗται περιστάσεις προξενοῦσι τὴν εἴσδυσιν τοῦ ἑνὸς σώματος ἐν τῷ ἑτέρῳ, καὶ τὴν ἀπώθησιν τοῦ ἀλείματος.

267. Ὁ λόγος μεταξὺ τῆς τριβῆς Φ, τουτέστι τῆς ἀντενεργούσης εἰς τὴν κίνησιν ἀντιστάσεως, καὶ τῆς θλίψεως Π, ἥτις ὑφίσταται ἐν ἀρχῇ μεταξὺ τῶν εἰς ἐπαφὴν σωμάτων, καλεῖται *συντελεστὴς τῆς τριβῆς*. Ὅθεν ὁ συντελεστὴς οὗτος τῆς τριβῆς φ παριστάνεται διὰ τοῦ λόγου $\varphi = \frac{\Phi}{\Pi}$ ἐξ οὗ $\Phi = \varphi\Pi$ καὶ $\Pi = \frac{\Phi}{\varphi}$.

Ἐὰν ἡ θλίψις ἐστὶ 500 χιλ. καὶ ὁ συντελεστὴς τῆς τριβῆς 0,08, ἡ τριβὴ ἔσεται $\Phi = 0{,}08 \times 500 = 40$. χιλ.

268. Ἐκ πειραμάτων ἐσχηματίσθη πίναξ τῶν τιμῶν τοῦ συντελεστοῦ τῆς τριβῆς φ, διὰ τὰ διάφορα προσριβόμενα μεταξύ των σώματα. Ἐν τῷ πίνακι τούτῳ εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τοῦ φ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως, ἀφοῦ τὰ σώματα ὑπῆρξαν χρόνον τινα εἰς ἐπαφήν, καὶ ὅταν ἐξακολουθῇ ἡ κίνησις, προσριβόμενα τὸ ἓν πρὸς τὸ ἕτερον.

Εὑρεῖν τὴν ἀπαιτουμένην δύναμιν πρὸς ἀνύψωσιν διαφράγματος ἐκ δρυός, ἐφ' οὗ ἐνεργεῖ θλίψις 350χιλ. καὶ οὗ τὸ βάρος ἐςὶ 15.χιλ.

Κατὰ τὸν κάτωθι πίνακα ὁ συντελεστὴς τῆς τριβῆς δρυὸς ἐπὶ δρυὸς βεβρεγμένης, μετὰ χρόνον τινα ἐπαφῆς ἐστὶ 0,71, κατὰ δὲ τὴν κίνησιν ἐλαττοῦται εἰς 0,25, ὥστε ἡ ἐνέργεια τῆς θλίψεως κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως ἐστὶ $0{,}71 \times 350 = 248$, χιλ. διαρκούσης δὲ τῆς κινήσεως $0{,}25 \times 350 = 87{,}60$. χιλ.

Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια προερχομένη ἐκ τε τοῦ βάρους καὶ τῆς θλίψεως πρὸς ἀνύψωσιν τοῦ διαφράγματος, ἔσεται ἐν μὲν τῇ ἀρχῇ $248 + 15 = 263$ χιλ. κατὰ δὲ τὴν κίνησιν $84{,}50 + 15 = 102{,}50$

ΠΙΝΑΞ

Τῶν τιμῶν τοῦ συντελεστοῦ τῆς τριβῆς τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν κατὰ τὰ πειράματα τοῦ Μορίνου.

Προστριβόμενα σώματα	Διάταξις τῶν Ἰνῶν	Κατάστασις τῶν ἐπιφανειῶν	Λόγος τῆς τριβῆς πρὸς τὴν θλίψιν	
			Κατὰ τὴν ἐκκίνησιν καὶ μετά τινα χρόνον	Κατὰ τὴν κίνησιν
Δρῦς ἐπὶ δρυὸς	Παραλλήλως	ἄνευ ἐπιχρίσματος	0,62	0,48
» » »	»	Μετὰ ξηροῦ σάπωνος	0,44	0,16
» » »	Καθέτως	ἄνευ ἐπιχρίσματος	0,54	0,34
» » »	»	Μεθ' ὕδατος	0,71	0,25
» » »	ἄκρον πρὸς ἐπιφ.	ἄνευ ἐπιχρίσματος	0,43	0,19
Δρῦς ἐπὶ πτελέας	Παραλλήλως	,, ,,	0,38	,,
Πτελέα ἐπὶ δρυὸς	»	,, ,,	0,69	0,43
» » »	»	Μετὰ ξηροῦ σάπωνος	0,41	0,25
Μελία, ἐλάτη ἐπὶ δρυὸς	»	ἄνευ ἐπιχρίσματος	0,53	0,36–0,40
Σίδηρος ἐπὶ δρυὸς	»	,, ,,	0,62	0,62
» » »	»	Μεθ' ὕδατος	0,65	0,26
» » »	»	Μετὰ ξηροῦ σάπωνος	,,	0,21
Κίτρινος χαλκὸς ἐπὶ δρυὸς	»	ἄνευ ἐπιχρίσματος	0,62	0,62
Σίδηρος ἐπὶ πτελέας	»	,, ,,	,,	0,25
Χυτοσίδηρος ἐπὶ πτελέας	»	,, ,,	,,	0,20
Δέρμα ἐπὶ δρυὸς	κατ' ἐπιφανείας	,, ,,	0,61	03,-0,35
» » »	» »	Μεθ' ὕδατος	0,79	0,29
Δέρμα, ἱμὰς κατ' ἐπιφανείας δρυὸς	Παραλλήλως	ἄνευ ἐπιχρίσματος	0,74	0,27
» » ἐπὶ τυμπάνου δρυὸς	Καθέτως	,, ,,	0,47	,,
Δέρμα ἐπὶ σιδήρου καὶ ὀρειχάλκου	κατὰ πετάλεια	,, ,,	,,	0,56
» » »	» »	Μεθ' ὕδατος	,,	0,38
» » »	» »	Δι' ἐλαίου	,,	0,15
Δέρμα βοὸς ἐπὶ χυτοσιδήρου	» »	Μεθ' ὕδατος	0,62	,,
» » »	» »	Μετ' ἐλαίου	0,12	,,
Σχοινίον ἐπὶ δρυὸς	Παραλλήλως	ἄνευ ἐπιχρίσματος	0,38	0,52
» »	Καθέτως	Μεθ' ὕδατος	0,87	0,33
Δέρμα ἐπὶ τροχαλίας σιδηρᾶς	Ἱμὰς	ἄνευ ἐπιχρίσματος	0,28	0,15
Πλέγμα καννάβεως ἐπὶ δρυὸς	Παραλλήλως	,, ,,	0,50	0,33
» » »	,,	Μεθ' ὕδατος	0,87	,,
Δρῦς καὶ πτελέα ἐπὶ χυτοσιδήρου	,,	ἄνευ ἐπιχρίσματος	,,	0,38
Ἀγραπηδία ἐπὶ χυτοσιδήρου	,,	,, ,,	,,	0,44
Σίδηρος ἐπὶ σιδήρου	,,	,, ,,	,,	,,
» ὀρειχάλκου	,,	,, ,,	0,19	0,18
» χυτοσιδήρου	,,	,, ,,	,,	,,
Χυτοσίδηρος ἐπὶ χυτοσιδήρου	,,	,, ,,	0,16	0,15
» ὀρειχάλκου	,,	,, ,,	,,	,,
Ὀρείχαλκος ἐπὶ ὀρειχάλκου	,,	,, ,,	,,	0,20
» » χυτοσιδήρου	,,	,, ,,	,,	0,22
» » σιδήρου	,,	,, ,,	,,	0,16
Τιτανόλιθος μαλακὸς καλῶς πελεκημένος ἐπὶ ἰδίου	,,	,, ,,	0,74	0,64
Σκληρὸς τιτανόλιθος ἐπὶ μαλακοῦ	,,	,, ,,	0,75	0,67
Κοινὸς ὀπτόλινθος ἐπὶ μαλακοῦ τιτανολίθου ὡς ὁ ἄνω	,,	,, ,,	0,67	0,65
Δρῦς ἐπὶ τιτανολίθου	,,	,, ,,	0,63	0,38
Σίδηρος ἐπὶ τιτανολίθου	,,	,, ,,	0,42	0,24

Ὁπόταν τὸ πρὸς κίνησιν ἀντικείμενον ἐστὶν ὁριζόντειον, μόνον ἡ τριβὴ δέον νὰ ὑπερνικηθῇ· πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς ἐκ τῆς τριβῆς προερχομένης ἀπωλείας δύο ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν ἔργου, πολλαπλασιά-

ζεται ἡ ἐνέργεια τῆς τριϐῆς, ἐπὶ τὴν ὑπὸ τοῦ σώματος διανυομένην κατὰ δευτερόλεπτον ἀπόστασιν (211).

269. Οἱ ἄξονες τῶν τροχῶν λήγουσιν εἰς πυργίσκους, οἵτινες ἐνεργοῦσι τὴν περιστροφικὴν αὐτῶν κίνησιν ἐντὸς ἀναπαυστηρίων. Ὁ ἑπόμενος πίναξ δίδει τὸν συντελεστὴν τῆς τριϐῆς τῶν πυργίσκων τούτων στρεφομένων ἐντὸς τῶν ἀναπαυστηρίων αὐτῶν, ὅταν ἡ ἐπίχρισις ἐκτελεῖται ὡς συνήθως καὶ ὅταν τακτικῶς ἀνανεοῦται.

ΠΙΝΑΞ

Συντελεστῶν τριϐῆς ἀξόνων περιστρεφομένων ἐντὸς τῶν ἀναπαυστηρίων αὐτῶν.

Ἔνδειξις τῶν		Εἶδος ἐπιχρίσματος	Λόγος τῆς τριϐῆς πρὸς τὴν θλῖψιν	
Ἀξόνων	Ἀναπαυστηρίων		Ἐπίχρισις συνήθης	Ἐπίχρισις συνεχής
Χυτοσίδηρος	Χυτοσίδηρος	Ἔλαιον, στέαρ ἢ λίπος	0,07-0,08	0,054
»	»	Ἡ αὐτὴ ἐπίχρισις μετὰ βεβρεγμέν. μετώπων	0,08	0,054
»	»	Ἐπιφάνειαι βεβρεγμέναι καὶ λιπαραὶ	0,14	0,054
»	Ὀρείχαλκος	Ἔλαιον, στέαρ, λίπος	1,07 0,08	»
»	»	Ἐπιφάνειαι λιπαραὶ	0,16	»
»	»	Ἐπιφάνειαι λιπαραὶ καὶ βεβρεγμέναι	0,16	0,54
»	»	Ὀλίγον λιπαραὶ	0,19	»
»	Ξύλον	Ἄνευ ἐπιχρίσεως	0,18	»
»	»	Ἔλαιον ἢ στέαρ	»	0,090
Σίδηρος	Χυτοσίδηρος	Ἔλαιον, στέαρ, λίπος	0,07-0,08	0,054
»	Ὀρείχαλκος	» » »	»	»
»	»	Ἐπιφάνειαι λιπαραὶ καὶ βεβρεγμέναι	0,19	0,054
»	»	Ἐπιφ. ὀλίγον λιπαραὶ	0,25	»
»	Ξύλον	Ἔλαιον ἢ στέαρ	0,11	»
»	»	Ἐπιφάνειαι λιπαραὶ	0,19	»
Ὀρείχαλκος	Ὀρείχαλκος	Ἔλαιον	0,10	»
»	»	Στέαρ	0,09	»
»	Χυτοσίδηρος	Ἔλαιον ἢ στέαρ	»	0,045-0,52
Ξύλον	»	Στέαρ	0,12	»
»	»	Λίπος	0,15	»
»	Ξύλον	Στέαρ	»	0,07
Σίδηρος	Χαλκὸς	Ἄνευ ἐπιχρίσεως	0,155	»
»	»	Λίπος	0,085	»
»	»	Στέαρ	0,120	»
»	»	Ἔλαιον	0,130	»
Δρῦς	Πτελέα	Λίπος	0,030	»
Σίδηρος	Ξύλον	Ἄνευ ἢ μετ' ἐπιχρίσεως	0,050	»

Χρῆσις. Διὰ τοῦ πίνακος τούτου ὑπολογίζεται τὸ ἐκ τῆς τριβῆς τῶν πυργίσκων καταναλισκόμενον ἔργον τῶν τροχῶν, ὑδραυλικῶν τροχῶν, ἐμπλεκτικῶν τροχῶν κτλ.

Ἔστω ὑδραυλικὸς τροχὸς βάρους 40000, χιλ. περιστρεφόμενος μὲ ταχύτητα 4 περιστροφῶν κατὰ λεπτὸν, διὰ πυργίσκων χυτοσιδηρῶν 0,16 διαμέτρου, ἐνεργούντων ἐπὶ χυτοσιδηρῶν ἐπίσης ἀναπαυστηρίων, τῆς ἐπιχρίσεως ἐνεργουμένης ὡς συνήθως διὰ λίπους καὶ ὕδατος.

Κατὰ τὸν πίνακα ὁ συντελεστὴς τῆς τριβῆς ἐστὶ 0,14, ὥστε διὰ θλίψιν 40000 ἡ τριβὴ ἔσεται $40000 \times 0{,}14 = 5600$. χιλ.

Ἡ κατὰ δευτερόλεπτον ταχύτης ἐστὶ $\frac{0{\cdot}16 \times 3{\cdot}14 \times 4}{60} = 0{,}033$. Ὥςε τὸ καταναλισκόμενον ὑπὸ τῆς τριβῆς ἔργον ἔσεται $5600 \times 0{,}033 = 184{,}8$ χιλ. ἤτοι $\frac{184{\cdot}8}{75} = 2{,}46$ ἵππων δύναμις κατὰ δευτερόλεπτον.

Οἱ βιομήχανοι πολλάκις μεταβάλλουσι τὴν ἐξ ὀλισθήσεως τριβὴν εἰς τριβὴν ἐκ κυλινδήσεως, ὅπερ ἐπαισθητῶς ἐλαττοῖ τὴν κατανάλωσιν τοῦ ἔργου, καὶ διευκολύνει τὴν μετακίνησιν τῶν ἀντικειμένων. Οὕτω πρὸς μετακίνησιν μεγάλων βάρεων, οἱ ὑποστᾶται τίθενται ἐπὶ κυλίνδρων ἢ μικροτρόχων ἁμαξῶν. Ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιστάσει, ἥτις ἐστὶ καὶ ἡ τῆς τῶν συνήθων τροχῶν τῶν ἁμαξῶν, ἡ τριβὴ ἐστὶ τοσοῦτον μικροτέρα ὅσον μικροτέρα ἐστὶν ἡ ἀκτὶς τοῦ πυργίσκου σχετικῶς πρὸς τὴν τοῦ τροχοῦ.

270. *Διαστολὴ τῶν σωμάτων*. Ἡ ἐλαστικότης τῶν σωμάτων ἐστὶν ἡ ἔνδειξις τῆς εὐκολίας μεθ' ἧς ἀναλαμβάνουσι τὸν ἀρχικὸν αὐτῶν ὄγκον, παυσάσης τῆς θλιψάσης αὐτὰ δυνάμεως. Γενικῶς ὅμως τὰ σώματα ταῦτα, δὲν ὑφίστανται καθ' ὅλας αὐτῶν τὰς διαστάσεις, ἢ μεταβολὰς ἀνεπαισθήτους· οὕτω ὁ χάλυψ, ἡ ὕελος, τὸ μάρμαρον, ἂν καὶ λίαν ἐλαστικά, ἐλαχίστην ὑφίστανται διαςολήν. Λεπτὰ φύλλα καμπτόμενα, ὑφίστανται διαστολὴν ἐπὶ τῶν κυρτουμένων αὐτῶν μετώπων, συστολὴν δὲ ἐπὶ τῶν ἀντιθέτων, ἥτις παύει ἅμα τῇ ἐν τῇ πρώτῃ θέσει ἐπανόδῳ αὐτῶν.

Ἡ διασταλτικότης καὶ συμπιεστικότης τῶν ἀερίων, ἀποτελοῦσαι ἰδιάζοντα χαρακτῆρα τῶν σωμάτων τούτων, ἦσαν πάντοτε γνωσταί, καὶ αἱ ἰδιότητες αὗται εἰς τὰ ῥευστά, ἂν καὶ μέχρι τινὸς ἄγνωστοι, ἐγένοντο μέχρι τέλους καταφανεῖς, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν.

Οἱαδήποτε καὶ ἂν ᾖ ἡ κατάστασις σώματός τινος, δὲν δύναται ἢ ν' αὐξήσῃ, ἢ νὰ τείνῃ πρὸς αὔξησιν ὁ ὄγκος του, ὑψουμένης τῆς θερμοκρασίας αὐτοῦ. Τοῦ γεγονότος τούτου καταφανοῦς γενομένου ἐξ ἁπλῆς παρατηρήσεως, ὅσον εὔκολος ἐστὶν ἡ ἀντίληψις, τοσοῦτον ἡ ἐκτίμησις ὑπῆρξε δύσκολος.

271. Ἡ ἐν ταῖς τέχναις συχνὴ τῶν μετάλλων χρῆσις κατέδειξεν, ὅτι ἀνάγκη πᾶσα ἵνα λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ διασταλτικότης αὐτῶν. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἐνησχολήθησαν εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς θεραπείας τῶν ἐκ ταύτης προερχομένων ἀτοπημάτων, καὶ ταύτης εὑρεθείσης, ἐπὶ πολὺν χρόνον ἐγένετο χρῆσις αὐτῆς, χωρὶς νὰ ὁρισθῶσι τὰ ὅρια ἐντὸς τῶν ὁποίων δέον νὰ περικλείεται αὕτη, μόλις δὲ κατὰ τὸν παρόντα αἰῶνα, ἐγένοντο πειράματα ἐντελῆ καὶ μετ' ἐπιμελείας διὰ τὸν ἀκριβῆ προσδιορισμὸν τῆς ἐκ τῆς θερμότητος διαστολῆς τῶν σωμάτων.

Ἂν καὶ ἡ θερμοκρασία ἐνεργεῖ ταυτοχρόνως, καθ' ὅλας τὰς διαστάσεις τῶν σωμάτων, ὑπάρχουσι περιστάσεις, ὡς εἰς τὰ στερεὰ σώματα, καθ' ἃς ἀνάγκη ὅπως ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ διαστολὴ κατὰ μίαν μόνην τούτων. Προκειμένου περὶ καταμετρήσεως ἀποστάσεώς τινος, ὀλίγον ἐνδιαφέρουσιν αἱ μεταβολαὶ ἃς ὁ μετρικὸς κανὼν ὑφίσταται κατὰ πλάτος, καὶ μόνον ἀνάγκη ὑπάρχει τῆς γνώσεως τῶν κατὰ μῆκος μεταβολῶν αὐτοῦ, αἵτινες ἐπιρρεάζουσι τὴν καταμετρουμένην ἀπόστασιν. Ἡ διαστολὴ αὕτη, καλουμένη *γραμμικὴ διαστολή*, ἐπαρκεῖ ἔτι καὶ πρὸς εὕρεσιν τῶν μεταβολῶν ἃς προξενεῖ ἡ θερμότης, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου σώματός τινος. Παρομοίως, γνωστῆς οὔσης τῆς μεταβολῆς, ἣν ἡ θερμότης ἐπιφέρει ἐπὶ τοῦ ὄγκου σώματός τινος, ἥτις καλεῖται *κυβικὴ διαστολή*, εὔκολος καθίσταται ὁ προσδιορισμὸς τῶν λαμβανουσῶν χώραν κατὰ μῆκος μεταβολῶν. Ἡ μέθοδος αὕτη τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς γραμμικῆς διαστολῆς, ἐστὶν ἔτι ἀκριβεστέρα τοῦ διὰ πειραμάτων ἀπ' εὐθείας προσδιορισμοῦ αὐτῆς. Ἡ γραμμικὴ αὕτη διαστολή, οὖσα τὸ ἓν τρίτον περίπου τῆς κυβικῆς, προσδιορίζεται μόνον διὰ καταμετρήσεως μήκους, ἐνῷ ἡ κυβική, ἤτοι ἡ κατ' ὄγκον ἐπαύξησις, δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ τῆς τρυτάνης ὅπερ ἀκριβέστερον.

Τῆς στερεότητος σώματός τινος θεωρουμένης πάντοτε ὡς τὸ γινόμενον τριῶν διαστάσεων (165), ἐὰν Χ, ψ, Ζ, εἰσὶν αἱ τρεῖς δια-

στάσεις σώματός τινος, XψZ ἔσεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ. Ἐὰν δι' ἐπαυξήσεως τῆς θερμοκρασίας, ἑκάστη διάστασις αὐξάνει κατὰ τὸν λόγον $1 : 1+\delta$ ὁ ὄγκος ἔσεται συνεπῶς $X(1+\delta)\psi(1+\delta)Z(1+\delta)=X\psi Z(1+\delta)^3$. Τῇ ἀναπτύξει τοῦ κύβου (105—107), καὶ παραλείψει τῶν ἄνω τοῦ πρώτου βαθμοῦ ὅρων μένει $X\psi Z(1+3\delta)$ ὡς ὄγκος τοῦ σώματος μετὰ τὴν γραμμικὴν διαστολὴν ἑκάστης διαστάσεως αὐτοῦ κατὰ δ, ὥστε ὁ ὄγκος ηὔξησε κατὰ 3δ, ἤτοι ἡ κυβικὴ διαστολὴ ἐστὶ τριπλασία τῆς γραμμικῆς, καὶ κατὰ τοσοῦτον τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐστὶν ἀκριβέστερον, ὅσον τὸ δ μικρότερον, καὶ ἑπομένως οἱ ὅροι αὐτοῦ τοῦ 6ου βαθμοῦ ὄντες ἐλάχιστοι, δύνανται νὰ παραληφθῶσι. Οὕτω π. χ. ἡ γραμμικὴ διαστολὴ τοῦ μολύβδου δι' ἕκαστον βαθμὸν θερμοκρασίας ἐστὶ $\frac{1}{35108}$, ὅθεν τὸ τετράγωνον τοιούτου κλάσματος ἐστὶ τοσοῦτον ἀσήμαντον, ὥστε δύναται νὰ παραληφθῇ ἄνευ μεταβολῆς τοῦ ἐξαγομένου.

272. Ἄξιον παρατηρήσεως ἐστὶν ὅτι οὐδεμία σχέσις παρετηρήθη μεταξὺ τῆς ποικιλλομένης διαστολῆς τῶν μεταλλικῶν οὐσιῶν καὶ τῶν ἄλλων ἰδιοτήτων αὐτῶν, ὡς τῆς πυκνότητος, τοῦ ἐλατοῦ, τῆς σκληρότητος κτλ. Καὶ ἔτι ὅτι ἡ ἄστατος διαστολὴ τῶν στερεῶν εἰς διαφόρους λίαν ἀπομεμακρυσμένους βαθμοὺς θερμοκρασίας, ἐστὶ λίαν ἀνεξάρτητος τοῦ ὁρίου τῆς ῥευστότητος αὐτῶν.

Πλεῖστα πειράματα παρὰ διαφόρων ἐγένοντο πρὸς προσδιορισμὸν τῆς διαστολῆς τῶν σωμάτων, ἐξ ὧν ἀπεδείχθη ὅτι ἀπὸ 0° μέχρις 100° θερμοκρασίας, ἡ διαστολὴ ἐστὶν ἀνάλογος τοῦ βαθμοῦ τῆς θερμοκρασίας, ἐκεῖθεν ὅμως τοῦ ὁρίου τούτου ἡ διαστολὴ αὐξάνει ἐπαισθητῶς δι' ἕκαστον βαθμὸν θερμοκρασίας, ὡς δεικνύουσι τὰ εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα ἀποτελέσματα τῶν πειραμάτων διαφόρων φυσικῶν. Ὁ ἑπόμενος πίναξ, ἐξαχθεὶς ἐκ πειραμάτων διαφόρων Ἄγγλων καὶ Γάλλων φυσικῶν, δεικνύει τὴν γραμμικὴν διαστολὴν τῶν κυριωτέρων σωμάτων ἀπὸ τοῦ 0° μέχρις 100° βαθμῶν θερμοκρασίας. Ἡ κυβικὴ διαστολὴ ἐστὶν ὡς ἐῤῥέθη τριπλασία ταύτης.

ΠΙΝΑΞ
Τῆς Γραμμικῆς διαστολῆς τῶν σωμάτων ἀπὸ 0° μέχρις 100°.

Εἶδος σωμάτων	Διαστολὴ
Πλατίνη	0,00099180
Χάλυψ	0,00118990
Σίδηρος (μέρμις)	0,00144010
Χαλκὸς	0,00191880
Ἄργυρος	0,00208260
Χαλκὸς ἐρυθρὸς σφυρήλατος	0,00170000
Χαλκὸς κίτρινος χυτὸς	0,00187500
Κασσίτερος τῶν Ἰνδιῶν καὶ τῆς Μαλάγης	0,00193765
Κασσίτερος Ἀγγλικὸς	0,00217298
Χρυσὸς	0,00146606
Μόλυβδος	0,00284836
Βισμοῦθον	0,00139167
Ψευδάργυρος (μὲ 1|8 κασσίτερον)	0,00269167
Ψευδάργυρος μηκυνθεὶς διὰ σφύρας	0,00310833
Χυτοσίδηρος (εἰς πρίσμα)	0,00111000
Ὕελος λευκὴ (σωλῆνες βαρομέτρου)	0,00083333
Ὕελος (κοινοὶ σωλῆνες)	0,00077550
Ὕελος (εἰς ῥάβδον)	0,00080833
Μέταλλον καθρέπτου μικροσκοπίου	0,00193333
Μεταλλικὴ κόλλα (1 κασσιτέρου καὶ 2 μολύβδου)	0,00250533
» » (2 χαλκοῦ καὶ 1 ψευδαργύρου)	0,00205833
Μέρμις ἐξ ὀρειχάλκου	0,00193333
Παλλάδιον	0,00100000
Πάγος δι' 1°	0,0000500

Πρὸς εὕρεσιν τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τῶν σωμάτων εἰς θερμοκρασίαν 0°, διαιρετέον τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ πίνακος δι' 100.

273. Ὁ ἑπόμενος πίναξ δεικνύει τὴν φαινομένην διαστολὴν τῶν ῥευστῶν ἐν τῇ ὑέλῳ, ἀπὸ 0° ἕως 180°. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς διαστολῆς 1° διαιρετέον τοὺς ἐν τῷ πίνακι ἀριθμοὺς δι' 100.

ΠΙΝΑΞ
Διαστολῆς ῥευστῶν ἀπὸ 0° ἕως 100°.

Εἶδος ῥευστοῦ	Διαστολὴ
Ὕδωρ	0,0466
Ἔλαιον ἐλαιῶν ἢ λίνου	0,0800
Οἰνόπνευμα	0,1100
Ὑδράργυρος	0,0156
Θειϊκὸν ὀξὺ	0,0600
Νιτρικὸν ὀξὺ	0,1100
Ὑδροχλωρικὸν ὀξὺ	0,0600

274. Διὰ διαφόρων πειραμάτων κατεδείχθη ὅτι τὰ ἀέρια ὑπὸ σταθερὰν θλίψιν, διαστέλλονται ὁμοιομόρφως κατὰ βαθμὸν θερμοκρασίας. Κατὰ τὰ τελευταῖα πειράματα τοῦ Ρενιὼ, εὑρέθη ἡ διαστολὴ τοῦ ἀέρος ὡς ἔγγιστα $\frac{11}{3000}$=0,00366, ὅπερ ἐγένετο δεκτὸν διὰ τοὺς ὑπολογισμούς.

Ὁπόταν ἀέριόν τι διατηρῇ τὸν αὐτὸν ὄγκον, ἡ διασταλτικότης μετρᾶται διὰ τῆς ἐπαυξήσεως τῆς ἐλαστικῆς του δυνάμεως, καὶ παρατηρήσεις κατέδειξαν ὅτι ὁ συντελεστὴς τῆς διαστολῆς δὲν θὰ ἦτο ὁ αὐτός, ὡς εἰ τὸ ἀέριον διετέλει ὑπὸ σταθερὰν θλίψιν. Ἡ ἐπαύξησις τῆς θλίψεως ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἀνάλογος τῆς ἐπαυξήσεως τοῦ ὄγκου ἐν τῇ δευτέρᾳ.

Παραδεκτοῦ γενομένου ὡς συντελεστοῦ διαστολῆς τοῦ ἀέρος ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον τοῦ 0,00366, ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ὑπὸ σταθερὰν θλίψιν ἐστὶ παραδεκτὸς ὁ ὑπὸ τοῦ Ρενιὼ εὑρεθεὶς πειραματικῶς ἀριθμὸς 0,3367.

Ὁ ἑπόμενος πίναξ δεικνύει τὴν ἀπόλυτον διαστολὴν ἀερίων τινῶν ἀπὸ 0° μέχρις 100°, κατὰ τὰ πειράματα τοῦ Ρενιὼ.

ΠΙΝΑΞ

Τῆς ἀπολύτου διαστολῆς τῶν ἀερίων ἀπὸ 0° ἕως 100°.

Εἶδος τῶν ἀερίων	Διαστολή	
	Ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον	Ὑπὸ σταθερὰν θλίψιν
Ὑδρογόνον	0,3667	0,3661
Ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ	0,3665	0,3670
Ἄζωτον	0,3668	»
Ὀξείδιον ἄνθρακος	0,3667	0,3669
Ἀνθρακικὸν ὀξὺ	0,3688	0,3710
Πρωτοξείδιον ἀζώτου	0,3676	0,3749
Θειϊκὸν ὀξὺ	0,3845	0,3903
Κυανογόνον	0,3829	0,3877

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου καταφαίνεται ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῆς διαστολῆς τῶν ἀερίων δὲν εἶναι ἴσοι.

275. *Ἐλατήρια*. Τὰ σώματα ἅτινα ὑπὸ τὴν ἐπίρροιαν μηχανικῶν δυνάμεων, ὑφίστανται κατὰ τὴν διάταξιν τῶν μερῶν των, μεταβολὴν ἥτις ἄνευ διακοπῆς τῆς συνεχείας, ἀλλοιοῖ τὸ σχῆμα ἢ

τὸν ὄγκον αὐτῶν δὲν ἐπιῤῥεάζονται ὁμοιομόρφως, διότι τινὰ μὲν ὡς ἡ ἄργιλλος, ὁ κηρός, τηροῦσι τὴν ἣν ὑπέστησαν ἀλλοίωσιν, ἐνῷ ἕτερα, ὡς ἡ ὕελος, τὸ ἐλαστικὸν κόμμι, τὸ ἐλεφάντινον ὀστοῦν κλ., ἐπαναλαμβάνουσι τὴν ἀρχικήν των θέσιν ἅμα παύσῃ ἡ ἐνέργεια τῆς ἐπηῤῥεαζούσης αὐτὰ δυνάμεως. Ἡ ἰδιότης αὕτη τῆς ἀ-τενεργείας καλεῖται *ἐλαστικότης*. Αὕτη ὑπάρχει εἴς τινα σώματα φυσικῶς, εἰς ἕτερα δ' ἀναπτύσσεται διὰ μέσων, ἅτινα εἰσὶ διάφορα εἰς τὰ διάφορα σώματα. Οὕτως ἡ στόμωσις σκληρύνει τὸν χάλυβα, καὶ καθιστᾷ ἐλατὰ τὰ κράματα τοῦ χαλκοῦ καὶ κασσιτέρου, ἡ σφυρηλάτησις δὲν ἐνεργεῖ ὁμοιοτρόπως ἐφ' ὅλων τῶν μεταλλικῶν οὐσιῶν, καὶ ἡ παρουσία ἐλαχίστης ποσότητος ἀρσενικοῦ, καθιστᾷ εὔθραυστα πάντα τὰ μέταλλα.

Τὰ ἐλαστικὰ σώματα ἐκταθέντα, καμφθέντα, ἢ περιστραφέντα, δὲν ἐπανέρχονται εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτῶν κατάστασιν, ἢ μετὰ ἀριθμόν τινα δονήσεων πέριξ τῆς θέσεως ἐν ᾗ θὰ σταματήσωσιν. Ἡ δονητικὴ αὕτη κίνησις, ὡς ἡ τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἐστὶν ἄμεσον ἀποτέλεσμα τῆς συνεχείας τῶν ἀναπτυσσομένων ἐνεργειῶν, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργείας τῆς δυνάμεως. Αἱ δονήσεις μουσικῆς χορδῆς δίδουσιν ἀκριβῆ ἰδέαν τοῦ φαινομένου τούτου. Χορδὴ ἐντεταμένη δὲν δύναται νὰ μεταβάλλῃ τὴν εὐθεῖαν διεύθυνσιν ἄνευ ἐπαυξήσεως τοῦ μήκους αὐτῆς, ὥστε προκύπτει ὅτι ἡ δονητικὴ κίνησις ἧς ἐστὶν ἐπιδεκτική, παράγεται ἐκ σειρᾶς διαδοχικῶν ἐπιμηκύνσεων καὶ ἐπιβραχύνσεων, ἐκ πειραμάτων δ' ἀπεδείχθη ὅτι αἱ τοιαῦται ἐπιμηκύνσεις εἰσὶν ἀνάλογοι τῇ ἐνεργησάσῃ πρὸς νύξιν τῆς χορδῆς δυνάμει, ὥςε ἡ πρὸς ἐπάνοδον τάσις αὐξάνει ἀναλόγως τῆς ἐπιμηκύνσεως ἣν ὑπέστη, καὶ τοῦτο ἐξηγεῖ τὸν ἰσοχρονισμὸν τῶν δονήσεων. Ἐλάσματα ἐλατηρίων ἐνεργοῦσι παρομοίως, δυνάμενα νὰ συγκριθῶσι πρὸς συμβολὴν κτηδόνων (ἰνῶν) ὁμοίας φύσεως καὶ ἰσομήκων, κειμένων τῶν μὲν παρὰ ταῖς δέ.

276. Οἱ φυσικοὶ ἐνησχολήθησαν ἐπὶ μακρὸν χρόνον μάτην πρὸς εὕρεσιν τῶν φυσικῶν αἰτίων τῆς ἐλαστικότητος, τὸ ὀρθώτερον ὅμως συμπέρασμα ἐστὶν ὅτι ἡ ἐλαστικότης ἐστὶ μεταβολή τις τῆς ἀτομικῆς ἕλξεως. Τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐλαστικότητος εἰσὶ πολὺ μᾶλλον γνωστὰ ἢ τὰ προξενοῦντα ταύτην αἴτια. Τὰ ἀέρια εἰς ταύτην ὀφείλουσι τὰς κυριωτέρας αὐτῶν ἰδιότητας, καὶ εἰς τὴν ἐλα-

στικότητα τῶν στερεῶν ὀφείλονται τὰ ἐλατήρια, ὧν ἡ χρῆσις ἐστὶ κοινοτάτη εἰς τὰς μηχανάς, καὶ πρὸ πάντων εἰς τὴν ὡρολογοποιΐαν.

Τὰ ἐλατήρια ἄλλοτε κατεσκευάζοντο ἐκ χάλυβος δι' ἀνθρακιάσεως, τελευταῖον ὅμως κατεσκευάσθησαν καὶ ἐκ χυτοχάλυβος, καὶ τοιαῦτα εἰσὶ τὰ σήμερον ἐν χρήσει, πρὸ πάντων ἐν τῇ ἁμαξοποιΐᾳ.

Τοῦ ἐλατηρίου προσέτι γίνεται συχνοτάτη χρῆσις εἰς τὰς ἁπλουστέρας ἔτι τῶν μηχανῶν, πρὸς παρεμποδισμὸν μετακινήσεως μέρους τινος τροχοῦ ἢ στροφάλου, ὅπερ μόνον τῇ ἐνεργείᾳ ὡρισμένης θλίψεως δέον νὰ ἐνδόσῃ.

277. *Ἐκκρεμές*. Τὸ ἐκκρεμὲς σύγκειται ἐκ βαρέως στρογγύλου συνήθως σώματος, κρεμαμένου διὰ νήματος οὗ τό ἄνω ἄκρον ἐστὶ προσκεκολλημένον ἐπὶ ὁριζοντείου ἄξονος περιστρεφομένου περὶ ἑαυτόν. Ἐὰν τὸ νῆμα ὑποτεθῇ ἀβαρές, καὶ τὸ στερεὸν σῶμα ὡς ἓν σημεῖον μόνον εἰς ὃ συγκεντροῦται τὸ βάρος, τὸ ἐκκρεμὲς καλεῖται *ἁπλοῦν*, ἄλλως καλεῖται *σύνθετον*. Ὑπάρχει προσέτι καὶ ἕτερον εἶδος ἐκκρεμοῦς, καλούμενον *ἀντισταθμικὸν ἐκκρεμές*, διότι ἐστὶ κατασκευασμένον οὕτως ὥστε αἱ μεταβολαὶ τῆς θερμοκρασίας οὐδόλως ἐπηρρεάζουσιν αὐτό.

278. Τὸ κέντρον τῆς κρεμάνσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐστὶ τὸ σημεῖον περὶ τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ τὰς δονήσεις αὐτοῦ.

Τὸ κέντρον τῶν δονήσεων αὐτοῦ ἐστὶν, ὑποτιθεμένης πάσης τῆς ὕλης αὐτοῦ συγκεντρωμένης εἰς ἓν μόνον σημεῖον, τὸ σημεῖον ἐφ' οὗ δύναμίς τις ἐφαρμοζομένη ἐπ' αὐτοῦ, προξενεῖ εἰς δεδομένον χρόνον ταχύτητα ἴσην ἐκείνης, ἣν ἡ αὐτὴ δύναμις ἤθελε προξενήσει εἰς ἅπαν το ἐκκρεμές.

Ἔστω ΠΝ (Σχ. 177) ἐκκρεμὲς κρεμάμενον ἐκ τοῦ σημείου Π. Ἐὰν ὁ δίσκος τοῦ ἐκκρεμοῦς Ν φερόμενος εἰς Β ἀφεθῇ ἐλεύθερος, θέλει κατέλθει διὰ τῆς ἐνεργείας τοῦ βάρους του, διατρέχων τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΝ. Φθάνον εἰς Ν, θέλει ἔχει τὴν ταχύτητα ἣν κέκτηται σῶμα πίπτον καθέτως ἐκ Γ εἰς Ν, κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου (254), διότι ΒΝ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνέχεια ἐλαχίστων κεκλιμένων ἐπιπέδων, εἰς Ν δὲ θέλει τείνει νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην ΝΔ μὲ τὴν αὐτὴν κτηθεῖσαν ταχύτητα, πλὴν ἐμποδιζόμενον ὑπὸ τοῦ νήματος δι' οὗ κρέμαται, θέλει ἀκολουθήσει

ὁμοίαν διεύθυνσιν, καὶ θέλει διατρέξει μὲ τὴν αὐτὴν κτηθεῖσαν ταχύτητα τὸ τόξον ΝΑ. Κατὰ τὴν ἄνοδον τοῦ τόξου ΝΑ, τὸ βάρος τοῦ δίσκου θέλει βραδύνει τὴν κίνησιν, καθ' ὃν τρόπον ἐπετάχυνε ταύτην κατὰ τὴν κάθοδον τοῦ τόξου ΒΝ, ὥστε ὅταν διατρέξῃ τὸ τόξον ΝΑ=ΝΒ, πᾶσα ταχύτης θέλει ἐκλείψει, ἑπομένως πᾶσα κίνησις κατὰ τὴν διεύθυνσιν ταύτην θέλει παύσει, καὶ ὁ δίσκος θέλει εὑρεθῇ εἰς Α ὡς εὑρέθη πρότερον εἰς Β. Ὅθεν ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους του θέλει κατέλθει ἐπιταχυντικῶς μὲν τὸ τόξον ΑΝ, ἀνέλθει δὲ ἐπιβραδυντικῶς τὸ τόξον ΝΒ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

279. Οἱ μαθηματικοὶ κατέδειξαν διαφόρους ἰδιοτήτας τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἐξ ὧν αἱ κυριώτεραι εἰσὶν αἱ ἑξῆς.

α'. Ἐκκρεμοῦς πάλλοντος κατὰ ἐλάχιστα τόξα, οἱ χρόνοι τῶν παλμῶν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ἴσοι, οἱονδήποτε καὶ ἂν ᾖ τὸ μῆκος τοῦ διανυομένου τόξου.

β'. Ἰσομήκη ἐκκρεμῆ πάλλουσιν ἰσοχρόνως, οἱαδήποτε καὶ ἂν ὦσι τὰ βάρη αὐτῶν.

γ'. Ἐκκρεμοῦς πάλλοντος κατὰ ἐλάχιστον τόξον ἡ διάρκεια ἑνὸς παλμοῦ, ἐστὶ πρὸς τὴν διάρκειαν τῆς καθέτου πτώσεως σώματος κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τοῦ ἐκκρεμοῦς, ὡς περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον.

δ'. Τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς πάλλοντος κατὰ δευτερόλεπτα, ἐστὶ πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ διανυομένου ἐντὸς δευτερολέπτου διαστήματος ὑπὸ σώματος πίπτοντος, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς περιφερείας. Τουτέστιν ἐὰν $\delta=1$ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, π ἡ περιφέρεια (148), τ ὁ χρόνος ἢ ἡ διάρκεια ἑνὸς παλμοῦ, λ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, καὶ g τὸ διανυόμενον διάστημα ὑπὸ σώματος πίπτοντος καθέτως κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον (204), ἕπεται ὅτι

$$\pi^2 : \delta^2 :: 2g : \lambda. \text{ ἐξ ἧς } \tau=\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

ε', Οἱ χρόνοι δύο ἐκκρεμῶν παλλόντων κατὰ ὅμοια κυκλικὰ τόξα, εἰσὶ μεταξύ των ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν μήκεων αὐτῶν. Κατὰ ταῦτα τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς πάλλοντος κατὰ δευτερόλεπτον ὄντος 0,99304, τὸ μῆκος ἑτέρου πάλλοντος κατὰ ἡμιδευτερόλεπτον ἔσεται $1'' : 1/2'' :: \sqrt{0,99384} : X$ ἐξ ἧς $X=\frac{0,99384}{4}=$ 0,24846.

ϛ'. Ἂν καὶ αἱ διάρκειαι τῶν παλμῶν ἐκκρεμοῦς κατὰ διάφορα τόξα εἰσὶ σχεδὸν ἴσαι, μολοντοῦτο ἐπειδὴ ὑπάρχει διαφορά τις μεταξὺ τοῦ μεγαλειτέρου καὶ μικροτέρου τῶν τόξων τούτων, δέον ἵνα ὑπάρχῃ διαφορά τις μεταξὺ τῆς διαρκείας τῶν παλμῶν. Ἡ διαφορὰ αὕτη ἂν καὶ ἀνεπαίσθητος, γίνεται ἐπαισθητὴ μετά τινας ἡμέρας. Εἰς τ' ἀστρονομικὰ παλμοῤῥυθμικὰ ὡρονόμια, καθίσταται ἐπάναγκες ἡ παρατήρησις τῶν τόξων τῶν παλμῶν, καὶ ἂν ἦναι διάφορον τοῦ ὑπὸ τοῦ ἐκκρεμοῦς διαγραφομένου, δέον νὰ ἐπέλθῃ διόρθωσις εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ ὡρονομίου δεικνυομένην ὥραν. Ἡ διόρθωσις αὕτη δέον νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τριπλασίου τῆς διαφορᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ δεδομένου τόξου, καὶ ἐκείνου τοῦ διαγραφομένου ὑπὸ τοῦ ἐκκρεμοῦς, τῶν τόξων τούτων ἐκφραζομένων εἰς μοίρας, τοῦ ὡρονομίου χάνοντος ἢ κερδίζοντος, καθ' ὅσον τὸ πρῶτον τῶν τόξων τούτων ἐστὶ μεῖζον ἢ ἔλαττον τοῦ δευτέρου. Ὥστε ἂν ὡρονόμιον δεικνύει ἀκριβῶς τὴν ὥραν ὁπόταν τὸ ἐκκρεμὲς πάλλῃ κατὰ τόξον 3°, ἐὰν τὸ ἐκκρεμες πάλλῃ κατὰ τόξον 4°, τὸ ὡρονόμιον θέλει ὀπισθοδρομήσει κατὰ $10\frac{1}{3}''$ τὴν ἡμέραν, διότι ἡ ὀπισθοδρόμησις κατὰ τ' ἀνωτέρω ἔσεται

$$(4^2-3^2)\tfrac{3}{2}=7\times\tfrac{3}{2}=10\tfrac{1}{2}''.$$

Τὸ ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς δὲν εἶναι παρὰ ὑποθετικόν, χάριν τῶν μαθηματικῶν ὑπολογισμῶν, ἐν τῇ φύσει ὅμως δὲν ὑπάρχει διότι ὡς ἐλέχθη σύγκειται ἐξ ἑνὸς μόνου βαρέως σημείου ὑλικοῦ, τὸ δὲ νῆμα κρεμάνσεως ὑποτίθεται ἀβαρές. Τῇ ὑποθέσει ὅμως τοιούτου ἐκκρεμοῦς, οἱ μαθηματικοὶ ἀνεκάλυψαν τὰς ῥηθείσας ἰδιοτήτας, αἵτινες ἐφαρμόζονται εἰς τὸ πραγματικὸν ἢ σύνθετον ἐκκρεμές.

280. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς ἐπὶ τοῦ συνθέτου ἢ πραγματικοῦ τοιούτου, δέον νὰ θεωρηθῇ ἐπὶ τούτου ἴδιόν τι σημεῖον, *κέντρον τῶν παλμικῶν κινήσεων* καλούμενον, καὶ ἔχον τὴν ἰδιότητα τοῦ κινεῖσθαι, μ' ὅλην τὴν πρὸς τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ συστήματος σχέσιν του, εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίσῃ ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς ἐν περιπτώσει καθ' ἣν ἀπεμονοῦτο ἄνευ μεταβολῆς τῆς ἀποστάσεώς του ἐκ τοῦ σημείου τῆς κρεμάνσεως. Ἡ θέσις τοῦ σημείου τούτου ἐν τοῖς συνθέτοις ἐκκρεμέσι ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ πάλλοντος σώματος, καὶ δὲν δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἢ πειραματικῶς. Μεταξὺ τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων,

καὶ τοῦ σημείου τοῦ σώματος περὶ τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖται ἡ κίνησις καλούμενον *κέντρον κρεμάνσεως*, ὑφίσταται ἐντελὴς ἀμοιβαιότης, τουτέστι κρεμασθέντος σώματός τινος ἐκ τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων, ὅπερ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καθίσταται κέντρον κρεμάνσεως, τὸ ἀρχικὸν κέντρον κρεμάνσεως καθίσταται ὁμοίως κέντρον παλμικῶν κινήσεων, καὶ ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς μένει ἡ αὐτή. Εὐκόλως κατανοεῖται πόσον ἡ ἰδιότης αὕτη δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ἵνα δι' ἁπλῶν δοκιμασιῶν προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων συνθέτου ἐκκρεμοῦς, καὶ ἑπομένως τὸ μῆκος τοῦ ἀνταποκρινομένου εἰς αὐτὸ ἁπλοῦ τοιούτου.

Τὸ κάθετον μῆκος ἐκκρεμοῦς τινος, ἐστὶν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς κρεμάνσεως αὐτοῦ. Ὅθεν προκύπτει ὅτι οἱ παλμικοὶ χρόνοι διαφόρων ἐκκρεμῶν, εἰσὶν ἀνάλογοι τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν ἐκ τῶν ἀξόνων στροφῆς ἀποστάσεων τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων αὐτῶν.

Γνωστῆς οὔσης τῆς θέσεως τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος, καθὼς καὶ τῆς τοῦ κέντρου τῆς στροφῆς, ὁ προσδιορισμὸς τῆς θέσεως τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων ἐστὶν εὔκολος, διότι ἡ ἐκ τοῦ ἄξονος ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων, εὑρίσκεται τῇ διαιρέσει τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος στροφῆς, διὰ τῆς ἀποστάσεως τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος στροφῆς ἐκ τοῦ ἄξονος. Οὕτω 6 οὔσης τῆς ἀκτῖνος τῆς στροφῆς, καὶ 9 τοῦ ἀποστήματος τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος ἐκ τοῦ ἄξονος, 36 διαιρούμενον δι' 9 ἤτοι 4, ἔσεται ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων ἐκ τοῦ ἄξονος. Προκύπτει δ' ἐκ τούτου ὅτι, ὅσον αὐξάνει ἡ ἀκτὶς τῆς περιστροφῆς, σχετικῶς πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος ἐκ τοῦ ἄξονος, τοσοῦτον αὐξάνει ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων. Ὅθεν τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐστὶν ἀνεξάρτητον τοῦ ὄγκου. Ἐὰν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος κῆται πλησίον τοῦ ἄξονος, καὶ τὸ κέντρον τῆς περιστροφῆς σχετικῶς ἀπομεμακρυσμένον τούτου, τὸ κέντρον τῶν παλμικῶν κινήσεων δύναται νὰ εὑρεθῇ πέραν τῶν ὁρίων τοῦ σώματος τοῦ ἐκκρεμοῦς. Τῇ ὑποθέσει ὅτι τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ἀπέχει τοῦ ἄξονος 0,027$^{μ.}$ καὶ τὸ κέντρον τῆς περιστροφῆς 0,032$^{μ.}$, τὸ κέντρον τῶν παλμικῶν κινήσεων θέλει ἀπέχει τούτου κατὰ 3,897. Τοιοῦτον ἐκκρεμὲς δὲν

δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 0,32, μολοντοῦτο ὁ χρόνος τῆς κινήσεώς του θέλει εἶσθαι ὅμοιος τῷ χρόνῳ τῆς κινήσεως ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς μήκους 3,897.

Ὅθεν δυνατὸν νὰ δοθῇ κίνησις εἰς μικρότατα ἐκκρεμῆ κατὰ βούλησιν βραδυτάτη. Τὰ πρὸς μέτρησιν τοῦ χρόνου τῆς μουσικῆς ὄργανα, στηρίζονται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ταύτης.

281. Καταφανὲς ἐκ τῶν εἰρημένων ἐστὶν ὅτι ἐὰν ὑπῆρχεν ὕλη τις μὴ ὑποκειμένη εἰς μεταβολὴν τῶν διαστάσεων αὐτῆς ἕνεκα τῶν μεταλλαγῶν τῆς θερμοκρασίας, ἐκκρεμὲς ἐκ ταύτης ἠδύνατο νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς καταμέτρησιν τοῦ χρόνου, καθότι τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων τηροῦντος σταθερὰν τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου κρεμάνσεως ἀπόστασίν του, αἱ παλμικαὶ κινήσεις ἤθελον εἶσθαι πάντοτε ἰσόχρονοι. Ἐπειδὴ ὅμως τοιαύτη ὕλη δὲν ὑπάρχει, ἕπεται ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς ποικίλλει ἀναλόγως τῶν μεταλλαγῶν τῆς θερμοκρασίας, ὥστε ἡ διάρκεια τῶν παλμικῶν κινήσεων ποικίλλει ἐπίσης.

Διαφορὰ θερμοκρασίας 25°, ἤτοι ἡ μεταξὺ χειμῶνος καὶ θέρους μέση διαφορά, προξενεῖ ἐπιβράδυνσιν ἢ ἐπιτάχυνσιν τοῦ ἐκκρεμοῦς 6″ ἀνὰ 24 ὥρας εἰς ὡρονόμιον μὲ σιδηροῦν ἐκκρεμές.

Δικαίως ἄρα ἐθεωρήθη ὡς ζήτημα σπουδαῖον ἡ ἀνακάλυψις μέσου πρὸς ἀντιστάθμησιν τῶν μεταβολῶν εἰς ἃς ὑπόκειται τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, τουτέστιν ὁ τρόπος κατασκευῆς τοιούτου, ὥστε τὸ κέντρον τῶν παλμικῶν κινήσεων ν' ἀπέχῃ πάντοτε κατὰ σταθερὰν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς κρεμάνσεως, οἱαιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν αἱ τῆς θερμοκρασίας μεταλλαγαί. Αἱ διαφοραὶ τῆς διαστολῆς τῶν διαφόρων μετάλλων, παρῆξαν τὸ μέσον τῆς τοῦ ζητήματος τούτου ἐπιλύσεως καὶ τῆς κατασκευῆς τοῦ ἀντισταθμικοῦ ἐκκρεμοῦς.

Εὔκολος καθίσταται ἐκ τοῦ πίνακος τῶν γραμμικῶν διαστολῶν τῶν σωμάτων (272) ἡ εὕρεσις τοῦ μήκους μίσχου, οὗ ἡ γραμμικὴ διαστολὴ νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν γραμμικὴν διαστολὴν ἑτέρου τοιούτου δεδομένου μήκους καὶ ἐξ ἑτέρας ὕλης. Καταφανὲς ἐστὶν ὅτι τὰ μήκη τῶν μίσχων τούτων ἔσονται εἰς ἀντίστροφον λόγον τῶν διαστολῶν αὐτῶν, ὥστε ἐὰν διαιρεθῇ ἡ μικροτέρα διαστολὴ διὰ τῆς μεγαλειτέρας, ὑποτιθεμένου ὅτι ὁ μίσχος τοῦ δεδομένου μήκους κατεσκευάσθη ἐκ τῆς ἧττον διαστελλομένης ὕλης, καὶ πολλαπλα-

πιασθῇ τὸ μῆκος τοῦτο ἐπὶ τὸν συντελεστήν, τὸ ἐξαγόμενον θέλει ἐμφαίνει μῆκος μίσχου, οὗτινος ἡ διαστολὴ ἔσεται ἴση τῇ τοῦ δεδομένου. Οὕτω, τῆς γραμμικῆς διαστολῆς χαλυβδίνου τινὸς μίσχου, οὔσης κατὰ τὸν πίνακα 0,0019791 καὶ ἐκείνη μίσχου χαλκίνου 0,0017173, τὸ μῆκος χαλκίνου μίσχου διαστελλομένου ὅσον μίσχος χαλύβδινος $1,05^{\mu.}$ μήκους ἔσεται $\frac{0,0019791}{0,0017173} \times 1,05 = 0,64^{\mu.}$

Ὁ ἑπόμενος πίναξ δίδει τὸν λόγον τοῦ μήκους τῶν διαφόρων ὑλῶν, αἵτινες δύνανται νὰ χρησιμεύσωσι πρὸς κατασκευὴν ἀντισταθμικῶν ἐκκρεμῶν.

Ὁ Μίσχος	Ἐκ χάλυβος......	Ἔχει πρὸς τὴν ἀντιστάθμησιν	Ἐκ χαλκοῦ	::1:0,1609
	» σιδ. μέρμιθος		» μολύβδου	::1:0,4308
	» χάλυβος......		» »	::1:0,3993
	» σιδ. μέρμιθος		» ψευδαργύρου	::1:0,3973
	» χάλυβος......		» μολύβδου	::1:0,3682
	Ἐξ ὑέλου.........		» ψευδαργύρου	::1:0,3007
	» »		» »	::1:0,2773
	Ἐκ ξύλου.........		» μολύβδου	::1.0,1427
	» »		» ψευδαργύρου	::1:0,1313
	» χάλυβος.....		Ἐξ ὑδραργύρου ἐντὸς χάλυβος	::1:0,0728
	» »		» » » ὑέλου	::1·0,0703
	Ἐξ ὑέλου.........		» » » »	::1:0,0529

Τὰ ἀντισταθμικὰ ἐκκρεμῆ εἰσὶν ἐν χρήσει διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν παλμοῤῥυθμιστικῶν ὡρονομίων. Ὁ Ἄγγλος Huygens ἐστὶν ὁ πρῶτος ἐφαρμόσας τὸ ἐκκρεμὲς εἰς τὰ πρὸς καταμέτρησιν τοῦ χρόνου ὄργανα.

282. Τὸ ἐκκρεμὲς ὡρονομίου κρέμαται συνήθως δι᾽ ἐλατηρίου προσκεκολλημένου πρὸς τὸ ἀνώτερον αὐτοῦ ἄκρον, διερχόμενον δι᾽ ἐπὶ τούτῳ ἀνατομῆς τμηθείσης ἐπὶ ἑτέρου μικροῦ τεμαχίου, καλουμένου *κεφαλή*.. Ὅθεν τὸ σημεῖον τῆς κρεμάνσεως ἐστὶ τὸ μέρος τοῦ ἐλατηρίου ἐφ᾽ οὗ ἐρείδεται ἡ κάτω ἐπιφάνεια τῆς κεφαλῆς. Ἡ ἀντίστασις ἤδη τοῦ κέντρου τῶν παλμικῶν κινήσεων τοῦ ἐκκρεμοῦς, δύναται νὰ ποικίλλῃ διττῶς, πρῶτον τῇ πρὸς τὰ ἄνω ἕλξει τοῦ ἐλατηρίου διὰ τῆς ἀνατομῆς, καὶ δεύτερον τῇ ἀνυψώσει τοῦ δίσκου τοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἑκάστη τῶν μεθόδων τούτων δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ ἀντισταθμικοῦ ἐκκρεμοῦς, πλὴν ἡ πρώτη παρέχει ἐλαττώματά τινα μὴ ἀπαντώμενα ἐν τῇ δευτέρᾳ.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τούτων ἔστω ἐκκρεμὲς χαλύβδινον ΣΓ (Σχ. 178) $1,05^{\mu.}$ μήκους, ὅπερ πρόκειται ν᾽ ἀντισταθμηθῇ διὰ μέσου

χαλκίνου μίσχου. Τὸ ἐλατήριον τοῦ ἐκκρεμοῦς διερχόμενον διὰ τῆς κεφαλῆς Σ, ἐστὶ προσκεκολλημένον εἰς δεύτερον χαλύβδινον μίσχον εἰς Α ἐπὶ τοῦ ἐγκαρσίου τεμαχίου ΡΑ, οὗ τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων Ρ ἐστὶ προσαρμοσμένον πρὸς ἕτερον χάλκινον μίσχον προσκεκολλημένον ὄντα διὰ τοῦ κατωτέρου αὐτοῦ ἄκρου ἐπὶ τοῦ γλωσσιδίου Β τοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἤδη ὁ χάλκινος μίσχος ΒΡ δέον νὰ ἐκτανθῇ πρὸς τὰ ἄνω, ὅσον ὁ μίσχος ΑΓ πρὸς τὰ κάτω, καὶ τὸ μῆκος τοῦ χαλκοῦ δέον νὰ ᾖ τοιοῦτον ὥστε ν' ἀφίνῃ 1,05μ. τοῦ χαλυβδίνου μίσχου κάτωθεν τῆς κεφαλῆς τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Κατὰ πρῶτον δοκιμάζεται μίσχος χαλύβδινος 2,16μ. μήκους. Πολλαπλασιαζόμενος ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐπὶ 0,55μ. δίδει 1,188 διὰ μῆκος χαλκοῦ ἀντισταθμίζοντος 2,16 χάλυβος, ἀλλ' ἐπειδὴ 1,198 χάλυβος ἰσομήκους τῷ χαλκῷ, ἤθελεν εὑρεθῆ ἄνωθεν τῆς κεφαλῆς τοῦ ἐκκρεμοῦς, δὲν ἤθελε μένει κάτωθέν του ἢ 0,97 ἀντὶ 1,05.μ.

Ἡ χρῆσις χαλυβδίνου μίσχου 2, 35μ. ἄγει εἰς καλλιώτερον ἀποτέλεσμα. Καὶ ὄντως, ἡ ποσότης αὕτη πολλαπλασιαζομένη ὡς ἡ προηγουμένη ἐπὶ 0, 55 δίδει 1, 2925 διὰ μῆκος χαλκίνου μίσχου, ἀφίνει δὲ συνεπῶς κάτωθεν τῆς κεφαλῆς τοῦ ἐκκρεμοῦς 1, 057, ὅπερ ἀρκούντως δύναται νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὸν προκείμενον σκοπόν.

Δῆλον ἐκ τῶν λεχθέντων γίνεται ὅτι, τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς συνιστώσης τὸν μίσχον τοῦ ἐκκρεμοῦς ὕλης, δέον νὰ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τοῦ μήκους τοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ τοῦ μήκους τῆς ἀντισταθμήσεως.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι ἡ ἀντιστάθμησις ἐγένετο διὰ τῆς ἑλκύσεως τοῦ ἐλατηρίου τοῦ ἐκκρεμοῦς διὰ μέσου τῆς ἀνατομῆς, τὸ αὐτὸ ὅμως ἀποτέλεσμα προκύπτει διὰ τῆς κινήσεως τοῦ δίσκου τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Ἔστω ΣΓ (Σχ. 179) μίσχος μήκους 1, 05μ. ὡς προηγουμένως. Ὁ χαλύβδινος μίσχος ΣΔ, κάμπτεται κατ' ὀρθὴν γωνίαν εἰς Δ, ἔνθα εἰς Ρ προσκολλᾶται καθέτως μίσχος χάλκινος ΒΡ 1, 65 μήκους. Εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ χαλυβδίνου μίσχου προσκολλᾶται ἐγκάρσιον τεμάχιον ΡΑ, εἰς οὗ τὸ ἄκρον τίθεται πρὸς τὰ κάτω χαλύβδινος μίσχος μέχρις Σ ὅστις κάμπτεται μέχρι Γ. Τὸ ὁλικὸν μῆκος τῶν πρὸς τὰ κάτω χαλυβδίνων τεμαχίων ἐστὶ ΣΔ+ΔΖ+ΖΓ ἤτοι 1, 05, εἰς ὃ προστίθεται μῆκος χάλυβος ἴσον τῷ χαλκίνῳ

μίσχῳ BP=1, 65,^{μ} ἅτινα ὁμοῦ δίδουσιν ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παρασκεύασμα 2,35^{μ}· χάλυβος, οὗ ἡ πρὸς τὰ κάτω διαστολὴ ἀντισταθμίζεται, διὰ τῆς πρὸς τὰ ἄνω τοῦ χαλκίνου μίσχου, 1,65^{μ} μήκους.

283 Τὸ σχῆμα τοῦ σταθμιστῆρος τούτου καθιστᾶ αὐτὸν δύσχρηστον, ἕνεκα τοῦ μεγάλου μήκους τοῦ κάτωθεν τῆς κεφαλῆς τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐκτεινομένου χαλύβδου καὶ χαλκοῦ. Τὸ ἀτόπημα ὅμως τοῦτο ἐν μέρει θεραπεύεται, διότι ἀδιάφορον ἐστὶν ἂν ὁ χάλυψ καὶ ὁ χαλκὸς σύγκεινται ἐξ ἑνὸς ἢ πλειόνων τεμαχίων, ἀρκεῖ μόνον τὰ μὲν χαλύβδινα τεμάχια νὰ ὦσιν οὕτω τοποθετημένα ὥστε νὰ διαστέλλονται πρὸς τὰ κάτω, ὡς ἐπίσης τὰ χάλκινα πρὸς τὰ ἄνω. Οὕτως ἐν τῷ (Σχ. 180) τὰ πρὸς τὰ κάτω διαστελλόμενα χαλύβδινα τεμάχια, ἔχουσιν ἐν συνόλῳ μῆκος 2,70^{μ}, τὰ δὲ πρὸς τὰ ἄνω διαστελλόμενα χάλκινα 1,65.

284. *Ἐκκρεμὲς ἐσχάρα* (Σχ. 181). Τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο σύγκειται ἐξ ἀλληλοδιαδόχων παραλλήλων μίσχων ἐκ χάλυβος καὶ χαλκοῦ. Αἱ ἐν τῷ σχήματι βαθύτεραι γραμμαὶ δεικνύουσι τοὺς χαλυβδίνους μίσχους, αἱ δ' ἀραιότεραι τοὺς χαλκίνους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'.

Ἐμπλεκτικοὶ Τροχοί. — Πασσαλοπήκτης. — Γεράνιον. — Κοχλίας ἀτέρμων. — Ἐμψυχοκίνητον.

285. *Ἐμπλεκτικοὶ τροχοί.* — Οἱ ἐμπλεκτικοὶ τροχοὶ χρησιμεύουσι πρὸς μετάδοσιν τῆς ἐνεργείας κινητηρίου δι' ἐπαυξήσεως τῆς ταχύτητος. Συνίστανται δὲ εἰς κυκλικοὺς δίσκους φέροντας γύρωθεν διαδοχικῶς ὀδόντας καὶ κενά. Οἱ ἐμπλεκτικοὶ τροχοί, οἱ μεταδίδοντες τὴν κίνησιν ἄξονός τινος εἰς ἕτερον παράλληλον τούτου, καλοῦνται *εὐθεῖς* ἢ *κυλινδρικοί*, ὡς ἔχοντες τὰς γεννητρίας των παραλλήλους, οἱ δὲ τοιοῦτοι οἱ εὑρισκόμενοι ἐπὶ καθέτων μεταξὺ τῶν ἀξόνων ἢ κεκλιμένων, καλοῦνται *γωνιακοὶ* ἢ *κωνικοί*, διότι αἱ γεννήτριαι αὐτῶν τείνουσι πρὸς κοινόν τι σημεῖον ἢ κορυφήν.

Δύω εὐθεῖς ἢ κωνικοὶ τροχοί, μεταδίδοντες κίνησιν ὁ εἷς τὸν ἕ-

τερον, περιστρέφονται κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις, ἵνα ὅμως οἱ ἄξονες ἐφ' ὧν εὑρίσκονται οἱ τροχοί, περιστραφῶσι κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, δέον νὰ τεθῇ τρίτος μεταξὺ τῶν δύω τούτων, ὅστις μεταδίδει τότε τὴν κίνησιν τοῦ πρώτου τροχοῦ εἰς τὸν δεύτερον, ὁπότε ἄξιον παρατηρήσεως ἐστὶν, ὅτι οἱονδήποτε καὶ ἂν ᾖ τὸ μέγεθος τοῦ διαμέσου τούτου τροχοῦ, ἡ ταχύτης σχετικῶς πρὸς τοὺς δύο πρώτους δὲν μεταβάλλεται, ἑπομένως καὶ ἡ τῶν δύο ἀξόνων αὐτῶν. Διότι εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἐφάπτεται πάντοτε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὀδόντων, τουτέστιν ἂν ὁ πρῶτος τροχὸς προξενήσῃ τὴν προχώρησιν τοῦ μέσου κατὰ τρεῖς ὀδόντας, οὗτος θέλει προξενήσει τὴν προχώρησιν τοῦ δευτέρου τροχοῦ ἐπίσης κατὰ τρεῖς ὀδόντας. Ἐὰν δ' ὑπάρχουσι πλεῖστοι ἐνδιάμεσοι τροχοὶ μεταξὺ τῶν δύω πρώτων, ὡς ἐν τῷ (Σχ. 182) δείκνυται, ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος τῶν ἐνδιαμέσων τούτων τροχῶν, οὐδόλως μεταβάλλει τὴν ταχύτητα ἣν θὰ εἶχεν ὁ τροχὸς Β, εἰ ἐδέχετο τὴν κίνησιν ἀμέσως παρὰ τοῦ τροχοῦ Α.

286. Ὁπόταν δύο παράλληλοι ἄξονες εἰσὶν ἀπομεμακρυσμένοι, καὶ ἡ κίνησις μεταδίδεται ἐκ τοῦ ἑνὸς εἰς τὸν ἕτερον δι' ἀτερμόνων ἱμάντων (260), ἡ ἁπλὴ διάταξις τῶν βραχιόνων τῶν ἱμάντων, ἀρκεῖ πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ἐννοίας τῆς στροφῆς τῶν ἀξόνων. Οὕτως ὅταν δέον οὗτοι νὰ περιστραφῶσι κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, οἱ βραχίονες τῶν ἱμάντων διατίθενται παραλλήλως (Σχ. 183) ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶν τυμπάνων ἢ τροχῶν· καὶ ὁπόταν οἱ ἄξονες δέον νὰ περιστραφῶσι κατ' ἀντιθέτους ἐννοίας, οἱ βραχίονες τῶν ἱμάντων διατίθενται σταυροειδῶς (Σχ. 184).

287. Ἐὰν δύο δίσκοι ἢ τύμπανα περιστραφῶσι τὸ ἓν ἀντιθέτως τοῦ ἄλλου ἄνευ ὀλισθήσεως, ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ ἑνὸς ἀνταποκρίνεται διαδοχικῶς πρὸς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ ἑτέρου, καὶ τὰ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανυόμενα τόξα εἰσὶν ἴσα. Ἐὰν ἡ ἀνάπτυξις τῆς πρώτης περιφερείας ἐστὶ διπλασία τῆς δευτέρας, ἡ τελευταία αὕτη θέλει ἐκτελέσῃ δύο περιστροφὰς ἐνῷ ἡ πρώτη ἐκτελεῖ μίαν μόνην.

Παρομοίως συμβαίνει καὶ εἰς δύο συστρεφομένους ἐμπλεκτικοὺς τροχούς. Ἐὰν ὁ εἷς τούτων περιέχει π. χ. 48 ὀδόντας, ὁ δ' ἕτερος 42, τῶν ὀδόντων τοῦ ἑνὸς ἐρχομένων διαδοχικῶς εἰς ἐπαφὴν μὲ τοὺς

τοῦ ἑτέρου, ὁ δεύτερος τροχὸς θέλει ἐκτελέσει 4 περιστροφάς, ἐνῷ ὁ πρῶτος ἐκτελεῖ μίαν μόνην.

Κατὰ τὴν γενικὴν ταύτην ἀρχήν, οἱ ἐμπλεκτικοὶ τροχοὶ ὡς αἱ τροχαλίαι, καὶ τὰ τύμπανα, ὧν χρῆσις γίνεται πρὸς μετάδοσιν τῆς κινήσεως, ἀκολουθοῦσι τοὺς ἑξῆς νόμους.

α΄. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων δύο εἰς ἐπαφὴν τροχαλιῶν, ἐστὶν ἀνάλογος τῶν περιφερειῶν, ἀκτίνων ἢ διαμέτρων τῶν ἰδίων τούτων τροχῶν.

Οὕτως ἐὰν Ν ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων τροχοῦ ἀκτῖνος Ρ, καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων ἀστερίσκου ἀκτῖνος ρ, ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$N : \nu :: P : \rho \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ἐξ ἧς γνωστῶν οὐσῶν τῶν τριῶν ποσοτήτων, προσδιορίζεται ἡ τετάρτη.

β΄. Ἡ ταχύτης τῶν τροχῶν, τυμπάνων, ἢ τροχαλιῶν, ἐστὶν ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀδόντων ἢ τῶν ἀκτίνων τῶν τροχῶν.

Ὅθεν ἐὰν υ ἐστὶν ἡ ταχύτης τῆς περιστροφῆς τοῦ φέροντος τὸν μικρὸν τροχὸν ἢ ἀστερίσκον ἀκτῖνος ρ ἄξονος, καὶ Υ ἡ ταχύτης τοῦ ἄξονος τοῦ τροχοῦ ἀκτῖνος Ρ, ἕπεται ὅτι

$$\Upsilon : \upsilon :: \rho : P \text{ καὶ } \Upsilon : \upsilon :: \nu : N \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ἐξ ὧν γνωστῶν οὐσῶν τῶν τριῶν ποσοτήτων, προσδιορίζεται ἡ τετάρτη.

Τ' ἀνωτέρω συγκεφαλαιοῦνται ὡς ἑξῆς.

α΄. Ὅσον μεγαλειτέρα ἐστὶν ἡ ἀκτὶς τροχοῦ τινος, τοσοῦτον μεγαλείτερος ἔσεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων αὐτοῦ, καὶ

β΄. Ὅσον ἡ ἀκτὶς ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων ἐστὶ μεγαλείτερος, τοσοῦτον ἡ ταχύτης τοῦ τροχοῦ, ἔσεται μικροτέρα καὶ ἀντιστρόφως.

288. *Ἐφαρμογαί.* Δεδόσθω ὅτι ἡ ἀκτὶς ἐμπλεκτικοῦ τροχοῦ ἐστὶ 12^{ὑφεκ.} καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων αὐτοῦ 75. Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀδόντων τοῦ δευτέρου τροχοῦ, οὗτινος ἡ ἀκτὶς ἐστὶν 8^{ὑφ.}

Ἐκ τῆς ἀναλογίας (1) εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων τοῦ δευτέρου τροχοῦ υ, ἤτοι $\nu = \frac{N\rho}{P} = \frac{75 \times 8}{12} = 50$.

β΄. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα ἐμπλεκτικοῦ τινος τροχοῦ 50 ὀδόντων,

ἐμπλεκομένου μεθ' ἑτέρου τοιούτου 75 ὀδόντων καὶ $12^{\text{ὑφ.}}$ ἀκτῖνος.

Ἡ αὐτὴ ἀναλογία δίδει τὴν ζητουμένην ἀκτῖνα.

$$\rho=\frac{P\times\nu}{N}=\frac{12\times50}{75}=8^{\text{ὑφ.}}$$

γ'. Τροχός τις $20^{\text{ὑφ.}}$ ἀκτῖνος ἐκτελεῖ 25 περιστροφὰς κατὰ λεπτόν. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα δευτέρου τροχοῦ, ἐκτελοῦντος 60 περιστροφὰς ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ.

Ἡ πρώτη τῶν ἀναλογιῶν τούτων (2) δίδει τὴν ζητουμένην ἀκτῖνα.

$$\rho=\frac{\upsilon\times P}{\Upsilon}=\frac{25\times20}{60}=8,33.^{\text{ὑφεκ.}}$$

δ'. Τροχός τις ἀκτῖνος $20^{\text{ὑφ.}}$ ἐκτελεῖ κατὰ λεπτὸν 25 περιστροστροφάς. Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν τῶν περιστροφῶν ἃς θέλει ἐκτελέσει ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι τροχὸς ἀκτῖνος 8,33.

Ἐκ τῆς ἰδίας ἀναλογίας εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν

$$\upsilon=\frac{\Upsilon\times P}{\rho}=\frac{25\times20}{0,33}=60.$$

Οἱ αὐτοὶ τύποι ἤθελον ὑπάρξει ἂν ἀντὶ τῶν ἀκτίνων, ἐδίδοντο αἱ διάμετροι ἢ αἱ περιφέρειαι τῶν τροχῶν, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ἀκτῖνος ἤθελεν ἀντικατασταθῇ δι' ἐκείνης τῆς ἀνταποκρινομένης διαμέτρου ἢ περιφερείας. Οὕτω θετέον ὅτι ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι, ἀντὶ ἀκτῖνος $20^{\text{ὑφ.}}$ ἐδίδετο ἡ διάμετρος τοῦ πρώτου τροχοῦ $40^{\text{ὑφ.}}$ καὶ ἡ τοῦ δευτέρου ὁμοίως 16,66, ὁ τύπος ἤθελεν εἶσθαι ὁ αὐτὸς, ἤτοι $\upsilon=\frac{40\times25}{16\ 66}=60$.

Ἐπίσης ἀντὶ τῶν διαμέτρων ἠδύναντο νὰ δοθῶσιν αἱ περιφέρειαι.

Ἔστω ἡ περιφέρεια τοῦ πρώτου τροχοῦ $125,60^{\text{ὑφ.}}$ καὶ ἡ τοῦ δευτέρου 52,31, ὁ τύπος ἤθελεν εἶσθαι $\upsilon=\frac{125,60\times25}{52,31}=60$.

Ὅθεν τὸ ἀποτέλεσμα δὲν μεταβάλλεται διδομένων τῶν ἀκτίνων, τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν περιφερειῶν, οἱ δὲ τύποι ἐφαρμόζονται πρὸς εὕρεσιν τῆς τετάρτης τῶν τριῶν δεδομένων ποσοτήτων τούτων.

289. Τὰ προβλήματα ταῦτα ἀνάγονται μόνον εἰς τὰς διαστάσεις καὶ ταχυτήτας δύο μόνον τροχῶν, ὁπόταν ὅμως πλεῖστα συστήματα τοιούτων μεταδίδουσι τὴν κίνησιν ἄξονός τινος εἰς ἕτερον, δέον τότε πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τῶν διαφόρων τροχῶν, νὰ εἰσέλθωσιν ὡς παράγοντες εἰς τοὺς τύπους (249).

290. Γνωστῆς οὔσης τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων δύο παραλλήλων ἀξόνων, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιστροφῶν ἃς ἕκαστος θέλει ἐκτελέσει ἐν ὁρισμένῳ χρόνῳ, προσδιορίζονται γεωμετρικῶς αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐμπλεκτικῶν τροχῶν, αἵτινες παρέχουσι τὴν δεδομένην ταχύτητα ὡς ἑξῆς.

Διαιρεῖται ἡ δοθεῖσα ἀπόστασις εἰς τοσαῦτα ἴσα μέρη ὅσας μονάδας ἐμπεριέχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων. Ὡς ἀκτὶς τοῦ μικροτέρου τροχοῦ λαμβάνεται ἀριθμὸς διαιρέσεων, ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐν τῇ μικροτέρᾳ ταχύτητι μονάδων, ὡς ἀκτῖς δὲ τοῦ μεγαλειτέρου τροχοῦ, ὁ ἐπίλοιπος ἀριθμὸς τῶν διαιρέσεων.

Ἐκ δύο παραλλήλων ἀξόνων Α καὶ Β (Σχ. 185), ὁ μὲν δέον νὰ ἐκτελῇ 6 περιστροφὰς ἐν ᾧ χρόνῳ ὁ δεύτερος 4· ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν ἐστὶ 16 ὑφεκ. Εὑρεῖν τὰς ἀκτίνας τῶν τροχῶν αἵτινες θέλουσι παράξει τοιαύτην ταχύτητα.

Κατὰ τὸν κανόνα διαιρετέον τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων εἰς $6+4=10$ ἴσα μέρη, ὁπότε τὸ μῆκος 4 τῶν μερῶν τούτων, ἐστὶν ἡ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ τοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Α, τὸ δὲ μῆκος τῶν ἑτέρων 6 τοιούτων, ἐστὶν ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἄξονος τροχοῦ.

Τὰ λεχθέντα ἐπὶ τῶν ἐμπλεκτικῶν τροχῶν, ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τῶν τροχαλιῶν καὶ τυμπάνων, καθ' ὅσον ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀδόντων εἰς τοὺς τύπους δύνανται νὰ εἰσαχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες, αἱ διάμετροι, ἢ καὶ αἱ περιφέρειαι.

291. Τὸ μεταξὺ τῶν ὀδόντων τῶν ἐμπλεκτικῶν τροχῶν διάστημα, ἐστὶν ἴσον μὲ τὸ πάχος τῶν ὀδόντων, αὐξηνθὲν εἰ μὲν οἱ τροχοὶ εἰσὶ μετάλλινοι, κατὰ τὸ $\frac{1}{10}$—$\frac{1}{20}$ τοῦ πάχους τούτου, εἰ δὲ ξύλινοι κατὰ τὸ $\frac{1}{6}$—$\frac{1}{20}$ τοῦ ἰδίου πάχους. Πρὸς ἐλάττωσιν τῆς τριβῆς τῶν ἐμπλέξεων, κατασκευάζονται αἱ εἰς ἐπαφὴν ἐρχόμεναι ἐπιφάνειαι κυρταί. Ἡ συνήθως διδομένη κυρτότης διαγράφεται ὑπὸ τόξου, οὗ τὸ μὲν κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς τοῦ τροχοῦ περιφερείας, ἡ δὲ ἀκτὶς ἐστὶ τὸ διάστημα μεταξὺ τῶν ἀξόνων δύο παρακειμένων ὀδόντων, ὅπερ καλεῖται *καμπὴ τῆς ἐμπλέξεως*, καὶ ὅπερ ἄλλως ἐστὶ τὸ πάχος ἑνὸς ὀδόντος, καὶ τὸ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ παρακειμένου τούτου κενόν.

Τὸ (Σχ. 186) δεικνύει τὸν τρόπον τῆς διαγραφῆς τῶν ἐμπλεκτικῶν τροχῶν. Αἱ περιφέρειαι τῆς ἐπαφῆς αἱ διαγραφεῖσαι μὲ

ἀκτίνας ΟΤ καὶ Ο'Τ, καλοῦνται *ἀρχικαὶ περιφέρειαι*. Αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν τούτων εἰσὶν αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐμπλεκτικῶν τροχῶν. Τγ καὶ Τγ' εἰσὶν αἱ καμπαὶ τῆς ἐμπλέξεως, αἵτινες μετροῦνται ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν περιφερειῶν. Ἐπίσης ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τούτων ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις τῶν ὀδόντων, καὶ μετρᾶται τὸ πάχος αὐτῶν. Ἡ ἀρχικὴ περιφέρεια ἐμπλεκτικοῦ τροχοῦ, εὑρίσκεται εἰς τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ ὕψους τοῦ ὀδόντος.

Γνωστῆς οὔσης τῆς καμπῆς δύο ἐμπλεκτικῶν τροχῶν, ἥτις εἰς δύο τοιούτους εἰς ἐπαφὴν δέον νὰ ᾖ ἀμετάβλητος, μετρουμένη ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν περιφερειῶν, προσδιορίζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων τοῦ ἑνὸς τῶν τροχῶν ἐκ τοῦ τύπου $N = \frac{2\pi P}{\Pi}$, ἐν ᾧ Ν παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀδόντων, Ρ τὴν ἀκτίνα τοῦ τροχοῦ, καὶ Π τὴν καμπὴν τῆς ἐμπλέξεως.

Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀδόντων τροχοῦ ἀκτῖνος 34 ὑφ. καὶ οὔτινος ἡ καμπὴ ἐστὶ 4 ὑφ. Κατὰ τὸν τύπον ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων ὡς ἐπίσης καὶ τῶν κενῶν ἔσεται $N = \frac{2 \times 3{,}14 \times 0{,}34}{0{,}04} = 53$.

292. Γνωστῆς οὔσης τῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ ἄξονος ταχύτητος τροχοῦ τινος ἢ τροχαλίας, ἡ ἐν τῇ περιφερείᾳ ταχύτης εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζεται ἡ ἀνάπτυξις τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸν κατὰ λεπτὸν ἀριθμὸν τῶν περιστροφῶν τοῦ ἄξονος, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐκφράζει τὸ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διανυθὲν διάστημα, ὅπερ διαιρούμενον δι' 60, δίδει τὴν κατὰ δευτερόλεπτον ἐν τῇ περιφερείᾳ ταχύτητα.

Ἔστω τροχὸς 1,33 διαμέτρου, ἐπὶ ἄξονος ἐκτελοῦντος 20 περιστροφὰς κατὰ λεπτόν. Εὑρεθήτω ἡ ἐν τῇ περιφερείᾳ ταχύτης.

Ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ ἐστὶν $1{,}33 \times 3{,}1416 = 4{,}176$.

Τὸ διανυθὲν κατὰ λεπτὸν διάστημα $4{,}176 \times 20 = 83{,}60$.

Ἡ δὲ ἐν τῇ περιφερείᾳ κατὰ δευτερόλεπτον ταχύτης $\frac{83{,}60}{60} = 1{,}39$.

293. Γνωστῆς οὔσης τῆς ἐν τῇ περιφερείᾳ ταχύτητος τροχοῦ τινος, προσδιορίζεται ἡ κεντρικὴ ταχύτης, διαιρουμένης τῆς ἐν τῇ περιφερείᾳ ταχύτητος διὰ τῆς ἀναπτύξεως τοῦ τροχοῦ.

Ἡ ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι ταχύτης ἐν τῇ περιφερείᾳ 1,39, διαιρουμένη διὰ τῆς περιφερείας 4,17 ἤτοι $\frac{1{,}39}{4{,}17} = 0{,}33$, δίδει

τὴν ἐν τῷ κέντρῳ ταχύτητα, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 60, δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν κατὰ λεπτὸν περιστροφῶν $0,33 \times 60 = 20$.

294. Ὁπόταν πλεῖστοι τροχοὶ ἢ τροχαλίαι, κῆνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, γνωστῆς οὔσης τῆς ταχύτητος ἐν τῷ κέντρῳ τοῦ ἄξονος τούτου, εὑρίσκεται ἡ ἐν τῇ περιφερείᾳ ταχύτης ἑκάστου τούτων, διὰ τοῦ διαδοχικοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ἀναπτύξεως τῆς περιφερείας ἑκάστου τροχοῦ, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν κατὰ λεπτὸν περιστροφῶν τοῦ ἄξονος· ἕκαστον δὲ γινόμενον διαιρεῖται διὰ 60.

295. Ἡ κυριωτέρα διάστασις ἐμπλεκτικοῦ τινος τροχοῦ ἥτις δέον νὰ προσδιορισθῇ, ἐστὶν ἡ καμπὴ τῆς ἐμπλέξεως, ἥτις ἐν καλῶς κατασκευασθέντι ἐμπλεκτικῷ τροχῷ, ἰσοῦται μὲ 2,10 φορὰς τὸ πάχος τοῦ ὀδόντος. Πλὴν πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ πάχους τῶν ὀδόντων τροχοῦ τινος, δέον νὰ γνωσθῇ ἡ δύναμις ἢ ἡ θλίψις ἣν ἕκαστος τούτων θέλει διαδοχικῶς ὑποστῇ.

Ἡ θλίψις ἣν ὑφίσταται ἐμπλεκτικός τις τροχὸς, κατὰ τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ περιφέρειαν, εὑρίσκεται τῇ διαιρέσει τῆς εἰς χιλιογραμμόμετρα ποσότητας τοῦ ἔργου (211) ἣν κέκτηται ἢ μεταδίδει, διὰ τῆς ἐν τῇ ἰδίᾳ ἀρχικῇ περιφερείᾳ ταχύτητος.

Ἐμπλεκτικὸς τροχὸς πρόκειται νὰ μεταδώσῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ περιφέρειαν $2,00^{\mu}$ ἀκτῖνος, ποσότητα ἔργου $500^{\chi.\mu.}$ ἐκτελῶν 10 περιστροφὰς κατὰ λεπτόν. Ζητεῖται ἡ ἐπὶ τοῦ ὀδόντος αὐτοῦ θλίψις.

Ἡ κατὰ τὴν ἀρχικὴν περιφέρειαν ταχύτης τοῦ τροχοῦ κατὰ δευτερόλεπτον ἐστὶ (294) $\Upsilon = \frac{2 \times 3{,}14 \times 2{,}00 \times 10}{60} = 2{,}09$.
Ἡ δ' ἐπὶ τοῦ ὀδόντος θλίψις κατὰ τ' ἀνωτέρω ἔσεται

$$\Phi = \frac{500}{2{,}09} = 239.^{\chi\iota\lambda.\mu.}$$

Γνωστῆς οὔσης τῆς ἐπὶ τοῦ ὀδόντος θλίψεως σιδηροῦ τινος ἐμπλεκτικοῦ τροχοῦ, εὑρίσκεται τὸ πάχος τοῦ ὀδόντος τούτου διὰ τοῦ ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐξαχθέντος τύπου $\Pi = 0{,}105\sqrt{\Phi}$, ἐν ᾧ 0,105 ἐστὶ σταθερὸς πολλαπλασιαστὴς διὰ τὸν χυτοσίδηρον, Φ δὲ ἡ ἐπὶ τοῦ ὀδόντος θλίψις.

Ὅθεν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἔνθα $\Phi = 239,^{\chi\iota\lambda.}$ τὸ πάχος τοῦ ὀδόντος ἔσεται $\Pi = 0{,}105\sqrt{239} = 1{,}62$ ὑφ. ἡ δὲ καμπὴ τῆς ἐμπλέξεως $2{,}1 \times 1{,}62 = 3{,}40$.

Ἐν τοῖς μεγίστης ταχύτητος ἐμπλεκτικοῖς τροχοῖς, ἡ ἔμπλεξις δύναται νὰ ᾖ λεπτοτάτη καὶ ἡ καμπὴ 25 ἢ 26 ὑποχιλ.

Τὸ πλάτος κατὰ τὴν ἔννοιαν πάντοτε τοῦ σώτρου, ἰσοῦται μὲ 5κις ἢ 6κις τὸ πάχος τοῦ ὀδόντος Π.

Διὰ ξυλίνην ἔμπλεξιν ὁ τύπος τοῦ πάχους τοῦ ὀδόντος ἐστὶ $Π=0,145\sqrt{Φ}$, ἢ τὸ διὰ χυτοσιδηροῦν ὀδόντα αὐξηνθὲν κατὰ τὸ τρίτον, τουτέστιν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ πάχος θὰ ἦτο $1,62+\frac{162}{3}=2,16$ ὑφ. ἡ δὲ καμπὴ τῆς ἐμπλέξεως $2,1\times2,16=4,53$.

296. Αἱ κυριώτεραι διαστάσεις ἐμπλεκτικοῦ τροχοῦ ἐξάγονται ἐκ τοῦ πάχους τοῦ ὀδόντος. Οὕτω τὸ ὕψος αὐτοῦ μετρούμενον ἐπὶ τῆς παρατάσεως τῆς ἀκτῖνος, ἰσοῦται τῷ πάχει ἐπαυξηνθέντι κατὰ τὸ τρίτον. Δύο ἐμπλεκτικῶν τροχῶν τὸ τοιοῦτον ὕψος προσδιορίζεται πειραματικῶς, ἀγομένων δύο ὀδόντων ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν κέντρων, καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ ὑπερβάλλοντος τὴν ἐπαφὴν μέρους τῶν δύο παρακειμένων τοιούτων.

Τὸ πάχος τοῦ σώτρου ἢ δακτυλίου κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς ἀκτῖνος τοῦ τροχοῦ, ἰσοῦται τῷ πάχει τῶν ὀδόντων.

Τῇ ἐφαρμογῇ τούτων ἐπὶ ἐμπλεκτικοῦ χυτοσιδηροῦ τροχοῦ οὗ τὸ πάχος τῶν ὀδόντων εὑρέθη 20 ὑποχιλ. προκύπτει ὅτι τὸ πάχος τοῦ ὀδόντος διὰ ταχύτητα εἰς τὴν περιφέρειαν 1,40, ἔσεται $20\times4=80$ χιλ. Τὸ ὕψος τοῦ ὀδόντος $20+\frac{20}{3}=26,6$, τὸ πάχος τοῦ σώτρου ἐπίσης 20,χιλ. καὶ ἡ καμπὴ τῆς ἐμπλέξεως $20\times2,1=42$ χιλ.

297. Τὸ πλάτος τῶν βραχιόνων τῶν χυτοσιδηρῶν ἐμπλεκτικῶν τροχῶν παρὰ τῇ πλήμνῃ, εὑρίσκεται διὰ τοῦ ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐξαχθέντος γενικοῦ τύπου $αβ^2=\frac{ΦΜ}{125}$, ἐν ᾧ α παριστᾷ τὸ σταθερὸν πάχος τοῦ βραχίονος, β τὸ πάχος ὅπερ ἄγεται εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ ἀπὸ τῆς πλήμνης μέχρι τοῦ σώτρου τοῦ τροχοῦ, συνήθως δὲ κατασκευάζεται τὸ $β=5,5α$. Φ ἐστὶν ἡ θλίψις καὶ Μ τὸ μῆκος τοῦ βραχίονος εἰς ἑκατοστά.

298. Πρὸς ἀποφυγὴν τοῦ κρότου εἰς τὰ πλεῖστα τῶν ἐργοστασίων, μεταχειρίζονται ἐμπλέξεις μὲ σιδηροῦς ὀδόντας εἰς ἐπαφὴν μετὰ ξυλίνων τοιούτων. Ἡ τριβὴ ἐστὶν ὀλιγωτέρα ἐν τοιαύτῃ περι-

πτώσει, καὶ ἡ πεῖρα ἀπέδειξεν ὅτι ἡ φθορὰ ἐστὶν ἡ αὐτὴ ἔν τε τοῖς σιδηροῖς καὶ ξυλίνοις σωλῆσιν.

299. Ὅτι ἐλέχθη ἐπὶ τῆς περιστροφῆς δύο εἰς ἐπαφὴν κυλίνδρων (287), ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν περιστροφικὴν κίνησιν δύο ἐφαπτομένων κατὰ γεννήτριάν τινα κώνων, ἑπομένως καὶ εἰς τοὺς κωνικοὺς ἐμπλεκτικοὺς τροχούς (285).

Ὅθεν ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἢ αἱ τομαὶ δύο ἐφαπτομένων κώνων ΟΜ καὶ Ο'Μ (Σχ. 187) ἐφάπτονται, μὴ κείμεναι ὅμως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, περιστρέφονται ὡς οἱ κυλινδρικοὶ ἐμπλεκτικοὶ τροχοί, εἰς τρόπον ὥστε πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν νὰ ἐφάπτονται διαδοχικῶς, αἱ ταχύτητες αὐτῶν αἵτινες ἔσονται καὶ αἱ τῶν κώνων, ἔσονται εἰς ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀκτίνων ΟΜ καὶ Ο'Μ.

Ἐπειδὴ συνήθως ἡ θλίψις ἐστὶν ἀνεπαρκὴς πρὸς μετάδοσιν τῆς κινήσεως εἰς τὸν δεύτερον κῶνον, γίνεται χρῆσις τρίτου ἐνδιαμέσου ὡς εἰς τοὺς κυλινδρικοὺς τροχούς.

300. Οἱ ἐμπλεκτικοὶ τροχοὶ χρησιμεύουσι πρὸς μετάδοσιν κυκλικῆς κινήσεως διὰ κυκλικῆς ἐπίσης κινήσεως, πλὴν δύνανται νὰ μεταδόσωσι καὶ εὐθύγραμμον τοιαύτην. Πρὸς τοῦτο ὁ εἷς τῶν τροχῶν ἀντικαθίσταται διὰ κανόνος ἐμπλεκτικοῦ φέροντος τοὺς ὀδόντας, οἵτινες τίθενται εἰς κίνησιν διὰ τοῦ ἐμπλεκτικοῦ τροχοῦ. Ἐφαρμογὴν τούτου παρέχει ἡ Κρέξ. (252).

301. Ἡ μετάδοσις περιστροφικῆς κινήσεως εἰς ἄξονά τινα σχηματίζοντα γωνίαν μετὰ τοῦ περιστρεφομένου, ἐκτελεῖται διὰ τῶν ἐμπλεκτικῶν τροχῶν κεκλιμένων ἐμπλεκτικοτήτων. Τὸ (Σχ. 188) παριστᾷ σύστημα τοιούτων τροχῶν, δι' οὗ μεταδίδεται ἡ κίνησις ἄξονός τινος εἰς ἕτερον κάθετον αὐτῷ. Ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς μεταδόσεως τῶν δυνάμεων ἐφαρμόζονται πάντα τὰ ῥηθέντα ἐπὶ τῶν ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων ἐμπλεκτικῶν τροχῶν.

Συνήθως ὁ μικρότερος ἐμπλεκτικὸς τροχὸς ἄξονός τινος, κατασκευάζεται δι' ὀρθίων στυλίσκων (Σχ. 189) ὅπερ παρέχει μείζονα ἐνέργειαν εἰς τὴν κίνησιν.

Ὁ οὕτω κατασκευαζόμενος ἐμπλεκτικὸς τροχὸς λαμβάνει τ' ὄνομα *φανός*.

302. *Πασσαλοπήκτης*. Οὗτος χρησιμεύει πρὸς ἔμπηξιν μεγάλων πάλλων ἐν τῇ γῇ. Ἀποτελεῖται ἐξ ἁπλῆς ἀμεταθέτου τροχα-

λίας, ἐκ πλειόνων τροχαλιῶν, ἐκ συνδυασμοῦ ἐξελίκτρου καὶ τροχαλίας, ἐνίοτε δὲ εἰς τὸν συνδυασμὸν τοῦτον εἰσέρχονται καὶ οἱ ἐμπλεκτικοὶ τροχοί. Ὁ ἁπλούστερος πασσαλοπήκτης ἐστὶν ὁ παριστανόμενος ἐν τῷ (Σχ. 190) καὶ καλούμενος *πασσαλοπήκτης ἀνολκεύς*. Βαρυτυπὶς Α ἐκ χυτοσιδήρου, κρέμαται εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου διερχομένου διὰ τροχαλίας Β, καὶ ὅπερ εἰς τὸ ἕτερον μέρος κρέμαται διακλαδιζόμενον εἰς πλεῖστα σχοινία. Διὰ τῶν σχοινίων τούτων, ἐργάται ἀνυψοῦσι τὴν βαρυτυπίδα, καὶ ἀνυψωθεῖσαν ἀφίνουσι νὰ καταπέσῃ διὰ τοῦ βάρους αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐμπηχθησομένου πάλλου Δ, ἐφ' οὗ πίπτει διευθυνομένη διὰ δύο κατακορύφων στύλων ΓΓ, φερόντων κατακορύφους ῥαβδώσεις ἐντὸς τῶν ὁποίων κινοῦνται ἀνὰ δύο ὠτία, ἀνὰ ἓν ἑκατέρωθεν ἐπὶ τῆς βαρυτυπίδος. Ἐπὶ τῆς κεφαλῆς τοῦ πάλλου τίθεται σιδηρὰ στεφάνη κωλύουσα τὴν καταστροφὴν αὐτοῦ.

Ὁ πασσαλοπήκτης οὗτος ἔχει τὸ ἀτόπημα, ὅτι δέον ἡ βαρυτυπὶς νὰ ἦναι μεγάλου βάρους ὡς μὴ δυναμένης νὰ ἀνυψωθῇ εἰς μέγα ὕψος,

303. *Γεράνιον*. Τοῦτο χρησιμεύει πρὸς ἀνύψωσιν μεγάλων βάρεων, καὶ σύγκειται ἐξ ἐξελίκτρου καὶ τροχαλιῶν. Σχοινίον φέρον τὸ πρὸς ἀνύψωσιν βάρος, περιβάλλει τροχαλίαν, καὶ περιτυλίσσεται διὰ τοῦ ἑτέρου ἄκρου ἐπὶ ἐξελίκτρου. Προσέτι δὲ τὸ παρασκεύασμα δύναται νὰ περιστραφῇ πέριξ κατακορύφου ἄξονος, εἰς τρόπον ὥστε ὁπόταν τὸ βάρος ἀνυψωθῇ εἰς ἀνάλογον ὕψος, δύναται νὰ μετακινηθῇ ὁριζοντείως διὰ τῆς στροφῆς τοῦ γερανίου. Τὸ (Σχ. 191) παριστὰ ἓν τῶν νεωτάτων γερανίων τῶν προκυμαιῶν. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τὸ παρασκεύασμα στηρίζεται ἐπὶ ἁμαξίου ἕνεκα τῆς εὐκολίας τῆς μεταφορᾶς. Τὰ τελευταῖα γεράνια ἐνεργοῦσι δια μικρᾶς ἐπὶ τοῦ ἁμαξίου αὐτῶν ἀτμομηχανῆς.

304. *Κοχλίας ἀτέρμων*. Ἡ ἔμπλεξις τῆς ἕλικος κοχλίου μετὰ τῶν ὀδόντων ἐμπλεκτικοῦ τροχοῦ, προξενεῖ τὴν περιστροφὴν τούτου, ἥτις διαρκεῖ ἐνόσῳ περιστρέφεται ὁ κοχλίας.

Τὸ παρασκεύασμα τοῦτο (Σχ. 193) καλεῖται κοχλίας ἀτέρμων, χρησιμεύει δὲ ἵνα προξενήσει ἐλαχίστην κίνησιν, διότι ἑκάστη περιστροφὴ τοῦ κοχλίου, περιστρέφει τὸν τροχὸν μόνον κατὰ ἕνα ὀδόντα. Ἡ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ ὑπολογίζεται οὕτως ὥστε νὰ ἐκτελῇ μίαν περι-

στροφήν, διὰ δεδομένον ἀριθμὸν περιστροφῶν τοῦ κοχλίου. Ἐὰν N ἐστὶν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν τοῦ κοχλίου δι' ἑκάστην περιστροφὴν τοῦ τροχοῦ, καὶ K ἡ καμπὴ τῆς ἐμπλέξεως, ἡ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ δίδεται διὰ τοῦ τύπου $P = \frac{N \times K}{2 \times 3,14}$.

Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης τοῦ παράγειν ἐλαχίστην κίνησιν, ὁ ἀτέρμων κοχλίας ἐφαρμόζεται ἐπὶ πάντων σχεδὸν τῶν ὀργάνων τῆς μαθηματικῆς, ὀπτικῆς, ἀστρονομίας κ.λ.

305. *Ἐμψυχοκίνητον*. Ἡ ὀνομασία αὕτη ἐφαρμόζεται εἰς πᾶσαν μηχανὴν διὰ ζωϊκῆς δυνάμεως κινουμένην, ὡς ἡ κίνησις στροφάλου διὰ χειρὸς ἐστὶν ἐμψυχοκίνητον, ἰδίως ὅμως ἡ ὀνομασία αὕτη δίδεται εἰς μηχανήν τινα κινουμένην δι' ἵππου. Ἐν τῇ μηχανῇ ταύτῃ ὁ ἵππος ζεύγνυται πρὸς ῥυμὸν προσκεκολλημένον ἐπὶ κατακορύφου ἄξονος, βαδίζων δὲ μεταδίδει εἰς τὸν ἄξονα τοῦτον περιστροφικὴν κίνησιν, ἥτις δύναται νὰ μεταδοθῇ εἰς πᾶν εἶδος μηχανῆς. Ὅθεν τὸ ἐμψυχοκίνητον ἐστὶ διὰ τὸν ἵππον, ὅτι ὁ στρόφαλος διὰ τὸν ἄνθρωπον. Ἵππος ἐργαζόμενος ἐπὶ ἐμψυχοκινήτου παράγει ὀλιγώτερον ἔργον ἑτέρου σύροντος τροχοφόρον, κοπιᾷ ὅμως ταχύτερον. Ἵνα μὴ στενοχωρεῖται πολὺ ὁ ἵππος, δέον ἡ διάμετρος τοῦ ἐμψυχοκινήτου νὰ ᾖ τοὐλάχιστον $13^{m},00$. Τῇ συγκρίσει τῆς ποσότητος τοῦ ἔργου τοῦ παραγομένου δι' ἵππου ἐργαζομένου ἐπὶ ἐμψυχοκινήτου, πρὸς τὸ παραγόμενον ὑπ' ἀνδρὸς ἐνεργοῦντος ἐπὶ στροφάλου, προκύπτει ὅτι τὸ τοῦ ἵππου ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ἔργον 7 ἀνδρῶν.

Ἡ διάταξις τοῦ ἐμψυχοκινήτου καταδείκνυται ἐν τῷ σχήματι 193, δύναται δὲ νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ κίνησις αὕτη πρὸς κίνησιν παντὸς εἴδους μηχανῆς, διὰ τῆς καταλλήλου διαθέσεως ἐμπλεκτικῶν τροχῶν. Ἐν Ἑλλάδι τὸ ἐμψυχοκίνητον ἐστὶν ἐν μεγίστῃ χρήσει, ἐκτὸς ἄλλων εἰς τὰ ἐλαιοτριβεῖα καὶ πρὸς κίνησιν τῶν φρεατοτυπάνων, ὁπότε καλεῖται κοινῶς μαγγανοπήγαδον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'.

ΜΗΧΑΝΑΙ ΑΝΥΨΩΣΕΩΣ ΥΔΑΤΟΣ.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ῥευστῶν. — Ὑδραυλικαὶ ἀντλίαι. — Ὑδραυλικαὶ μηχαναὶ ἀρδευτικαί. — Σίφων. — Ἕλιξ Ἀρχιμήδους. — Ὑδραυλικὸν πιεστήριον.

306. Τὰ σώματα πάντα ἀνάγονται εἰς τρεῖς τάξεις, στερεά, ὑγρά, καὶ ἀέρια (187). Τὰ δύο τελευταῖα καλοῦνται ὁμοῦ ῥευστά.

Τὰ ὑγρὰ ὀλίγον μόνον ἐνδίδουσιν εἰς τὴν πίεσιν, δι' ὃ ἐκλήθησαν καὶ ἀκαταπίεστα, ἀπ' ἐναντίας ὅμως τὰ ἀέρια εἰσὶ λίαν πιεστά, ἕνεκα τῆς μεγάλης αὐτῶν ἐλαστικότητος (275). Παυσάσης τῆς ἐπὶ τῶν ῥευστῶν πιέσεως, ἀναλαμβάνουσι ταῦτα τὸν ἀρχικὸν αὐτῶν ὄγκον. Τὰ ὑγρὰ διαφέρουσι τῶν ἀερίων, καθ' ὅσον στεροῦνται τῆς ἰδιότητος τοῦ ἐλευθέρως ἐκτείνεσθαι, ἐνῷ τὰ ἀέρια κέκτηνται τῆς ἰδιότητος τοῦ διαστέλλεσθαι εἰς τρόπον ὥστε νὰ πληρῶσι πάντα κενὸν χῶρον.

307. Σώματά τινα δύνανται νὰ ὑπάρξωσι καὶ ὑπὸ τὰς τρεῖς μορφάς, στερεάν, ὑγρὰν καὶ ἀερώδη. Οὕτω τὸ ὕδωρ δύναται νὰ ᾖ στερεόν, ἤτοι πάγος, ὑγρόν, ἢ ἀερῶδες ἤτοι ἀτμός.

Ὁ βαθμὸς τῆς θερμοκρασίας δίδει εἰς τὸ ὕδωρ τὰς διαφόρους ταύτας μορφάς.

308. Ῥευστόν τι πιεζόμενον ἐντὸς κεκλεισμένου ἀγγείου, μεταδίδει οἱονδήποτε καὶ ἂν ᾖ τὸ σχῆμα τούτου, τὴν θλίψιν ὁμοιειδῶς καὶ καθ' ὅλας τὰς ἐννοίας ἐπὶ τῶν παρειῶν τοῦ ἀγγείου.

Ἡ ἀρχὴ αὕτη ἐφ' ἧς ἐρείδεται ἡ κατασκευὴ τῶν ὑδραυλικῶν πιεστηρίων, ἀποδεικνύεται τῇ πληρώσει ἀγγείου ὕδατος, καὶ τῇ ἐφαρμογῇ δύο ἐμβολέων ἐπὶ δύο αὐτοῦ ὀπῶν. Πιεζομένου τοῦ ἑνὸς τούτων, ἡ πίεσις μεταδίδεται διὰ τοῦ ῥευστοῦ εἰς τὸν ἕτερον, κατὰ λόγον τῆς ἐπιφανείας τῶν ἐμβολέων.

309. Ῥευστοῦ τινος ἐν ἠρεμίᾳ εὑρισκομένου, καὶ μὴ ὑποκειμένου εἰς οὐδεμίαν ἄλλην ἐξωτερικὴν δύναμιν ἐκτὸς τοῦ βάρους του, κατακόρυφος πρισματικὴ στήλη τοῦ ῥευστοῦ, ἔχουσα τὴν βάσιν αὐτῆς ἐὰν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἠρεμοῦντος ῥευστοῦ, ἐπιφέρει ἐπὶ τῆς κατωτέρας βάσεως τούτου, θλίψιν ἴσην μὲ τὸ βάρος τῆς στήλης,

καὶ γενικῶς ἡ θλίψις ἐπὶ ὁριζοντείου τινος διατομῆς τῆς ςήλης ταύτης, ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τῆς ἄνωθεν τῆς διατομῆς στήλης. Οὕτως ἡ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρας βάσεως τῆς ςήλης θλίψις ἐςὶ μηδέν, ἐπαυξάνει δ' αὕτη δι' ἑκάστην ὁριζόντειον διατομήν, ἀναλόγως τοῦ βάθους τῆς κάτωθεν τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τοῦ ῥευστοῦ διατομῆς. Ἕνεκα τῆς ὑπαρχούσης εἰς ἅπαντα τὰ μέρη τοῦ ὑγροῦ ἰσοῤῥοπίας, καὶ τῆς προξενουμένης θλίψεως ὑπὸ πρισματικῆς στήλης ἐπὶ ὁριζοντείου τινος διατομῆς μεταδιδομένης πανταχόθεν, προκύπτει ὅτι ἡ θλίψις ἐστὶ σταθερὰ ἐφ' ὅλων τῶν ἀτόμων ὁριζοντείου τινος διατομῆς τοῦ ὑγροῦ, καὶ ὅτι μεταδίδεται ὁμοιομόρφως εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ὑπὸ τῆς διατομῆς συναντήσεως τῶν παρειῶν τοῦ ἀγγείου.

310. Ἡ ἐπὶ ἑκάστης μονάδος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ ἀγγείου θλίψις, μετρᾶται ὑπὸ στήλης ὑγροῦ ἐχούσης βάσιν μὲν τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας, ὕψος δὲ τὸ καθέτως μετρούμενον βάθος ἀπὸ τῆς ἄνω ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ μέχρι τῆς δατομῆς. Ἡ ἐφ' ἑκάστης ὁριζοντείου διατομῆς τοῦ ὑγροῦ καὶ τῶν παρειῶν τοῦ ἀγγείου θλίψις, ἐςὶν ὅλως ἀνεξάρτητος τῆς μορφῆς τούτου, ἀλλ' ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ καθέτου βάθους τῆς διατομῆς ἀπὸ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Τούτου ἕνεκα ἰσχυρὸς σωλὴν πλήρης ὕδατος, εἰς ὃν ἐφαρμόζεται ἕτερος κάθετος λεπτότατος πλήρης ἐπίσης, διαῤῥηγνύεται.

311. Ἕνεκα τῆς ἐξίσου πανταχόθεν ἐνεργείας τῆς θλίψεως τῶν ὑγρῶν προκύπτει ὅτι, ὑγροῦ τινος ἠρεμοῦντος ἐν ἀνοικτῷ ἀγγείῳ ἡ ἐπιφάνειά ἐστιν ὁριζόντειος.

Ὑγρὸν τιθέμενον ἐντὸς συγκοινωνούντων ἀγγείων, φθάνει πανταχόθεν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἐὰν ὅμως ἐντὸς δύο συγκοινωνούντων ἀγγείων τεθῇ διάφορον ἐν ἑκάστῳ ὑγρόν, τὸ ὕψος εἰς ὃ ἕκαστον θέλει φθάσει, ἐστὶν ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς πυκνότητος τῶν δύο ὑγρῶν.

312. Ὁ ἀὴρ ἔχει βάρος, προσέτι δὲ καὶ τὴν ἰδιότητα ἵνα τείνῃ πάντοτε ὅπως καθέξει χῶρον μεγαλείτερον. Ἡ ὑπ' αὐτοῦ ἐπιφερομένη θλίψις ἐστὶν ὡς ἡ τῶν ὑγρῶν ὁμοιόμορφος πανταχόθεν. Ἡ θλίψις αὕτη ἀναγομένη εἰς τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας, ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐντὸς κατακορύφου κυλίνδρου περιεχομένου ἀέρος, ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν μονάδα ταύτην τῆς ἐπιφανείας, ὕψος δὲ τὸ

ρεότης τοῦ ἱεροῦ, ὅπερ συνίσταται ἀπὸ ἡμικύλινδρον καὶ ἐπ αὐτοῦ τεταρτοσφαίριον. Ἡ στερεότης τῆς τοιχοποιΐας τοῦ ἡμικυλίνδρου, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἡμικυλίνδρου ἀκτῖνος 2,80 καὶ τοῦ ἰσοϋψοῦς αὐτοῦ ἀκτῖνος 2,00, ἤτοι $\frac{2\times3,14\times2,80\times4,00}{2}$ — $\frac{2\times3,14\times2,00\times4,00}{2}=10,04.$ κ. μ. Ἡ στερεότης τοῦ τεταρτοσφαιρίου, ὅπερ συνήθως ἐν ταῖς ἐργασίαις ἐν Ἑλλάδι μετρᾶται πλῆρες, ἕνεκα τῆς ὑπεροχῆς τῆς κατασκευῆς ἐπὶ τοῦ κοινοῦ τοίχου, ἐστὶ (171)

$$\frac{\frac{1}{3}\times4\pi P^2\times P}{4}=\frac{\frac{1}{3}4\times3,14\times2^2\times2}{4}=8,37.$$

ἅπασα ὅθεν ἡ τοιχοποιΐα τοῦ ναοῦ σύγκειται ἀπὸ κ. μ.

$$133,44+10,04+8,37=156,85.$$

γ΄) Τὸ ἅλας συνήθως ἐν ταῖς ἁλικαῖς συναζόμενον, τοποθετεῖται εἰς ὄγκους κανονικοῦ σχήματος, ὡς τὸ Α (Σχ. 70). Εὑρεθήτω ὅθεν ἡ στερεότης τοιούτου τινος ὄγκου ἅλατος. Τὸ σχῆμα τοῦτο σύγκειται ἀπὸ ἓν ὀρθὸν πρίσμα αβγδεζ, οὗτινος βάσις ἐστὶ τρίγωνον βάσεως δε καὶ ὕψους Υ=3, ὕψος δὲ τὸ μῆκος γδ=8,00· ἡ στερεότης ὅθεν τούτου ἐστὶ (167) $\frac{1}{2}$ δε $\times$υ$\times$αβ $=\frac{1}{2}5,00\times3,00\times8,00=60,00,$ κ. μ. καὶ προσέτι ἀπὸ δύο ἡμιπυραμίδας ὕψους κοινοῦ υ=3,00 καὶ βάσεων δεζη καὶ γιθζ, αἵτινες δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀπαρτίζουσαι μίαν πυραμίδα ἧς ἡ βάσις ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων δεζη+ψζθ. Ἡ στερεότης ὅθεν ταύτης ἐστὶ (168) (ιγ+δη) $\times$ηζ$\times\frac{1}{3}$υ$=4,00\times5,00\times\frac{1}{3}3,00=20,00$ κ. μ. Ὁ ὁλικὸς ὅθεν σωρὸς τοῦ ἅλατος περιέχει 60,00+20,00=80, 00. κ. μ.

δ΄) Εὑρεθήτω ἡ χωρητικότης πίθου (βαρελίου) (Σχ. 71).

Μὴ λαμβανομένης ὑπ᾽ ὄψιν τῆς κυρτότητος τοῦ πίθου, οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ συγκείμενος ἐκ δύο κολούρων κώνων, ἐχόντων μεγάλην μὲν βάσιν κοινὴν τὸν μεσαῖον κύκλον τοῦ πίθου, μικρὰς δὲ βάσεις τοὺς ἄκρους κύκλους αὐτοῦ. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, εὑρίσκεται ἡ στερεότης διὰ τοῦ διπλασιασμοῦ τῆς στερεότητος τοῦ κολούρου κώνου, τοῦ ἔχοντος βάσεις τοὺς δύο ῥηθέντας κύκλους (170).

Συνήθως πρὸς μέτρησιν τῆς στερεότητος τῶν πίθων γίνεται χρῆ-

ψώσεως τοῦ ἐμβολέως ἀραιοῦται ὁ ἀήρ, καὶ ἐπομένως ἡ θλιπτικὴ αὐτοῦ δύναμις ἐλαττοῦται, ὥστε τῆς δυνάμεως ταύτης μὴ ἀντισταθμιζούσης τὴν ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ ΡΣ, ἐν ᾧ ἐμβαπτίζεται ὁ μυζητικὸς σωλὴν ΘΖ θλίψιν, τὸ ὕδωρ ἀνυψοῦται εἰς ὕψος τι ΗΝ, τοσοῦτον ὥστε τὸ βάρος τῆς στήλης ταύτης μετὰ τῆς θλίψεως τοῦ ἐσωτερικοῦ ἀέρος, νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν τῆς ἀτμοσφαίρας θλίψιν. Δύο ἐπίκλειστρα, ἀνοίγοντα ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, διατίθενται εἰς Ε καὶ Λ οὕτως ὥστε ἀνοιγομένου τοῦ ἑνὸς τὸ ἕτερον κλείει. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ θλίψις, ὠθεῖ τὴν στήλην τοῦ ὕδατος, ὅπερ ἀνοῖγον τὸ ἐπίκλειστρον Ε εἰσέρχεται ὑπὸ τὸν ἐμβολέα. Κατερχομένου ὅμως τοῦ ἐμβολέως, κλείει τὸ ἐπίκλειστρον Ε διὰ τοῦ ἰδίου βάρους τοῦ εἰσελθόντος ὕδατος, ἀνοίγει δὲ τὸ ἐπίκλειστρον Λ διὰ τῆς θλίψεως τοῦ πιεζομένου ἀέρος. Δευτέρα ἀνύψωσις τοῦ ἐμβολέως, ἀνυψεῖ πλειότερον τὸ ἐν τῷ σωλῆνι ὕδωρ Ν, καὶ τέλος μετά τινας ἀνυψοκαταβιβάσεις τὸ ὑγρὸν φθάνει μέχρι τοῦ ἐμβολέως, ἐν ὅσῳ ὅμως οὗτος δὲν κεῖται ὑψηλότερον τῶν 10,33^{m}, ἤτοι τῆς ἰσοῤῥοπούσης τὴν ἀτμοσφαιρικὴν θλίψιν στήλης ὕδατος ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας ΡΣ. Τὸ ὕδωρ τέλος εἰσχωρεῖ διὰ τοῦ ἐμβολέως, καὶ ἕκαστος αὐτοῦ χειρισμὸς ἀνυψεῖ αὐτὸ πλειότερον.

Τὸ (Σχ. 196) παριστᾷ τὴν στοιχειώδη καταθλιπτικὴν ὑδραντλίαν, ἐν ᾗ ὁ ἐμβολεὺς ΑΒ εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ὅπερ τεῖνον νὰ ἰσοπεδωθῇ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ὁπόταν ὁ ἐμβολεὺς ὠθεῖται πρὸς τὰ κάτω, ἀνυψεῖ τὸ ἐπίκλειστρον Λ, πρὸς ἰσοῤῥόπησιν τῶν θλίψεων. Ἀνερχομένου τοῦ ἐμβολέως τὸ ἐπίκλειστρον Λ κλείει ὑπεῖκον εἴς τε τὸ βάρος του καὶ τὴν ἐνέργειαν τοῦ ὑγροῦ, τοῦτο δὲ ὠθούμενον ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἀνυψεῖ τὸ ἐπίκλειστρον Ε καὶ ἀνέρχεται. Ὅθεν διὰ χειρισμῶν τοῦ ἐμβολέως ἀνυψοῦται τὸ ὕδωρ.

314. Ἡ μυζητικὴ καὶ καταθλιπτικὴ ὑδραντλία (Σχ. 196) ἀπαρτίζεται ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν δύο προηγουμένων. Αὕτη ἐστὶ μυζητικὴ μὲν ἀνερχομένου τοῦ ἐμβολέως, ὁπότε τὸ ὕδωρ ἀνέρχεται ἐν τῷ σωλῆνι ΗΚΥ, ἀνοῖγον τὸ ἐπίκλειστρον Ε καὶ κλεῖον τὸ Λ, καταθλιπτικὴ δὲ κατερχομένου τοῦ ἐμβολέως, ὁπότε κλειομένου τοῦ ἐπικλείστρου Ε, ὠθεῖται τὸ ἐν τῷ χώρῳ ΕΔ ὕδωρ πρὸς τὸν σωλῆνα ΜΟ, ἀνοιχθέντος τοῦ ἐπικλείστρου Λ. Ἡ ὑδραντλία αὕτη φέρει

ἐπίσης δύο ἐπίκλειστρα, ἀλλ' ὁ ἐμβολεὺς ΑΒΓΔ ἐστὶ πλήρης, τὰ δὲ ἐπίκλειστρα εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν σωλήνων τῆς ἐκμυζήσεως καὶ τῆς διαστομώσεως.

315. Οἱονδήποτε καὶ ἂν ᾖ τὸ ὕψος εἰς ὃ ἀντλία τις ἀνυψεῖ τὸ ὕδωρ, καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ διάμετρος καὶ κλίσις τῶν μυζητικῶν σωλήνων, ὁ ἐμβολεὺς ὑφίσταται τὸ βάρος στήλης ὕδατος ἐχούσης βάσιν μὲν τοῦτον τὸν ἐμβολέα, καὶ ὕψος τὴν διαφορὰν τῶν ὕψεων τῶν δύω ἐπιφανειῶν τοῦ ὕδατος.

Ὅθεν ἐὰν Η ἐστὶ τὸ ὕψος τῆς στήλης ταύτης, Β ἡ διάμετρος τοῦ ἐμβολέως, καὶ Π τὸ βάρος ὅπερ ὑφίσταται· ἡ εἰς χιλιόγραμμα ἔκφρασις τοῦ βάρους τούτου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἓν κυβ. μέτρ. ὕδατος βαρύνει 1000χιλ. (86) ἐστὶ,

$$\Pi = \frac{1000 \times \pi \Delta^2 H}{4}.$$

Ἡ ἔκφρασις $\frac{\pi \Delta^2}{4}$ ἐστὶν ἡ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐμβολέως, ἥτις ἁπλοποιεῖται διότι $\frac{\pi}{4}\Delta^2 = 0{,}785\Delta^2$, καὶ $1000 \times 0{,}785 = 785$.

Ὅθεν $\Pi = 785 \times \Delta^2 \times H$, ἐστὶ τὸ βάρος ὅπερ ὑφίσταται ὁ ἐμβολεύς. Τῇ ὑποθέσει τῆς διαμέτρου τοῦ ἐμβολέως 0,24, τοῦ ὕψους $H = 25,^{\mu.}$ τὸ βάρος το το ἔσεται $\Pi = 785 \times (0{,}24)^2 \times 25 = 1130^{\chi\iota\lambda.}$

Τὸ ἔργον Τ εἰς χιλιόγραμμα, Υ οὔσης τῆς κατὰ δευτερόλεπτον ταχύτητος, ἐστὶ $T = 785\Delta^2 \times H \times Y$.

316. Ἐκτὸς ὅμως τοῦ βάρους τούτου, ἡ ἀπαιτουμένη πρὸς ἀνύψωσιν τοῦ ἐμβολέως δύναμις, δέον προσέτι νὰ ὑπερνικήσῃ τὰς ἑξῆς ἀντιστάσεις.

α') Τὴν ἐπὶ τῶν παρειῶν τοῦ πυξίου τριβὴν τοῦ ἐμβολέως.

β') Τὴν ἐν τῷ ἰδίῳ τούτῳ πυξίῳ καὶ τοῖς σωλῆσι τριβὴν τοῦ ὕδατος.

γ') Τὴν συνολκὴν τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν ἐν τῷ μυζητικῷ σωλῆνι εἴσοδόν του, καὶ κατὰ τὴν διὰ τοῦ ἠρεμοῦντος ἐπικλείστρου διάβασίν του.

δ') Τὸ βάρος τοῦ ἐπικλείστρου τούτου.

ε') Τὴν ἀδράνειαν τοῦ ὕδατος.

ς') Τὴν τριβὴν τοῦ κινητηρίου μηχανήματος.

ζ) Τὸ βάρος τοῦ ἐμβολέως μετὰ τοῦ μίσχου αὐτοῦ.

Αἱ διάφοροι αὗται ἀντιστάσεις αὐξάνουσι τὴν ἀπαιτουμένην κινητήριον δύναμιν κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$—$\frac{1}{4}$.

317. Ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις πρὸς κίνησιν ὑδραντλίας τινος, ὑπολογίζεται διὰ τοῦ τύπου

$$Φ=900×Δ^2×Η×Υ.$$

Ἐν ᾧ Υ ἐστὶν ἡ ταχύτης τοῦ ἐμβολέως κατὰ δευτερόλεπτον.

Εὑρεῖν τὴν ἀπαιτουμένην δύναμιν πρὸς κίνησιν ὑδραντλίας ἧς ἡ διάμετρος τοῦ ἐμβολέως ἐςὶ 0,24$^{μ.}$ ἡ διαδρομὴ αὐτοῦ 0,40, μετὰ ταχύτητος 15 διπλῶν δρόμων κατὰ λεπτὸν, τὸ δ' ὁλικὸν ὕψος τῆς στήλης 25,00$^{μ.}$

Ἡ κατὰ δευτερόλεπτον ταχύτης τοῦ ἐμβολέως Υ, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διπλῶν δρόμων ἐπὶ τὴν διαδρομὴν αὐτοῦ, καὶ τοῦ γινομένου διαιρουμένου διὰ 60, ἤτοι

$$Υ=\frac{2×15×0,40}{60}=0,20.$$

Ὥστε ἡ ἀπαιτουμένη κινητήριος δύναμις ἔσεται,

$$Φ=900×(0,24)^2×25,00×0,20=526,20^{χ.μ.}$$

Πρὸς ἔκφρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης εἰς ἵππων δύναμιν, διαιρετέον διὰ 75, τουτέστι

$$Φ=\frac{259.20}{75}=3,56 \text{ ἵππων δύναμιν.}$$

Εἰς τὰς συνήθεις ὑδραντλίας ὁ πραγματικὸς ὄγκος τοῦ παρεχομένου ὕδατος, ἐστὶ τὰ 0,9 τοῦ θεωρητικοῦ κυβισμοῦ.

Ὅθεν Λ οὔσης τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβολέως, ὁ θεωρητικὸς κυβισμὸς Υ′ ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου

$$Υ'=0,785×Δ^2×Λ.$$

Ὁ δὲ πραγματικὸς ὄγκος Υ ἔσεται

$$Υ=0,6×Δ^2×Λ.$$

Εὑρεῖν ἤδη τὴν ποσότητα τοῦ ὕδατος, ἣν ἀνυψεῖ ἡ ὑδραντλία αὕτη ἐντὸς 10 ὡρῶν.

Ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος δι' ἑκάστην διαδρομὴν τοῦ ἐμβολέως ἐστὶν

$$Υ=0,60×(0,24)^2×0,40=0,0138^{χ.μ.}$$

Κατὰ λεπτὸν δὲ $Υ=0,0138×15=0,207^{χ.μ.}$

Καθ' ὥραν $Υ=0,207×60=12,42^{χ.μ.}$

Καὶ τέλος ὁ ἐντὸς δέκα ὡρῶν ὄγκος τοῦ ὕδατος ἐστὶν

$$Υ=12,42\times10=124,20^{κ.μ.}$$

Εὑρεῖν ἤδη τὴν διάμετρον ἀντλίας τινος πρὸς ἀνύψωσιν 0,0138κ.μ. ὕδατος ἐν ἑκάστῃ διαδρομῇ, τῇ ὑποθέσει τῆς διαδρομικῆς ταύτης, 0,40μ.

Ἐκ τοῦ τύπου $Υ=0,6\times Δ^2\times Λ$, $Δ^2=\frac{Υ}{0,6\times Λ}=\frac{0,0138}{0,6\times0,40}$

καὶ ἐκ τούτου $Δ=\sqrt{\frac{0,0138}{0,6\times0,40}}=0,24$.

Ἤτοι ἡ ζητουμένη διάμετρος ἣν δέον νὰ ἔχῃ ἀντλία τις πρὸς ἀνύψωσιν 0,0138κ.μ. εἰς ἑκάστην διαδρομὴν τοῦ ἐμβολέως ἐστὶ 0,24.

318. Ἡ ταχύτης τοῦ ἐμβολέως εἰς τὰς συνήθεις ἀντλίας ἐστὶ κατ' ἐλάχιστον μὲν 0,16 κατὰ δευτερόλεπτον, καὶ 0,24 ἕως 0,25 κατὰ μέγιστον ὅρον.

Ἡ διάμετρος τοῦ μυζητικοῦ σωλῆνος καὶ τοῦ τῆς ἀνόδου τοῦ ὕδατος, ἐστὶ τὰ $\frac{2}{3}$ ἢ $\frac{3}{4}$ τῆς τοῦ πυξίου τῆς ἀντλίας.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐμφραττομένης ὑπὸ τοῦ ἐπικλείστρου ὀπῆς, δέον νὰ ᾖ τὸ ἥμισυ τῆς τοῦ πυξίου τῆς ὑδραντλίας.

319. Ἐν ταῖς διαφόροις περιγραφείσαις ἀντλίαις, ἡ κίνησις τοῦ ὕδατος ἔντε τῷ μυζητικῷ καὶ ἐν τῷ τῆς ἀνόδου σωλῆνι ἐστὶ διαλείπουσα. Τὸ ὕδωρ ἐν ἑκάστῳ τούτων, ἀνέρχεται μόνον ἐνόσῳ ὁ ἐμβολεὺς κινεῖται κατ' ὁρισμένην ἔννοιαν, σταματᾷ δ' ἡ ἄνοδος αὐτοῦ ἅμα ὁ σωλὴν κινεῖται ἀντιθέτως, τότε δὲ πάλιν ἀνέρχεται ὁπόταν ὁ ἐμβολεὺς ἀναλάβῃ τὴν πρώτην αὐτοῦ κίνησιν. Ἡ διαλείπουσα αὕτη τοῦ ὕδατος κίνησις ἐπιφέρει ἀπώλειαν χρόνου, ἥτις ὀφείλεται πρῶτον, εἰς τὴν βιαίαν κίνησιν τοῦ ὕδατος τιθεμένου εἰς κίνησιν μετὰ χρόνον τινα ἠρεμίας, καὶ δεύτερον εἰς τὴν ἑκάστοτε διακοπὴν τῆς κτηθείσης ταχύτητος τοῦ ὕδατος ἐν τοῖς σωλῆσι, ἥτις οὐδὲν παράγει ἀποτέλεσμα, καὶ πρὸς απόκτησιν τῆς ὁποίας ἑκάστοτε δέον νὰ καταναλωθῇ ποσότης τις ἔργου.

Πρὸς θεραπείαν τοῦ ἀτόπου τούτου τῆς διαλειπούσης κινήσεως τοῦ ὕδατος ἔν τε τῷ μυζητικῷ καὶ ἐν τῷ τῆς ἀνόδου τοῦ ὕδατος σωλῆνι, κατεσκευάσθη ἡ διπλὴ ὑδραντλία δι' ἧς τὸ ὕδωρ ἐκμυζᾶται καὶ καταθλίβεται συνάμα, ἀνερχομένου ἢ κατερχομένου τοῦ ἐμβολέως. Πλήρης ἐμβολεὺς Α κινεῖται ἐντὸς κεκλεισμένου εἰς ἀμ-

φότερα τὰ ἄκρα πυξίου (Σχ. 197), ἔνθα τέσσαρα ἐπίκλειστρα ΒΓΒ′Γ′ ἀνοίγουσι καταλλήλως πρὸς δίοδον τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν ἀνάγκην. Ἀνερχομένου τοῦ ἐμβολέως, τὰ ἐπίκλειστρα Β′ καὶ Γ κλείουσιν, τὰ δὲ Β καὶ Γ′ ἀνοίγουσιν. Τὸ ὕδωρ τοῦ σωλῆνος Δ ἀνέρχεται πρὸς τὸ κατώτερον μέρος τοῦ πυξίου τῆς ὑδραντλίας, τὸ δὲ ὑπεράνω τοῦ ἐμβολέως τοιοῦτον, ὠθεῖται πρὸς τὸν σωλῆνα Ε. Κατερχομένου δὲ κατόπιν τοῦ ἐμβολέως κλείουσι τὰ ἐπίκλειστρα Β καὶ Γ, καὶ ἀνοίγουσι τὰ Β′ καὶ Γ, καὶ τὸ μὲν ὕδωρ τοῦ μυζητικοῦ σωλῆνος εἰσέρχεται διὰ τῆς ὀπῆς Β′ ἐν τῷ πυξίῳ τῆς ὑδραντλίας, τὸ δὲ προηγουμένως εἰσδύσαν κάτωθεν τοῦ ἐμβολέως, ἀπωθεῖται πρὸς τὸν τῆς ἀνόδου σωλῆνα διὰ τῆς ὀπῆς Γ. Ὅθεν τὸ ὕδωρ εὑρίσκεται συνεχῶς εἰς κίνησιν ἔν τε τῷ μυζητικῷ καὶ ἐν τῷ τῆς ἀνόδου σωλῆνι.

Διπλῆ τοιαύτη ὑδραντλία παρέχει δι' ἕκαστον χειρισμὸν τοῦ ἐμβολέως διπλάσιον ποσὸν ὕδατος ἁπλῆς ὑδραντλίας τῶν αὐτῶν διαστάσεων, ἀπαιτεῖ ὅμως πρὸς κίνησιν αὐτῆς καὶ διπλασίαν δύναμιν τῆς ὁμοίας ἁπλῆς, προσέτι δὲ ἡ διάταξις ἐστὶ μᾶλλον πολύπλοκος, καὶ ἡ συντήρησις τῶν ἐπικλείστρων δυσκολωτέρα. Τὸ πλεονέκτημα τῆς τοιαύτης ὑδραντλίας συνίσταται εἰς τὴν συνεχῆ ῥοὴν τοῦ ὕδατος. Εἰς τὸ αὐτὸ ὅμως ἀποτέλεσμα τῆς συνεχοῦς ῥοῆς, ἄγει ὁ συνδυασμὸς δύο ἁπλῶν ὑδραντλιῶν, συγκοινωνουσῶν πρὸς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν μυζητικὸν σωλῆνα, καὶ ἕνα σωλῆνα ἀνυψώσεως τοῦ ὕδατος, καὶ ὧν οἱ ἐμβολεῖς κινοῦνται ἀντιθέτως πρὸς ἀλλήλους. Τῆς μιᾶς τῶν ὑδραντλιῶν τούτων ἐνεργούσης μυζητικῶς, ἡ ἑτέρα ἐνεργεῖ καταθλιπτικῶς, καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ κίνησις τῶν ἐμβολέων τούτων ἐνεργεῖται δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ μοχλοῦ, διατίθενται δὲ οὕτως ὥστε ἀνυψουμένου τοῦ ἑνὸς ὁ ἕτερος κατέρχεται καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ χρῆσις τοιούτων ἀντλιῶν ἐστὶ συνηθεστάτη καὶ πρὸ πάντων διὰ τὰς πυρκαϊάς.

320. Αἱ πρὸς οἰκιακὴν χρῆσιν ὑδραντλίαι, προσαρμόζονται εἰς τὰ χείλη φρεάτων ἢ δεξαμενῶν, ἡ ἀνύψωσις δὲ τοῦ ὕδατος ἐνεργεῖται δι' ἐκμυζήσεως. Πρὸς τοῦτο ὅμως τὸ βάθος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ 8,00μ., ἄλλως τὸ πυξίον αὐτὸ τῆς ὑδραντλίας δέον νὰ τεθῇ ἐντὸς τοῦ φρέατος, ἡ δὲ ἀντλία νὰ ἐνεργῇ μυζητικῶς καὶ καταθλιπτικῶς. Ἐπίσης τὸ πυξίον τοῦτο τῆς ὑδραντλίας, δύναται

νὰ τοποθετηθῇ εἰς ὕψος τι ἄνωθεν τοῦ πυθμένος τοῦ φρέατος, πάντοτε ὅμως ὀλιγώτερον τῶν 8,00^{m}. Ἡ θέσις τῆς τοποθετήσεως ἐκλέγεται ἐπὶ τῇ βάσει λόγων οἰκονομικῶν, καὶ τῆς εὐκόλου ἐπισκευῆς, ἄλλως τε καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὸ πρὸς ἀνύψωσιν τοῦ ὕδατος δαπανώμενον ἔργον, τοῦτο ἐστὶν ὅλως ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τῆς ὑδραντλίας.

321. *Ὑδραυλικαὶ μηχαναὶ πρὸς ἄρδευσιν.* Μᾶσα μηχανὴ ἀνυψώσεως ὕδατος, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἀρδευτική. Ὑδραντλίαι, ἐμψυχοκίνητα, ἀνύψωσις ὕδατος δι' ἐξελίκτρου κ.λ., πάντα ταῦτα χρησιμεύουσι πρὸς ἄρδευσιν μικρῶν ἐκτάσεων, προκειμένου ὅμως περὶ ἀρδεύσεως μεγάλων ἐκτάσεων ὁπόταν ἀπαιτεῖται καὶ συνεχὴς ῥοὴ ὕδατος, γίνεται χρῆσις εἰδικῶν πρὸς τοῦτο μηχανῶν, ὧν αἱ κινητήριοι δυνάμεις δύνανται νὰ ὦσι διάφοροι.

322. *Συζευκτήρ.* Ὁ συζευκτὴρ χρησιμεύει πρὸς συνεχῆ ἀνύψωσιν ὕδατος εἰς μικρὸν ὕψος, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δὲ καὶ πρὸς ἐκκένωσιν ὕδατος ἐκ θεμελίων κ.λ.

Συνίσταται ἐξ ἀτέρμονος ἁλύσου (Σχ. 198), σχηματιζομένης δι' ἐναρθρωτῶν τεμαχίων σιδηρῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων φέρει ἐν μέσῳ κάθετον δίσκον, περιβάλλει δ' ἡ ἅλυσος αὕτη δύο τροχοὺς Α καὶ Β. Ἡ περιστροφὴ τοῦ τροχοῦ Α, παρασύρει τὴν ἅλυσον, ἥτις περιστρέφει καὶ τὸν τροχὸν Β, διὰ δὲ τῆς κινήσεως ταύτης τὸ ἓν μέρος τῆς ἁλύσου ἀνέρχεται ὁπόταν τὸ ἕτερον κατέρχεται. Τὸ ἀνερχόμενον μέρος τῆς ἁλύσου διέρχεται διὰ σωλῆνος οὗ ἡ διάμετρος ἐστὶ κατά τι μείζων τῆς τοῦ δίσκου, καὶ οὗτινος τὸ κατώτερον ἄκρον εἰσδύει ἐν τῷ ὕδατι. Ὁσάκις δίσκος τις εἰσέλθῃ εἰς τὸν σωλῆνα ἀνερχόμενος, ἀποχωρίζει ποσότητά τινα ὕδατος ἄνωθεν αὐτοῦ εὑρισκομένην, καὶ ἀνυψεῖ αὐτὴν ἄχρις οὗ τὴν φέρει εἰς τὸ ἄνω ἄκρον τοῦ σωλῆνος ὁπόθεν ῥέει ἐγκαρσίως. Ἡ διαφορὰ τῆς διαμέτρου τοῦ σωλῆνος καὶ τῶν ἐπὶ τῆς ἁλύσου δίσκων, δέον νὰ ᾖ ὅσον τὸ δυνατὸν ἐλαχίστη, ἵνα τὸ διὰ τοῦ κενοῦ κατερχόμενον ὕδωρ ᾖ ὅσον οἷόν τε μικρότερον.

Πολλάκις ὁ συζευκτὴρ διατίθεται κεκλιμένως (Σχ. 199), ὁπότε καὶ ὁ σωλὴν τῆς ἀνόδου τοῦ ὕδατος δύναται νὰ ᾖ ἁπλοῦς αὖλαξ, ἰσοδιάμετρος ὅμως τοῖς δίσκοις.

323. Ἀντὶ τοῦ σωλῆνος τῆς ἀνυψώσεως, ὁπόταν τὸ βάθος τοῦ

ὕδατος ἐστὶ μεγαλείτερον, προσαρμόζονται ἐπὶ τῆς ἀτέρμονος ἁλύσου σκύφη ϐϐ (Σχ. 200), ἅτινα διερχόμενα διὰ τοῦ ὕδατος πληροῦνται, ἀνυψωθέντα δ' ἀκολούθως ἐκκενοῦσι τὸ ὕδωρ τοῦτο ἐντὸς δεξαμενῆς ἢ αὔλακος. Ἡ μηχανὴ αὕτη τῆς ἀνυψώσεως τοῦ ὕδατος ἐστὶν ἐν μεγίστῃ χρήσει ἐν ἁπάσῃ τῇ Ἑλλάδι, τίθεται δὲ εἰς κίνησιν διὰ τοῦ ἐμψυχοκινήτου (305) καὶ καλεῖται κοινῶς μαγγανοπήγαδον.

Ἡ μηχανὴ αὕτη ἐστὶν ἐπίσης ἐν χρήσει ἐν τοῖς βιομηχανικοῖς καταστήμασιν πρὸς συνεχῆ ἀνύψωσιν διαφόρων εἰδῶν, ἀλεύρων, κόνεων κ.λ. ἀπὸ πατώματος εἰς πάτωμα. Αἱ πρὸς κάθαρσιν τῶν λιμένων βορϐοροφάγοι (φαγᾶναι) εἰσὶ τοιαῦται μηχαναί, ὧν τὰ σκύφη πληρούμενα βορϐόρου ἐκκενοῦσιν αὐτὸν εἰς τὰς πρὸς μεταφορὰν αὐτοῦ φορτηγίδας λέμϐους. Τα σκύφη ἐν τῇ περιπτώσει ταύτη φέρουσι κατὰ τὴν ἐπιφάνειάν των ὀπὰς πρὸς ἐκροὴν τοῦ εἰσερχομένου μετὰ τῶν ὑλῶν τοῦ πυθμένος τῆς θαλάσσης ὕδατος

324. *Ταρσοφόρος τροχός.* Διὰ τοῦ τροχοῦ τούτου μόνον εἰς μικρὸν ὕψος δύναται ν' ἀνυψωθῇ τὸ ὕδωρ. Συνίσταται δὲ εἰς μέγαν τροχὸν φέροντα πέριξ ἐπιπέδους ταρσοὺς (Σχ. 201). Ὁ τροχὸς κινεῖται ἐντὸς αὔλακος οὗ τὸ πλάτος ἰσοῦται τῷ τοῦ ταρσοῦ, ὥστε ἀνερχομένων τούτων συμπαρασύρεται τὸ ἔμπροσθεν αὐτῶν ὕδωρ, ὅπερ ἀνυψούμενον εἰς Α διοχετεύεται ἐντὸς σωλῆνος ἢ ἀλλαχοῦ. Οἱ ταρσοὶ τίθενται κεκλιμένως πρὸς τὰς ἀκτῖνας τοῦ τροχοῦ πρὸς διευκόλυνσιν τῆς τοῦ ὕδατος ῥοῆς. Ὁ τροχὸς οὗτος τίθεται εἰς κίνησιν διὰ δυνάμεως ἀναλόγως τοῦ μεγέθους αὐτοῦ καὶ τοῦ ὕδατος ὅπερ ἀνυψεῖ, ἐμπλεκόμενος τὸ πρῶτον μετὰ ἐμπλεκτικοῦ τροχοῦ.

325. *Σκυφοφόρος τροχός.* Τὸ (Σχ. 202) παριστάνει ἕτερον τροχὸν χρησιμεύοντα πρὸς ἀνύψωσιν ὕδατος καὶ καλούμενον σκυφοφόρον. Οὗτος φέρει καθ' ἅπασαν αὐτοῦ τὴν περιφέρειαν σκύφη καταλλήλως διατεθειμένα δι' ὧν ἀνυψοῦται καὶ ῥέει τὸ ὕδωρ.

326. *Σίφων.* Ὁ σίφων χρησιμεύει πρὸς ἐκκένωσιν διαφόρων μερῶν ἐκ τοῦ ἐν αὐτοῖς ὑγροῦ, στηρίζεται δ' ἡ ἐνέργειά του εἰς τὴν τῆς ἀτμοσφαίρας θλίψιν. Ὁ σίφων συνίσταται (Σχ. 203) ἐκ σωλῆνος καμφθέντος οὗ οἱ δύο βραχίονες εἰσὶν ἄνισοι, ἐμϐαπτιζόμενοι ἕκαστος εἰς διάφορον ἀγγεῖον.

Πρὸς διοχέτευσιν τοῦ ἐν τῷ ἀγγείῳ Α ὑγροῦ εἰς τὸ Β, ἐκκενοῦ-

ται ὁ σωλὴν τοῦ ἐν αὐτῷ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος. Τούτου γενομένου, τὸ ὑγρὸν ἀνυψοῦται διὰ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς θλίψεως ἐν τῷ βραχίονι η, καὶ ῥέει συνεχῶς διὰ τοῦ βραχίονος η′ ἐν τῷ ἀγγείῳ Β.

Ἡ ἐνέργεια τοῦ σίφωνος ὑπόκειται εἰς διαφόρους συνθήκας, τουτέστι κενοῦ γενομένου ἐν τῷ σωλῆνι τὸ ὑγρὸν ἀνυψοῦται διὰ τῆς ὀπῆς γ ἐν τῷ βραχίονι, τῇ ἐνεργείᾳ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς θλίψεως. Ὅθεν δέον ἵνα τὸ ὕψος τοῦ βραχίονος τούτου ᾖ κατώτερον τῶν 10,00μ. καὶ προσέτι ἐπειδὴ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ θλίψις ἐνεργεῖ ἐπίσης ἐπὶ τοῦ στομίου δ πρὸς παρεμποδισμὸν τῆς ῥοῆς τοῦ ὕδατος, δέον ἵνα τὸ ὕψος η′ ᾖ μεγαλείτερον τοῦ η, τουτέστιν ἡ ῥοὴ δὲν δύναται νὰ λάβῃ χώραν, ἢ ἐνόσῳ τὸ ἀγγεῖον Α τὸ περιέχον τὸ διοχετευθησόμενον ὑγρὸν κεῖται ὑψηλότερον τοῦ ἀγγείου Β, εἰς ὃ τοῦτο διοχετευθήσεται.

Ὁ σωλὴν δύναται νὰ ἐκκενωθῇ δι' ἐκμυζήσεως, πλὴν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα φέρει ἡ δι' ὀπῆς κατὰ τὴν κάμψιν πλήρωσις τῶν δύω βραχίονων τοῦ σωλῆνος ὑγροῦ, ἀφοῦ προηγουμένως φραχθῶσι τὰ στόμια. Πληρωθέντος τοῦ σωλῆνος, ἀποφράσσονται τὰ στόμια καὶ ἡ ῥοὴ λαμβάνει χώραν.

327. *Ἕλιξ Ἀρχιμήδους.* Ἡ μηχανὴ αὕτη τῆς ἀνυψώσεως τοῦ ὕδατος χρησιμεύει κυρίως πρὸς ἐκκένωσιν θεμελίων, καὶ ἐν γένει διὰ τὰ ὑδραυλικὰ ἔργα. Σύγκειται ἐκ πυρῆνος α (Σχ. 204) διαπερωμένου ὑπὸ ἄξονος β, καὶ εὑρισκομένου ἐντὸς κυλίνδρου, τὸ κενὸν μεταξὺ τῶν ὁποίων πληροῦται συνεχοῦς σπειροειδοῦς διαφράγματος. Ἡ περιστροφὴ ἐνεργεῖται διὰ καταλλήλου κινητηρίου δυνάμεως ἐνεργούσης ἐπὶ στροφάλου τινος Θ.

Περιστρεφομένης τῆς ἕλικος τὸ ὕδωρ καταῤῥέει κατὰ μῆκος ἑκάστου συνεχοῦς σπειροειδοῦς διαφράγματος, ἰσοπεδοῦται δὲ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρας σπείρας, τουτέστιν ἀνυψοῦται δι' ἑκάστην περιστροφὴν κατὰ ποσότητα ἴσην τῇ καμπῇ (256) τῆς ἕλικος. Ἵνα ἐκτελεῖται ὅμως καλῶς ἡ ἀνύψωσις αὕτη, δέον ὅπως ἡ κάτω βάσις τῆς ἕλικος βυθίζεται κατὰ τὸ ἥμισυ ἐντὸς τοῦ ὕδατος ὑπὸ γωνίαν $30^0 - 45^0$, ὥστε ὁ ἀὴρ νὰ δύναται νὰ εἰσέρχεται ἐπίσης ὡς τὸ ὕδωρ ἐκ τοῦ κάτω ἄκρου τῆς ἕλικος, καὶ ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἕλικος γωνία νὰ περιέχεται μεταξὺ 55^0 καὶ 60^0.

Ἡ διάμετρος τῆς Ἀρχιμηδείου ἕλικος ἐστὶ συνήθως 0,50μ., τὸ

μῆκος ἐστὶ τὸ δωδεκαπλάσιον τῆς διαμέτρου ἤτοι 6,00,μ. ἡ δὲ διάμετρος τοῦ πυρῆνος τὸ τρίτον τῆς τῆς ἕλικος τουτέστι 0,16.

Ἀνὴρ ἐνεργῶν διὰ καλῶς κατασκευασμένης ἀρχιμηδείου ἕλικος ἀνυψεῖ 15 περίπου κυβ. μέτρ. ὕδατος καθ' ὥραν εἰς 1,00μ. ὕψος.

328. *Ὑδραυλικὸν πιεστήριον*. Τὸ (Σχ. 205) παριστᾷ κατὰ πρόσοψιν τὸ ὑδραυλικὸν πιεστήριον. Στερεὸς κύλινδρος Α, περιέχει ἐμβολέα Β, φέροντα ἄνωθεν δίσκον Γ. Μεταξὺ τοῦ κινητοῦ τούτου δίσκου, καὶ τοῦ ἀμεταθέτου τοιούτου Δ στερεῶς προσαρμοζομένου πρὸς τὸν κύλινδρον Α διὰ τῶν στηλῶν ΕΕ, τίθενται τὰ πρὸς πίεσιν σώματα. Τὸ ὕδωρ εἰσάγεται εἰς τὸν κύλινδρον Α διὰ τῆς ἀντλίας Ζ. Μοχλὸς ΘΗ κινούμενος πέριξ τοῦ σημείου Η, θέτει εἰς κίνησιν τὸν ἐμβολέα Ι, οὗ ὁ μῖσχος ἐστὶ προσαρμοσμένος πρὸς τὸνμοχλὸν ΘΗ ἐνάρθρως διὰ μικροῦ κανόνος, ἀφ' ἑνὸς μὲν πρὸς τὸν μοχλὸν τοῦτον συνδεόμενον, ἀφ' ἑτέρου δὲ πρὸς τὸν μίσχον τοῦ ἐμβολέως.

Ἡ κάθετος κίνησις τοῦ ἐμβολέως ἀσφαλίζεται διὰ τοῦ δακτυλίου Κ ἐν ᾧ κινεῖται οὗτος ἐλευθέρως. Δι' ἕκαστον χειρισμὸν τῆς ἀντλίας, ὕδωρ ἀνέρχεται ἔκ τινος δεξαμενῆς ὑπὸ ταύτην κειμένης, ὅπερ ἀπωθεῖται πρὸς τὸν κοινωνοῦντα μετὰ τοῦ κυλίνδρου Α σωλῆνα Λ.

Τὸ ὑδραυλικὸν πιεστήριον ἐστὶν ἐν μεγίστῃ χρήσει ἐν τῇ βιομηχανίᾳ, πρὸς πίεσιν ἐρεῶν, χάρτου, κ.λ.π. καὶ ἐν γένει διὰ πᾶσαν ἐργασίαν, δι' ἧς ἀπαιτεῖται μεγάλη πίεσις. Διὰ τοῦ ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου, δοκιμάζεται ἡ ἀντίστασις τῶν μεγάλων ἐλατηρίων τῶν διαφόρων ἁμαξῶν, πρὸ πάντων ὅμως τῶν φορτηγίδων τοιούτων τῶν σιδηροδρόμων. Ἐπίσης δι' αὐτοῦ δοκιμάζεται ὁ βαθμὸς τῆς ἀντιστάσεως πλειόνων σωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ'.

Μετάδοσις καὶ μετατροπὴ τῆς κινήσεως.—Μηχαναὶ διάφοροι.

329. Πᾶσα μηχανὴ σύγκειται,

α'. Ἐκ τοῦ παράγοντος τὴν κίνησιν κινητηρίου,

β'. Ἐκ τοῦ ἀμέσου ἀποδέκτου τῆς ἐνεργείας τοῦ κινητηρίου,

γ'. Ἐκ τῶν ἐνεργούντων τὴν ἐργασίαν μερῶν, καὶ

δ'. Ἐκ τῶν πρὸς συγκοινωνίαν καὶ μετάδοσιν τῆς κινήσεως μερῶν.

Τὰ ἐν χρήσει κινητήρια εἰσὶν ἄνδρες, ζῶα, ἀήρ, ὕδωρ καὶ ἀτμός. Οἱ ἀποδέκται τῆς ἐνεργείας τῶν κινητηρίων συνδέονται στενῶς μετὰ τούτων, διότι παρὰ τούτων δέχονται τὴν ἄμεσον αὐτῶν ἐνέργειαν, τοιοῦτοι δ' εἰσὶν οἱ ὑδραυλικοὶ τροχοί, οἱ ἐμβολεῖς κλπ. Τὰ ἐνεργοῦντα τὴν ἐργασίαν μέρη μηχανῆς τινος ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ εἴδους ταύτης, τοιαῦτα δ' εἰσὶν οἱ μυλόλιθοι τῶν μύλων, ὁ πρίων τοῦ πριονιστηρίου κλ.

330. Ἡ ἐνέργεια τοῦ ἀποδέκτου τῆς κινήσεως μεταδίδεται εἰς τὰ ἐνεργοῦντα τὴν ἐργασίαν μέρη διὰ διαφόρων τρόπων· τὰ μεταδίδοντα τὴν κίνησιν ταύτην μέρη καλοῦνται *κοινωνεῖς*.

Τριῶν εἰδῶν κινήσεις ὑπάρχουσι διακεκριμμέναι, ἡ *εὐθύγραμμος* τουτέστιν ἡ κίνησις σώματος τινος διατρέχοντος εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ *περιστροφική*, ἤτοι ἡ κίνησις σώματος διατρέχοντος κύκλου περιφέρειαν καὶ ἡ *καμπυλόγραμμος*, ἤτοι ἡ κίνησις σώματος διατρέχοντος καμπύλην οἱανδήποτε. Αἱ κινήσεις αὗται εἰσὶ *συνεχεῖς* ἢ *παλινδρομικαί*. Καὶ συνεχεῖς μὲν εἰσὶν ὁπόταν ἡ κίνησις ἀκολουθεῖ πάντοτε τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, παλινδρομικὴ δὲ ὁπόταν ἀλληλοδιαδόχως μεταβάλλῃ ἔννοιαν, ὡς ἡ τῶν ἐμβολέων, τῶν ἐκκρεμῶν κ.λ.π.

Αἱ διάφοροι αὗται κινήσεις δύνανται νὰ συνδυασθῶσι μεταξύ των διαφοροτρόπως, πᾶσα δὲ μηχανὴ ἐστὶν ἡ ἐφαρμογὴ μιᾶς ἢ πλειοτέρων τῶν μετατροπῶν τούτων.

331. *Μετάδοσις κινήσεως συνεχοῦς εὐθυγράμμου διὰ κινήσεως ἐπίσης συνεχοῦς εὐθυγράμμου*. Τὰ ὀλισθαίνοντα ἐπὶ τῶν ἀμεταθέτων τροχαλιῶν σχοινία καὶ οἱ ἱμάντες, μεταδίδουσιν εἰς ἀποστάσεις διαφόρους τὴν συνεχῆ εὐθύγραμμον κίνησιν. Οὕτω διὰ τοῦ ἑλκυσμοῦ σχοινίου περιβάλλοντος τροχαλίαν, μεταδίδεται ἡ εὐθύγραμμος συνεχὴς κίνησις τῆς ἕλξεως, εἰς τὴν εὐθύγραμμον συνεχῆ κίνησιν τῆς ἀνυψώσεως τοῦ βάρους.

Τὸ (Σχ. 206) δεικνύει ἑτέραν διάταξιν μεταδίδουσαν τοιαύτην κίνησιν. Οἱ κανόνες α β συνδέονται μεταξύ των διὰ δύο ἴσων τοιούτων γ δ ἐνάρθρως, ὥστε οὗτοι εἰς οἱανδήποτε θέσιν εὑρισκόμενοι,

εἰσὶ πάντοτε παράλληλοι μεταξύ των. Ἐπίσης οἱ ἐγκάρσιοι κανόνες δύνανται νὰ ὦσι κεκλασμένοι καὶ συνδέονται ἐνάρθρως μετὰ τρίτου ἐγκαρσίου ὁπότε παρέξουσι τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα (Σχ. 207).

332. *Μετατροπὴ κινήσεως συνεχοῦς εὐθυγράμμου, εἰς κίνησιν εὐθύγραμμον παλινδρομικήν*. Τὸ (Σχ. 208) δεικνύει διάταξιν κατάλληλον πρὸς παραγωγὴν τῆς μετατροπῆς ταύτης. Στερεὰ λεπὶς α, φέρουσα κεκλασμένην ἐντομήν, προσαρμόζεται πρὸς κατακόρυφον κανόνα β δι' ἐπιούρου, ὅπερ ἀναγκαζόμενον κατὰ τὴν εὐθύγραμμον κίνησιν τῆς λεπίδος ν' ἀκολουθῇ τὴν ἐντομήν, προξενεῖ τὴν κάθετον ἄνοδον καὶ κάθοδον τοῦ κανόνος β. Ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς, ἔνθα ὁ ἀτμὸς ἐξέρχεται συνεχής, καὶ μεταβαίνει ὁτὲ μὲν ἄνωθεν, ὁτὲ δὲ κάτωθεν τοῦ ἐμβολέως ὅπως κινεῖ τοῦτον παλινδρομικῶς, μετατρέπεται ἡ εὐθύγραμμος συνεχὴς κίνησις εἰς εὐθύγραμμον παλινδρομικήν.

333. *Μετατροπὴ κινήσεως συνεχοῦς εὐθυγράμμου εἰς κίνησιν συνεχῆ περιστροφικήν*. Ῥοὴ ὕδατος ἐνεργοῦσα ἐπὶ ὑδραυλικοῦ τροχοῦ, μετατρέπει τὴν εὐθύγραμμον αὐτοῦ συνεχῆ κίνησιν εἰς τὴν περιστροφικὴν συνεχῆ κίνησιν τοῦ τροχοῦ.

Τὸ ἀντίθετον ἀπαντᾶται ἐν τοῖς ἐξελίκτροις, τοῖς ὄνοις, ταῖς κρεξίν, ἐν οἷς ἡ συνεχὴς περιστροφικὴ τοῦ στροφάλου κίνησις παράγει τὴν εὐθύγραμμον συνεχῆ τῆς ἀνυψώσεως τοῦ βάρους τοιαύτην.

Ἡ διαφορικὴ ἕλιξ τοῦ Prony ἐστὶν ἐπίσης παράδειγμα τοιαύτης μετατροπῆς κινήσεως, πλὴν ἐνεργουμένης μετὰ μαθηματικῆς ἀκριβείας.

Ὁ κύλινδρος αβ (Σχ. 209), φέρει εἰς ἑκάτερον τῶν ἄκρων αὐτοῦ ἕλικας τῆς αὐτῆς καμπῆς, περιστρεφομένας ἐν τοῖς περικοχλίοις γ, δ. Δι' ἑκάστην περιστροφὴν τοῦ στροφάλου, ὁ κύλινδρος διατρέχει ὁριζοντείως διάστημα ἴσον τῇ καμπῇ τῆς ἕλικος. Ὁ κύλινδρος φέρει ἐν μέσῳ ἑλικομένον μέρος Θ, οὗ ἡ καμπὴ διαφέρει κατὰ βούλησιν τῶν καμπῶν τῶν ἐπακρίων αὐτοῦ ἑλίκων α, β, ὥστε τὸ περικόχλιον η, οὗ ἡ βάσις ὀλισθαίνῃ ἐντὸς αὔλακος ἐπὶ τοῦ ἑνοῦντος τοὺς στύλους γ, δ κανόνος, προχωρεῖ δι' ἑκάστην περιστροφὴν τοῦ στροφάλου, κατ' ἀπόστασιν ἴσην τῇ διαφορᾷ τῶν καμπῶν τῆς μεσαίας καὶ ἐπακρίων ἑλίκων.

Ἐμπλεκτικὸς κανὼν θέτων εἰς κίνησιν ἐμπλεκτικὸν τροχόν,

ἐστὶν ἐπίσης παράδειγμα μετατροπῆς εὐθυγράμμου συνεχοῦς κινήσεως εἰς κίνησιν συνεχῆ περιστροφικήν.

334. *Μετατροπὴ κινήσεως εὐθυγράμμου, εἰς κίνησιν περιστροφικὴν παλινδρομικήν.* Ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς ἡ εὐθύγραμμος τοῦ ἐμβολέως κίνησις, παράγεται διὰ τῆς παλινδρομικῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ ἀντισηκωτῆρος. Τὸ ἀντίθετον λαμβάνει χώραν, ὁπόταν μοχλός τις α (Σχ. 210) περιστρεφόμενος περὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ β, φέρει ἐνάρθρως δύο μοχλοβραχίονας γ, δ καμπτομένους κατὰ τὸ ἄκρον. Διὰ τῶν ἄκρων τούτων οὗτοι ἐμπλέκονται πρὸς τοὺς ὀδόντας κανόνος Θ, φέροντος ἐν μέσῳ ἐγκοπὴν ἐν ᾗ εὑρίσκεται ὁ ἄξων τοῦ μοχλοῦ α. Διὰ τῆς περιστροφικῆς παλινδρομικῆς κινήσεως τοῦ μοχλοῦ, ὁ κανὼν ἀνυψούμενος κινεῖται συνεχῶς εὐθυγράμμως.

535. *Μετατροπὴ κινήσεως συνεχοῦς περιστροφικῆς, εἰς κίνησιν εὐθύγραμμον παλινδρομικήν.* Ἡ συνεχὴς περιστροφικὴ κίνησις τοῦ στροφάλου α (Σχ. 211) μετατρέπεται διὰ τοῦ κανόνος β εἰς τὴν εὐθύγραμμον παλινδρομικὴν κίνησιν τοῦ πρίονος γ.

Τὸ ἀντίστροφον λαμβάνει χώραν εἰς τὰς δι' ἀντισηκωτῆρος ἐνεργούσας ἀτμομηχανάς, ὡς δεικνύει τὸ (Σχ. 212). Ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ ἐναλλὰξ ἐπὶ ἑκάστου τῶν μετώπων τοῦ ἐμβολέως α πρὸς μετάδοσιν αὐτῷ εὐθυγράμμου παλινδρομικῆς κινήσεως. Διὰ τοῦ μοχλοῦ β καὶ τοῦ κανόνος γ, παράγεται ἡ περιστροφικὴ συνεχὴς κίνησις τοῦ στροφάλου α.

Εἰς τὰς διὰ κατευθυντρίας ἐνεργούσας μηχανάς, ὁ ἐμβολεὺς μεταδίδει τὴν παλινδρομικὴν αὐτοῦ κίνησιν εἰς ἐλεύθερον τροχαλεῖον ἐντὸς ἀναπαυστηρίου (Σχ. 213), ἣ μετατρέπεται διὰ τῆς ῥάβδου γ εἰς τὴν συνεχῆ περιστροφικὴν κίνησιν τοῦ στροφάλου δ.

Διὰ τῆς συνεχοῦς περιστροφικῆς κινήσεως τροχοῦ τινος α (Σχ. 214) ἐντὸς τροχοῦ β διπλασίας ἀκτῖνος εὑρισκομένου, καὶ διὰ τῆς ἀρθρωτικῆς ἑνώσεως σημείου τινος γ τοῦ τροχοῦ α πρὸς μίσχον δ, μεταδίδεται εἰς τοῦτον διὰ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ τροχοῦ α, κίνησις εὐθύγραμμος παλινδρομική.

236. *Ἔκκεντρα.* Τὸ ἔκκεντρον α (Σχ. 215) περιστρεφόμενον, μεταδίδει εὐθύγραμμον παλινδρομικὴν κίνησιν εἰς μίσχον β, μεθ' οὗ εὑρίσκεται εἰς ἐπαφήν. Πρὸς ἐλάττωσιν τῆς τριβῆς ὁ μίσχος β φέ-

ρει τροχαλεῖον γ, ὀλισθαῖνον ἐπὶ τῆς καμπύλης, κινεῖται δ' ὁ μίσχος ἐντὸς ἀναπαυστηρίου ἢ δύο τροχαλείων δδ.

Τὸ ἔκκεντρον τοῦτο καλούμενον καρδιόσχημον, χαράσσεται ὡς ἀκολούθως. Ἔστω α τὸ κέντρον τοῦ ἄξονος ἐφ' οὗ περιστρέφεται τὸ ἔκκεντρον, καὶ ὅτι τοῦτο πρόκειται νὰ μεταδώσῃ εἰς τὸ κέντρον τοῦ τροχαλείου κίνησιν ἧς ἡ διαδρομὴ ἐστὶ ϐϐ' δι' ἑκάστην ἡμιπεριστροφήν, ἵνα ἐπαναφέρῃ τοῦτο εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως διὰ τῆς δευτέρας ἡμιπεριστροφῆς. Ἐκ τοῦ α ὡς κέντρου διαγράφονται αἱ περιφέρειαι τῶν ἀκτίνων αϐ, αϐ', καὶ ἡ ἀπόστασις ϐϐ' διαιρεῖται εἰς ἀριθμόν τινα ἴσων μερῶν. Ἐκ τοῦ κέντρου α κατόπιν διαγράφονται τοσαῦται περιφέρειαι, ὅσαι εἰσὶν αἱ διαιρέσεις τῆς ϐϐ', καὶ ἑνοῦνται τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς περιφερείας αϐ' μετὰ τοῦ κέντρου. Τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῆς ἀκτῖνος α1 μετὰ τῆς περιφερείας τῆς ἀκτῖνος α1, ἐστὶ σημεῖον τῆς ζητουμένης καμπύλης. Ἐπίσης τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῆς ἀκτῖνος α2 μετὰ τῆς περιφερείας τῆς ἀκτῖνος α2, ἐστὶ δεύτερον σημεῖον τῆς ζητουμένης καμπύλης, καὶ οὕτως ἄχρι τῆς τελευταίας διαιρέσεως, ἥτις κεῖται ἀπέναντι τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως. Ἡ καμπύλη αὕτη συμπληρουμένη συμμετρικῶς διαγράφει τὸ ζητούμενον ἔκκεντρον, δι' οὗ τὸ σημεῖον ϐ ἀνυψοῦται εἰς ϐ'.

Διὰ τῆς περιστροφῆς τοιούτου ἐκκέντρου, μεταδίδεται κανονικὴ εὐθύγραμμος παλινδρομικὴ κίνησις, διότι δι' ἕκαστον ἴσον τῷ ἐκκέντρῳ τόξον, τὸ σημεῖον ἀνυψοῦται κατ' ἴσην ποσότητα εὐθυγράμμως. Τῇ τηρήσει ὅμως τῆς ἰσότητος τῶν τῆς περιφερείας διαιρέσεων, καὶ τῇ αὐξομειώσει τῆς ἀποστάσεως τῶν διαιρέσεων ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῆς διανυθησομένης ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως, τροποποιεῖται ἡ ταχύτης τοῦ ἐκκέντρου ἀναλόγως τῆς ἀνάγκης.

337. Ἡ διαχάραξις αὕτη ἐστὶν εἰδικὴ περίστασις, διότι ἔκκεντρα κυρίως καλοῦνται τὰ καμπυλόσχημα ὧν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης ἀπέχουσιν ἀνισάκις τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς, ὥστε καὶ ὁ κύκλος δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἔκκεντρον, ὁπόταν τὸ κέτρον τῆς περιστροφικῆς κινήσεως δὲν συμπίπτῃ μετὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἡ διαδρομὴ παντὸς ἐκκέντρου ἰσοῦται πάντοτε τῇ διαφορᾷ τῆς ἀκτῖνος τοῦ μᾶλλον ἀπέχοντος τοῦ κέντρου σημείου, πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ μᾶλλον πλησίον τούτου εὑρισκομένου τοιούτου. Πρὸς

μεταβολὴν ἢ διακοπὴν τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομικῆς κινήσεως ἐν τῇ ἰδίᾳ περιστροφῇ τοῦ ἐκκέντρου, χαράσσονται μέρη τινὰ τῆς περιφερείας του συγκεντρικὰ (Σχ. 216), ὥστε διερχομένων κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐκκέντρου τῶν τόξων αϐ καὶ γδ, οὐδεμία μεταδίδεται κίνησις, θέλει δ' αὕτη ἐπαναληφθῇ καθ' ἣν στιγμὴν ἔλθῃ πάλιν εἰς ἐπαφὴν ἡ ἐκκεντρικότης. Ὅθεν διὰ καταλλήλου διαχαράξεως τοῦ ἐκκέντρου δύναται κατὰ βούλησιν νὰ μεταδίδεται κίνησις συνεχὴς ἢ διαλείπουσα.

338. *Μετάδοσις συνεχοῦς περιστροφικῆς κινήσεως, διὰ κινήσεως ἐπίσης συνεχοῦς περιστροφικῆς.* Οἱ ἐμπλεκτικοὶ τροχοί, οἱ ἀτέρμονες ἱμάντες, εἰσὶ παραδείγματα τῆς μεταδόσεως ταύτης.

Τὸ (Σχ. 217) δεικνύει τὸν τρόπον τῆς μεταδόσεως τοιαύτης κινήσεως ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ (Σχ. 218) ἐν ἐπιπέδῳ καθέτῳ τῷ ἀρχικῷ.

Ἡ μεταβολὴ συνεχοῦς περιστροφικῆς κινήσεως, εἰς κίνησιν συνεχῆ ἐπίσης περιστροφικήν, κατορθοῦται καὶ διὰ τροχαλιῶν ἢ διὰ τῶν κατ' ἐναλλαγὴν λεγομένων κώνων (Σχ. 219), διατιθεμένων τοῦ ἑνὸς κάτωθεν τοῦ ἑτέρου, πρὸς ῥύθμησιν τῆς ἐντάσεως τοῦ ἱμάντος. Διὰ τοῦ συστήματος τούτου προξενεῖται τροποποίησις εἰς τὴν ταχύτητα τῆς κινήσεως, καθ' ὅσον ὁ ἱμὰς ὠθούμενος διὰ δικράνου δεξιόθεν ἢ ἀριστερόθεν, ὀλισθαίνει ἐπὶ κύκλων μεγαλειτέρων ἢ μικροτέρων.

339. *Μετατροπὴ συνεχοῦς περιστροφικῆς κινήσεως εἰς περιστροφικὴν παλινδρομικήν.* Τὸ (Σχ. 220) παρέχει δύο παραδείγματα τοιαύτης μετατροπῆς. Ἐν τῷ πρώτῳ τροχὸς περιστρεφόμενος φέρων ὀδόντας, μεταδίδει παλμικὴν κίνησιν εἰς σφύραν ϐ περὶ τὸ κέντρον αὐτῆς γ, δι' ἧς αὕτη καταπίπτει συνεχῶς ἐπὶ τοῦ ἄκμονος δ. Ἡ ἀπόστασις τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ ἐστὶ τοιαύτη ὥστε ἡ σφύρα νὰ καταπίπτῃ ἐπὶ τοῦ ἄκμονος, πρὶν ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μετ' αὐτῆς ὁ ἀκόλουθος ὀδούς. Ἐν τῇ δευτέρᾳ οἱ ὀδόντες δὲν ἐνεργοῦσι διὰ θλίψεως, ἀλλ' ἀνασηκόνουσι τὴν σφύραν ἀφίνοντες αὐτὴν νὰ καταπέσῃ.

Στρόφαλος ἐνεργῶν ἐπὶ ἀντισηκωτῆρος, παράγει τὴν αὐτὴν μετατροπὴν κινήσεως.

340. *Μετατροπὴ κινήσεως εὐθυγράμμου παλινδρομικῆς, εἰς*

κίνησιν περιστροφικὴν παλινδρομικήν, καὶ ἀντιστρόφως. Ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς ἡ εὐθύγραμμος παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ ἐμβολέως, παράγει τὴν περιστροφικὴν παλινδρομικὴν κίνησιν τοῦ ἀντισηκωτῆρος. Ἡ μετάδοσις αὕτη τῆς κινήσεως, ἐκτελεῖται διὰ τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ Ὀυάτ, ὅπερ χρησιμεύει ἵνα τηρῇ τὸν μίσχον κατακόρυφον, καίπερὶ οὗ κατωτέρω.

241. *Φυσητῆρες*. Οἱ φυσητῆρες χρησιμεύουσιν πρὸς ἀναζωπύρωσιν τοῦ πυρὸς διὰ τῆς επ' αὐτοῦ ἰσχυρᾶς πνοῆς ποσότητός τινος ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος. Ὁ κοινώτερος τῶν φυσητήρων, συνίσταται εἰς δύο ξυλίνους πλάκας ἀποληγούσας εἰς βραχίονας Α καὶ Β (Σχ. 221), καὶ προσαρμοζομένας μεταξύ των διὰ σκυτίνου περιφράγματος, ὥστε τὸ μεταξὺ αὐτῶν διάστημα Γ ἐστὶ στεγανῶς κεκλεισμένον. Ὀπὴ Δ ἐν τῇ κάτῳ πλακί, ἐμφράττεται διὰ σκυτίνου ἐπικλείστρου ὅπερ κλείεται καλῶς πιεζομένου τοῦ ἐσωτερικοῦ ἀέρος, ἀνοίγει δὲ ἀραιουμένου τούτου διὰ τῆς ἐξωτερικῆς ἀτμοσφαιρικῆς θλίψεως πρὸς εἰσχώρησιν ἐξωτερικοῦ ἀέρος. Τὸ παρασκεύασμα λήγει εἰς κωνικὸν σωλῆνα δι' οὗ ἐξέρχεται ὁ θλιβόμενος ἀὴρ πρὸς ἀναζωπύρωσιν τοῦ πυρός. Πιεζομένης τῆς πλακὸς Β, πιέζεται ὁ ἐσωτερικὸς ἀὴρ ὅστις ἐξέρχεται μεθ' ὁρμῆς διὰ τοῦ σωλῆνος. Ὁπόταν δὲ ἀνυψωθῇ ἡ πλὰξ αὕτη, ὁ ἐξωτερικὸς ἀὴρ εἰσέρχεται διά τε τοῦ κώνου Ε καὶ τῆς ὀπῆς Δ. Ὅθεν ἡ ἐκροὴ τοῦ ἀέρος ἐστὶ διαλείπουσα καὶ ἔτι, εἰσερχομένου διὰ τῆς ἐκμυζήσεως ἀέρος καὶ διὰ τοῦ σωλῆνος Ε, δύναται οὗτος νὰ παρασύρῃ καὶ τὴν φλόγα πρὸς τὰ ἐνδότερα τοῦ φυσητῆρος. Πρὸς ἀποφυγὴν τῶν ἀτόπων τούτων, κατασκευάζεται διπλοῦς φυσητὴρ ὡς ἐν τῷ (Σχ 222) καταδείκνυται. Τὰ δύο ἐπίκλειστρα Δ καὶ Ε ἀνοίγουσι πρὸς τὰ ἄνω. Διὰ τῆς τοιαύτης διατάξεως τοῦ φυσητῆρος ἥτις ἐστὶν ἄλλως τε ἁπλουστάτη καὶ κοινὴ παρ' ἅπασι τοῖς σιδηρουργοῖς, ἀποκτᾶται ῥεῦμα συνεχὲς καὶ ταχὺ ἀέρος.

342 Πρὸς ἐμφύσησιν ἰσχυροῦ ῥεύματος ἀέρος ἐν τοῖς καμίνοις τῶν βαναυσείων, γίνεται χρῆσις διαφόρων φυσητηρίων μηχανῶν, κινουμένων δι' ὑδραυλικῶν τροχῶν ἢ δι' ἀτμοῦ.

Καὶ ἄλλοτε μὲν αἱ μηχαναὶ αὗται εἰσὶ μέγιστοι φυσητῆρες ὡς ὁ ἄνω περιγραφείς, ἄλλοτε δὲ πνευματικαὶ μηχαναὶ καθ' ὅλα ὅμοιαι ταῖς ὑδραντλίαις. Ἐν τοῖς τελευταίοις τούτοις, ὁ ἐκ τῆς ἀτ-

μοσφαίρας ἀντλούμενος ἀὴρ, συνθλίβεται πρὸς σωλῆνας οἵτινες φέρουσιν αὐτὸν εἰς τὰ διάφορα στόμια ἀφ' ὧν ἐξέρχεται.

343. *Ἀνεμιστήρ*. Ἐὰν ὁ ἄξων κενοῦ τινος κεκλεισμένου κυλίνδρου φέρει ταρσοὺς, καὶ περιστραφῇ ταχέως, οἱ ταρσοὶ συμπαρασύροντες τὸν ἀέρα συνθλίβουσιν αὐτὸν πρὸς τὴν περιφέρειαν ἕνεκα τῆς κεντροφύγου δυνάμεως, καὶ ἀπομακρύνουσιν αὐτὸν τοῦ κέντρου. Ὅθεν ἐὰν ὑπάρχουσι δύο ὀπαὶ, ἡ μὲν παρὰ τὸ κέντρον, ἡ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας, φανερὸν ὅτι περιστρεφομένων ταχέως τῶν ταρσῶν, θέλει σχηματισθῇ συνεχὲς ῥεῦμα ἀέρος εἰσερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἐξερχόμενον διὰ τῆς περιφερείας. Ἡ τοιοῦτον ῥεῦμα παράγουσα μηχανὴ καλεῖται *ἀνεμιστήρ*.

Ἐνίοτε οἱ ταρσοὶ εἰσὶν ἐπίπεδοι καὶ διατίθενται κατὰ τὰς ἀκτίνας τοῦ κυλίνδρου ἐν ᾧ περιστρέφονται, ὡς συμβαίνει ἐν τῇ πρὸς κάθαρσιν τῶν σταφίδων κοινῇ μηχανῇ, ἧς τὴν ἐσωτερικὴν διάταξιν δεικνύει τὸ (Σχ. 223). Τὸ παραγόμενον ἐκ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τοῦ ταρσοῦ ῥεῦμα, παρασύρει τὰς κόνεις καὶ ἐλαφρὰς ὕλας διαχωρίζον αὐτὰς τοῦ καθαροῦ κόκκου ὅπερ τὸ ῥεῦμα δὲν ἐπιῤῥεάζει τοσοῦτον εὐκόλως, καθ' ὅσον ἐν ἴσῃ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ βαρύτερος.

344. Τὸ (Σχ. 224) παριστᾷ τὸν συνήθη ἐν χρήσει ἐν τοῖς καμίνοις τῶν βαναυσείων ἀνεμιστῆρα. Οἱ ταρσοὶ κάμπτονται ἐλαφρῶς κατ' ἀντίθετον ἔννοιαν τῆς κινήσεως, ἵνα δι' αὐτῶν ὀλισθαίνῃ εὐκολώτερον ὁ ἀὴρ εἰσερχόμενος εἰς τὸν σωλῆνα τῆς ἐκροῆς. Οἱ τοιοῦτοι ἀνεμιστῆρες κινούμενοι μετὰ μεγίστης ταχύτητος, παρέχουσι ῥεῦμα ἀέρος μεγάλης κανονικότητος.

345. *Ἀνεμιστὴρ δι' ὕδατος*. Ἡ μηχανὴ αὕτη σύγκειται ἐκ κατακορύφου ξυλίνου σωλῆνος (Σχ. 225), δι' οὗ κατέρχεται τὸ ὕδωρ ἐκδοχείου τινος ὑψηλοῦ. Ὁ σωλὴν οὗτος φέρει χώνην δι' ἧς εἰσέρχεται τὸ ὕδωρ, ὥστε τοῦτο μὲ πληροῦν τὸν σωλῆνα, παρασύρει κατὰ τὴν κίνησίν του τὸν περὶ αὐτὸν ἀέρα, ὅστις συνεχῶς εἰσερχόμενος διὰ τῶν ὀπῶν ΑΑ, παρασύρεται διὰ τῆς τοῦ ὕδατος πτώσεως, δι' ὃ ὁ σωλὴν πληροῦται διὰ μίγματος ὕδατος καὶ ἀέρος. Ὁ σωλὴν καταλήγει εἰς κεκλεισμένον πυξίον Β, ἐντὸς τοῦ ὁποίου καταπίπτει τὸ ὕδωρ τοῦ σωλῆνος ἐπὶ πινακίδος, ἥτις διευκολύνει τὸν χωρισμὸν τοῦ ἀέρος ἐκ τοῦ ὕδατος. Ὁ ἀὴρ καταλαμ-

βάνει τὸ ἀνώτερον μέρος τοῦ πυξίου, καὶ ἐστὶ πυκνότερος τοῦ τῆς ἀτμοσφαίρας, ὥστε διὰ τῆς ὑπεροχῆς τῆς ἐλαστικότητος αὐτοῦ παράγει ῥεῦμα ἐξερχόμενον διὰ τοῦ σωλῆνος Δ. Τὸ ἐν τῷ πυξίῳ ὕδωρ ἐκρέει συνεχῶς διὰ τῆς παρὰ τὴν πινακίδα ὀπῆς Γ.

346. *Μηχανικὸς πρίων.* Ὁ πρὸς πρίσιν τῆς ξυλείας μηχανικὸς πρίων, δύναται νὰ τεθῇ εἰς κίνησιν δι' ὕδατος ἀέρος, ἢ ἀτμοῦ. Ἡ δι' ὕδατος κίνησις ἐστὶν ἡ συνηθεστέρα ἐν ὀρεινοῖς τόποις, ἐν οἷς ὑπάρχουσι συχναὶ ὕδατος καταπτώσεις, αἵτινες θέτουσιν εἰς κίνησιν στρόβιλον, ἐξ οὗ αὕτη μεταδίδεται εἰς τὸ ἐπίλοιπον μηχάνημα. Διὰ τῶν μηχανικῶν πριστηρίων πρίονται δοκοί, σανίδες, ἢ λεπτὰ ἐμβλήματα (καπλαμάδες). Ἡ διαφορὰ τῶν πρὸς πρίσιν ἑκατέρων τούτων πριστηρίων συνίσταται εἰς τὴν διάταξιν καὶ τὸ εἶδος τῶν πριόνων. Ἡ διάταξις τοιούτου πριστηρίου πρὸς πρίσιν ἐμβλημάτων ἔχει ὡς ἑξῆς.

Ὁ δεχόμενος τὴν ἐνέργειαν τοῦ ὕδατος στρόβιλος, περιστρέφει ὁριζόντειον ἄξονα, κατέχοντα ἅπαν τὸ μῆκος τοῦ συνεργείου. Κατ' ἀποστάσεις ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου εὑρίσκονται τύμπανα Α (Σχ. 226), φέροντα ἀτέρμονας ἱμάντας πρὸς μετάδοσιν τῆς κινήσεως τοῦ ἄξονος εἰς τὰ μηχανήματα τῶν πριόνων. Ἕκαστος ἀτέρμων ἱμὰς περιβάλλει καὶ δεύτερον τύμπανον Β μικροτέρας διαμέτρου τῆς τοῦ Α, καὶ μεταδίδει εἰς τοῦτο ταχεῖαν περιστροφικὴν κίνησιν. Ἡ τοῦ ἱμάντος ἔντασις δέον νὰ ἦναι τοιαύτη ὥστε νὰ μὴν ὀλισθαίνει ἐπὶ τῶν τυμπάνων, ὅθεν πρὸς τοῦτο ἡ ἔντασις ῥυθμίζεται διὰ τοῦ ἐλευθέρως περιστρεφομένου πέριξ τοῦ σημείου Δ κανόνος ΓΔ, ὅστις εἰς Γ φέρει τροχαλεῖον ἐρειδόμενον ἐπὶ τοῦ ἱμάντος καὶ συστρεφόμενον μετ' αὐτοῦ. Ἵνα σταματήσῃ τὸ συγκοινωνοῦν μετὰ τοῦ τυμπάνου Β μηχάνημα, ἀρκεῖ ν' ἀνυψωθῇ ὁ κανὼν ΓΔ, ὁπότε ἕνεκα τῆς χαλαρώσεως τοῦ ἱμάντος σταματᾷ ἡ κίνησις τοῦ τυμπάνου Β.

Τροχὸς Ε ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ τυμπάνου Β εὑρισκόμενος, συνδέεται διὰ μιᾶς τῶν ἀκτίνων του διὰ γόμφου μετὰ τῆς ῥάβδου ΖΘ, ἥτις ἐναρθρουμένη εἰς Θ πρὸς τὸ πλαίσιον τοῦ πρίονος, τίθεται εἰς κίνησιν διὰ τοῦ τροχοῦ οὕτως ὥστε τὸ ἄκρον του λαμβάνει κίνησιν παλινδρομικὴν κατὰ τὴν ὁριζόντειον ΜΝ.

Τὸ ὁριζόντειον πλαίσιον τοῦ πριστηρίου, ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιον, φέρει δ' ἐν μέσῳ κατὰ μῆκος μεσόδμην ΗΗ (Σχ. 227). Ἡ

πρὸς τὰ ὄπισθεν τῆς μεσόδμης ΗΗ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου, ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἐλάσματος τοῦ πρίονος Ι, οὗ τὰ δύο μέτωπα εἰσὶ κατακόρυφα, οἱ δ' ὀδόντες πρὸς τὰ κάτω ἐστραμμένοι. Ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου, εὑρίσκεται σιδηρὰ ῥάβδος ἔμπροσθεν τῆς μεσόδμης ΗΗ καὶ ἧς τὰ ἄκρα φέρουσι κοχλίας διὰ τῶν περικοχλίων τῶν ὁποίων ἐκτείνεται κατὰ μῆκος τὸ ἔλασμα τοῦ πρίονος. Πρὸς τὸ ἔμπροσθεν μέτωπον τοῦ ἐλάσματος τοῦ πρίονος εὑρίσκεται λοξότμητον τεμάχιον σιδήρου Κ, ὅπερ ἐρειδόμενον πρὸς αὐτὸ τηρεῖ διαρκῶς τὸ ἔλασμα τοῦτο τοῦ πρίονος ἐν τῇ αὐτῇ θέσει, κατὰ τὴν μεταδιδομένην αὐτῷ ὑπὸ τῆς ῥάβδου ΘΖ ταχεῖαν παλινδρομικὴν κίνησιν. Ἡ κίνησις τοῦ πλαισίου ῥυθμίζεται διὰ σιδηρῶν γλωσσιδίων ὀλισθαινόντων ἐντὸς παγίων ἀναπαυστηρίων, πρὸς ὑποστήριξιν τοῦ μηχανήματος.

Ἕνεκα τοῦ τρόπου τῆς διατάξεως τοῦ πρίονος, ἀδυνατεῖ οὗτος ν' ἀνέλθῃ ἢ κατέλθῃ κατὰ τὴν παλινδρομικήν του κίνησιν, ὅθεν καθίσταται ἐπάναγκες ἵνα τὸ πριζόμενον τεμάχιον ξύλου μετατοπίζεται ὅπως οἱ ὀδόντες τοῦ πρίονος ἐφάπτονται συνεχῶς τοῦ πρίσματος. Πρὸς τοῦτο τὸ τεμάχιον ξύλου Χ προσκολλᾶται ἰσχυρῶς ἐπὶ πλαισίου ψ ψ (Σχ. 228) ὅπερ πάλιν προσκολλᾶται ἐπὶ τοῦ πλινθίου υ υ (Σχ. 227) κινουμένου κατακορύφως, καὶ ῥυθμιζομένης τῆς κινήσεώς του ταύτης διὰ σιδηρῶν γλωσσιδίων ὀλισθαινόντων ἐντὸς ἀναπαυστηρίων, ὡς τὸ ὁριζόντειον πλαίσιον τοῦ πρίονος. Ῥάβδος Λ ἐνάρθρως συνδεομένη μετὰ τοῦ ἄκρου τοῦ πλαισίου τοῦ πρίονος, διαπερᾶται κατὰ τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων διὰ τοῦ σιδηροῦ μίσχου Μ καμπτομένου ὁριζοντείως πρὸς τοῦτο. Τὰ δύο σιδηρὰ τεμάχια Μ καὶ Ν ἀποτελοῦσιν οὕτω τοὺς δύο βραχίονας ἀγκωνωτοῦ μοχλοῦ στρεφομένου περὶ τὸ σημεῖον Ο, εἰς τρόπον ὥστε ἡ παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ πλινθίου τοῦ πρίονος, παράγει διὰ τῆς ῥάβδου Λ, καὶ τοῦ μοχλοβραχίονος Μ, τὴν παλμικὴν κίνησιν τοῦ μοχλοβραχίονος Ν περὶ τὸ σημεῖον Ο. Τὸ ἄκρον τοῦ μοχλοβραχίονος Ν, συνδέεται ἐνάρθρως πρὸς τὸν μίσχον Π, ὅστις καταλήγων εἰς χηλὴν (γιδόποδο) δι' ἧς ἐμπλέκεται μετὰ τῶν ὀδόντων ἐμπλεκτικοῦ τινος τροχοῦ ω, τηρεῖται ἐν τῇ θέσει ταύτῃ διὰ μεγάλου ἐλατηρίου, ὠθοῦντος αὐτὸν πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ τροχοῦ. Ἑτέρα χηλὴ Ρ, ἐνάρθρως προσαρμοσμένη πρὸς πάγιόν τι σημεῖον, ἐμπλέ-

κεται ἐπίσης μετὰ τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ ω ὠθουμένη ἐπίσης ὑπὸ μικροῦ τινος ἐλατηρίου. Συνεπείᾳ τῶν συνεχῶν παλμικῶν κινήσεων τοῦ μοχλοβραχίονος Ν, ἡ χηλὴ Π ἀναβοκαταβαίνει διαδοχικῶς, ὥστε ἀνυψουμένη μὲν ὀλισθαίνει ἐπὶ τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ ω, κατερχομένη ὅμως ἐμπλέκεται πρὸς ἕνα τῶν ὀδόντων καὶ ἀναγκάζει αὐτὸν νὰ κατέλθῃ, ὅπερ προξενεῖ τὴν περιστροφὴν τοῦ τροχοῦ. Ἡ χηλὴ Ρ χρησιμεύει μόνον ἵνα κωλύει τὸν τροχὸν ω πάσης ἀντιθέτου κινήσεως, ἐνόσῳ ἀνέρχεται ἡ χηλὴ Π. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ τροχοῦ ω ὑπάρχει ἀστερίσκος Σ ἐμπλεκόμενος μετὰ ὀδοντωμένου κανόνος Τ ἐπὶ τῆς πλίνθου υυ εὑρισκομένου. Κινουμένου ἤδη τοῦ πρίονος παλινδρομικῶς, τὸ τεμάχιον ξύλου ἐφ' οὗ οὗτος ἐνεργεῖ, καὶ ὅπερ ἐςὶ παγίως προσκεκολλημένον ἐπὶ τῆς πλίνθου υυ, ἀνέρχεται βραδέως καὶ διαλειπόντως, ὥστε ὁ πρίων εἰσδύων ἐν τῷ ξύλῳ διαχωρίζει αὐτό.

Ἐπειδὴ τὰ φύλλα τῶν ἐμβλημάτων, (καπλαμάδων) εἰσὶ λεπτότατα, προχωροῦντος τοῦ πρίονος κάμπτονται καὶ δὲν ὑποβαστάζονται, ὥστε πρὸς θεραπείαν τούτου, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἔλασμα τοῦ πρίονος φέρει τὸ λοξότμητον τεμαχιον σιδήρου Κ (Σχ. 228) δι' οὗ ἀποσπᾶται τὸ πρισθὲν φύλλον, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑποβαστάζεται τοῦτο, διὰ τοξοειδοῦς χονδροῦ σύρματος οὗ τὰ καμφθέντα ἄκρα δράττουσι τὰ πλάγια μέτωπα τοῦ τεμαχίου τοῦ πριζομένου ξύλου.

Ἅπαν τὸ ὑποβασταζόμενον διὰ τῆς πλίνθου υυ παρασκεύασμα δύναται νὰ κινῆται ἐκ τῶν ὄπισθεν πρὸς τὰ ἔμπροσθεν τῇ συνεργείᾳ δύο ἐπιμήκων κοχλιῶν, εἰς τὰ ἄκρα ΦΦ τῶν ὁποίων εὑρίσκονται δύο ἐμπλεκτικοὶ τροχοὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου (Σχ. 227). Ἀτέρμων ἅλυσος περιβάλλει τοὺς δύο τούτους τροχοὺς εἰς τρόπον ὥστε περιστρεφομένου τοῦ ἑνός, περιστρέφεται καὶ ὁ ἕτερος κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν. Ἡ περιστροφὴ αὕτη ἐνεργεῖται διὰ στροφάλου. Ὅθεν διὰ τοῦ στροφάλου τούτου περιστρέφονται οἱ δύο κοχλίαι οἵτινες εἰσὶν οὕτω διατεθειμένοι ὥστε δὲν δύνανται νὰ μετατοπισθῶσι κατὰ μῆκος, τούτου δ' ἕνεκα τὰ περικόχλια ἀναγκαζόμενα νὰ κινηθῶσι πρὸς τὰ ἔμπροσθεν ἢ πρὸς τὰ ὄπισθεν καθ' ὅσον ὁ στρόφαλος περιστρέφεται κατὰ μίαν ἢ κατ' ἄλλην ἔννοιαν, παρασύρουσιν εἰς τὴν κίνησίν των ταύτην τὴν πλίνθον υυ ἐφ' ἧς εἰσὶ προσκεκολλημένα. Διὰ τοῦ μηχανήματος τούτου ῥυθμίζεται τὸ πάχος τῶν πριζομέ-

νων φύλλων, ὅπερ δύναται νὰ ᾖ ἐλάχιστον κατὰ τὴν κατὰ βούλησιν μετακίνησιν τῆς πλίνθου.

347. Τοῦ τυμπάνου Α (Ζχ. 226) ἐκτελοῦντος 55 περιστροφὰς κατὰ λεπτόν, καὶ τῆς διαμέτρου του οὔσης πενταπλασίας τῆς τοῦ Β, ἕπεται ὅτι τοῦτο θέλει ἐκτελέσει 275 περιστροφὰς κατὰ λεπτόν, ἑπομένως τοσαύτας παλινδρομήσεις ἐκτελεῖ καὶ ὁ πρίων. Δι' ἑκάστην παλινδρόμησιν τούτου τὸ τεμάχιον ξύλου ἀνέρχεται $\frac{1}{2}$ χιλιοστὸν περίπου. Τοιοῦτος πρίων δύναται νὰ παράξῃ 36$^{τ.μ.}$ φύλλων ἐμβλήματος καθ' ἡμέραν. Ἡ διὰ τῶν κοχλιῶν ΦΦ ἑκάστοτε μετακίνησις τοῦ ξύλου ἐστὶ 0,001—0,002, καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀπώλεια (φύρα) τοῦ πρίσματος ἐστὶ 50 τοῖς 100, ἕπεται ὅτι ἕκαστον πριόμενον φύλλον ἐστὶν ἡμίσεως χιλιοστοῦ πάχους.

348. Οἱ πρὸς πρῖσιν σανίδων μηχανικοὶ πρίονες, διατίθενται κατακορύφως καὶ κινοῦνται βραδύτερον τῶν πρὸς πρίσιν ἐμβλημάτων τοιούτων. Ἡ ταχύτης αὐτοῦ δὲν ὑπερβαίνει τὰς 120 ἕως 140 παλινδρομήσεις κατὰ λεπτόν. Ἡ ἄνοδος τοῦ ξύλου δι' ἑκάστην παλινδρόμησιν τοῦ πρίονος ἐστὶ 2—5 χιλιοστῶν, ἀναλόγως τῆς σκληρότητος τοῦ ξύλου.

349. Ὑπάρχουσιν ἐν χρήσει καὶ κυκλικοὶ πρίονες, ἐνεργοῦντες περιστρεφόμενοι κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε ἔννοιαν, ἐνῷ οἱ εὐθεῖς κινοῦνται ἀναγκαίως παλινδρομικῶς. Διὰ τῶν κυκλικῶν πριόνων πρίζονται ξύλα καὶ μέταλλα. Οἱ κυκλικοὶ πρίονες ἔχουσι ταχύτητα 400 ἕως 600 περιστροφῶν κατὰ λεπτόν, ἡ δὲ διάμετρος αὐτῶν ἐστὶ 0,3 μέχρις 1,00$^{μ.}$

Ἡ πεῖρα ἀπέδειξεν ὅτι παλινδρομικὸς συνήθης πρίων ταχύτητος 120 παλινδρομήσεων κατὰ λεπτόν, καὶ διαδρομῆς 0,60, τουτέστι ταχύτητος 2,40$^{μ.}$ κατὰ δευτερόλεπτον, πρίζει καθ' ὥραν 7,80$^{τ.μ.}$ σανίδος ἐλάτης· ὁ αὐτὸς δὲ πρίων πρίζει ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ 2,80$^{τ.μ.}$ διπλάκων (μαδερίων) δρυΐνων. Κυκλικὸς δὲ πρίων 0,70 διαμέτρου ἐκτελῶν 266 περιστροφὰς κατὰ λεπτὸν πρίζει εἰς μίαν ὥραν 10,80 $^{τ.μ.}$ δρυός, ἐκτελῶν δὲ 244 περιστροφὰς πρίζει 45 $^{τ.μ.}$ σανίδων δρυὸς ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, τουτέστι τὸ τετραπλάσιον παλινδρομικοῦ πρίονος πρὸς πρίσιν μικρῶν ξύλων.

350. *Ἀλευρόμυλος*. Ἡ ἐκ τῶν κόκκων τοῦ σίτου ἐξαγωγὴ τοῦ ἀλεύρου γίνεται διὰ τῆς μεταξὺ δύο λίθων συντρίψεως αὐτῶν. Διὰ

τοῦ μέσου τούτου ἕκαστος κόκκος συντρίβεται, καὶ κατόπιν διὰ τοῦ σήστρου (σίτας) ἀποχωρίζεται τὸ ἄλευρον τῶν πιτύρων.

Οἱ πρὸς σύντριψιν τοῦ σίτου μυλόλιθοι τίθενται εἰς κίνησιν δι' ἵππου, ὕδατος ἢ ἀτμοῦ. Τὰ (Σχ. 229 καὶ 230) παριστῶσι τὸ μηχάνημα δι' οὗ τίθενται οὗτοι εἰς κίνησιν δι' ὕδατος.

Ὑδραυλικὸς τροχὸς θέτει εἰς κίνησιν τὸν ἄξονα Α (Σχ. 229), ὅστις μεταδίδει τὴν κίνησιν αὐτοῦ εἰς ἕτερον κατακόρυφον (300) Β, διὰ κωνικῶν ἐμπλεκτικῶν τροχῶν. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος Β εὑρίσκεται μέγας ἐμπλεκτικὸς τροχὸς ὁριζόντειος Γ, ὅστις θέτει εἰς κίνησιν δύο μυλολίθους διὰ μέσου δύο μικροτέρων ἐμπλεκτικῶν τροχῶν Δ καὶ Ε (Σχ. 230), ἕκαστος τῶν ὁποίων δύναται νὰ ὀλισθήσῃ κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος ἐφ' οὗ εὑρίσκεται, φερθεῖσα δ' εἰς τὴν ὡρισμένην θέσιν σφηνοῦται ἐπὶ τούτου ἵνα τηρῆται αὐτόσε, ὥστε οἱ τροχοὶ Δ καὶ Ε φερόμενοι εἰς τὸ ὕψος τοῦ μεγάλου τροχοῦ Γ, ἐμπλέκονται μετ' αὐτοῦ. Ἐν τῷ σχήματι, ὁ τροχὸς Δ εὑρίσκεται εἰς τὸ ὕψος τοῦ τροχοῦ Γ καὶ ἐμπλέκεται μετ' αὐτοῦ, ἐνῷ ὁ Ε μὴ εὑρισκόμενος εἰς τὸ ὕψος τοῦ Γ, οὐδεμίαν κίνησιν δέχεται, καὶ ὁ ἄξων ἐφ' οὗ εὑρίσκεται ἠρεμεῖ, ὥστε οὕτω κατὰ βούλησιν δύνανται νὰ τεθῶσιν εἰς κίνησιν ἀμφότεροι οἱ μυλόλιθοι ἢ μόνον ὁ εἷς τούτων. Τὸ (Σχ. 230) δεικνύει ἀμφοτέρους τοὺς μυλολίθους, καὶ τὸ μὲν πρὸς ἀριστερὰν μέρος τοῦ σχήματος ἐστὶ διατομὴ δεικνύουσα τὴν σχετικὴν διάταξιν τῶν δύο μυλολίθων ἐν οἷς συντρίβεται ὁ σῖτος, τὸ δὲ πρὸς δεξιὰ δεικνύει εἰς πρόοψιν τὸ ξύλινον περίφραγμα ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται οἱ μυλόλιθοι, καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ ἐπ' αὐτῶν παρασκεύασμα ἐν ᾧ τίθεται ὁ σῖτος.

Ὁ ἄξων Ζ ἐφ' οὗ εὑρίσκεται ὁ τροχὸς Ε διαπερᾷ πρῶτον πάγιον μυλόλιθον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄκρου του φέρει τὸν δεύτερον τοιοῦτον ὅστις καλεῖται *περιστρεφόμενος*. Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τούτου, δέον νὰ συμπίπτῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἵνα τηρῆται οὗτος ὁριζόντειος, καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο μυλολίθων μένῃ ἡ αὐτή. Ἡ ὁριζοντείωσις ἐκτελεῖται διὰ προσθήκης γύψου ἀντιθέτως τῶν μερῶν πρὸς ἃ κλίνει, ἄχρις οὗ οὗτος μένει ὁριζόντειος. Ἡ ρύθμησις τῆς μεταξὺ τῶν δύω μυλολίθων ἀποστάσεως ἐκτελεῖται διὰ κοχλίου κάτωθεν τοῦ ἄξονος Ζ εὑρισκομένου.

Ὁ πρὸς σύντριψιν σῖτος τίθεται ἐντὸς χώνης 1 κάτωθεν τῆς ὁποίας

ὑπάρχει ὀπὴ ἧς τὸ ἄνοιγμα ῥυθμίζεται κατὰ βούλησιν. Ἀμέσως κάτωθεν τῆς χώνης, ὑπάρχει σκαφίδιον Λ κρεμάμενον, καὶ ὑποκείμενον εἰς παλμικὰς κινήσεις τῇ ἐνεργείᾳ τῶν ὠτίων Κ εὑρισκομένων ἐπὶ τῆς παρατάσεως τοῦ ἄξονος τοῦ περιστρεφομένου μυλολίθου. Τὰ ὠτία ταῦτα κρούοντα ἐγκαρσίως τὸ σκαφίδιον Λ, προξενοῦσι τὴν ἐκροὴν μικρᾶς ποσότητος τοῦ ἐν τῇ χώνῃ Ι ὑπάρχοντος σίτου, ὅστις κατ' ὀλίγον εἰσδύων εἰς κεντρικὴν ἐν τῷ περιστρεφομένῳ μυλολίθῳ ὀπὴν, φθάνει εἰς τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν τοῦ παγίου μυλολίθου καὶ εὑρίσκεται οὕτω μεταξὺ τῶν προστριβομένων ἐπιφανειῶν τῶν μυλολίθων. Ἡ κεντρικὴ ὀπὴ τοῦ παγίου μυλολίθου ἐν ᾗ περιστρέφεται ὁ ἄξων Ζ περιβάλλεται μὲ ἐρέαν καὶ σκῦτος, ἵνα μὴ δι' αὐτῆς καταπίπτουσιν οἱ κόκκοι τοῦ σίτου. Κωδωνίσκος γ διατίθεται καταλλήλως ὅπως εἰδοποιεῖ τὸν μυλωθρὸν ὅτι ἡ χώνη δὲν ἐμπεριέχει πλέον σῖτον. Ὁ κωδωνίσκος προσδέεται διὰ νήματος εἰς ξύλινον ἀβάκιον ϐ, ὅπερ διαπερᾶται ὑπὸ κατακορύφου σιδηροῦ μίσχου ἐφ' οὗ ὀλισθαίνει κατὰ μῆκος, καὶ περὶ τὸ ὁποῖον περιστρέφεται ἐλευθέρως, ὑποβαστάζεται δὲ δι' ἑτέρου νήματος ὅπερ εἰσδύει ἐν τῇ χώνῃ περιβάλλον τροχαλίαν, καὶ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου προσαρμόζεται μικρὸν τεμάχιον ξύλου. Τὸ τεμάχιον τοῦτο τοῦ ξύλου τίθεται ἐντὸς τοῦ σίτου, ἔνθα ἐνόσῳ ἡ ποσότης αὐτοῦ ἐστὶν ἀρκοῦσα, ὑποβαστάζει τὸν ἄβακα ϐ εἰς κατάλληλον ὕψος, πλὴν ὅταν ὁ ἐν τῇ χώνῃ σῖτος πλησιάζει νὰ ἐκλείψῃ, ὁ ἄβαξ κατέρχεται, τὸ δὲ τεμάχιον ξύλου μὴ σκεπαζόμενον πλέον ὑπὸ κόκκων σίτου ἀνέρχεται. Δάκτυλος α, εὑρισκόμενος ἐπὶ τῆς παρατάσεως τοῦ ἄξονος τοῦ περιστρεφομένου μυλολίθου, καὶ συμπεριστρεφόμενος μετ' αὐτοῦ, κρούῃ τὸν ἄβακα ϐ καθ' ἑκάστην περιστροφὴν, ὅπερ προξενεῖ τὴν ἤχησιν τοῦ κώδωνος. Ὅθεν ἡ ἤχησις αὕτη δὲν παύει παρ' ἀφοῦ ὁ μυλωθρὸς πληρώσας τὴν χώνην σίτου, εἰσχώσῃ ἐντὸς αὐτοῦ τὸ ὑποβαστάζον τὸν ἄβακα ϐ ἄνωθεν τοῦ δακτύλου α τεμάχιον ξύλου.

Τέσσαρες στῆλαι Ν, ὑποβαστάζουσι δύο ἰσχυρὰ ξύλα Π ἐφ' ὧν κεῖνται οἱ πάγιοι μυλόλιθοι. Αἱ στῆλαι αὗται καθὼς καὶ αἱ πυελίδες ἐντὸς τῶν ὁποίων εὑρίσκονται οἱ ἄξονες τῶν περιστρεφομένων μυλολίθων ἐρείδονται ἐπὶ τειχοποιΐας.

351. Ἡ διάμετρος τῶν μυλολίθων ποικίλλει συνήθως μεταξὺ

1,30—1,80μ. Ζεῦγος μυλολίθων δύναται ν' ἀλέσῃ 15—16 ἑκατόλιτρα (500 ὀκάδες περίπου) σίτου, ἐντὸς 24 ὡρῶν. Ἡ πεῖρα ἀπέδειξεν ὅτι πρὸς ἀπόκτησιν καλοῦ ἀλέσματος, ὁ κινητὸς μυλόλιθος δέον νὰ ἐκτελῇ 70 περίπου περιστροφὰς κατὰ λεπτόν. Εὐκόλως ῥυθμίζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν κατὰ λεπτὸν περιστροφῶν τοῦ ἄξονος τοῦ τροχοῦ, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀδόντων τῶν μεταδιδόντων τὴν κίνησιν αὐτοῦ εἰς τοὺς μυλολίθους ἐμπλεκτικῶν τροχῶν. Ὅθεν ὁ ὑδραυλικὸς τροχὸς διατίθεται οὕτως ὥστε ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς τοῦ ὕδατος καταπτώσεως, ν' ἀποκτήσῃ τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν ταχύτητα.

352. *Κλωστήριος*. Αἱ νηματώδεις ὕλαι ὡς ὁ βάμβαξ, τὸ λίνον, ἡ κάνναβις, ἡ μέταξα κ.λ., μεταβάλλονται εἰς κλωστὴν πρὸ τῆς δι' αὐτῶν κατασκευῆς ὑφάσματος. Δι' ἁπάσας τὰς ὕλας ταύτας, ἡ μεταβάλλουσα αὐτὰς μηχανὴ εἰς κλωστήν, ἐστὶ σχεδὸν ἡ αὐτὴ μετ' ἀναλόγων τροποποιήσεων. Ἐσχάτως αἱ κλωστήριοι μηχαναὶ ἔλαβον καὶ λαμβάνουσιν ὡσημέραι ἐν Ἀγγλίᾳ πρὸ πάντων, τεραστίαν ἀνάπτυξιν καὶ τελειοποίησιν.

Δύο κυρίως ἐργασίαι διακρίνονται ἐν τῇ κατασκευῇ τῆς κλωστῆς. Ἡ πρώτη συνίσταται εἰς τὴν προπαρασκευήν, τουτέστι τὴν διὰ πλειόνων ἐξελάσεων καὶ διπλώσεων ἀπόκτησιν κανονικοῦ νήματος, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὴν κυρίως κλωστηρίασιν τοῦ νήματος. Ἡ πρώτη τῶν ἐργασιῶν τούτων γίνεται δι' ἰδίων μηχανημάτων δι' ὧν τίθενται εἰς κίνησιν πλῆκται, ξάνια (λανάραι) καὶ κύλιστρα διαφόρων διαστάσεων πρὸς διάπλασιν νήματος κατὰ βούλησιν, ἡ δὲ δευτέρα ἐνεργεῖται διὰ τῆς ἰδίως κλωστηρίου μηχανῆς, καλουμένης παρ' Ἄγγλοις Mull-Jenny λέξεως ἀμεταφράστου ἥτις ἐγένετο παραδεκτὴ καὶ παρ' ἄλλοις ἔθνεσιν ὡς ἔχει.

Ἡ βάσις τῶν μηχανημάτων τούτων ἐστὶν ἡ αὐτὴ ὡς καὶ ἐν ταῖς ἐπιλοίποις μηχαναῖς, τουτέστιν ἡ κίνησις κυρίου ἄξονος μεταδίδεται διὰ διαφόρων συνδυασμῶν τῶν στοιχειωδῶν μηχανημάτων εἰς τὰ ἐκτελοῦντα τὴν ἐργασίαν μέρη, πλῆκτας, ξάνια, κύλιστρα καὶ τέλος εἰς τὰς ἐπὶ τῆς Mull-Jenny περόνας, ἐφ' ὧν περιστρέφονται τὰ πρὸς περιτύλιξιν τῆς κλωστῆς πηνία.

353. Ὁ ἀριθμὸς τῶν περονῶν τοιαύτης τινος μηχανῆς ποικίλλει μεταξὺ 300 καὶ 500, ὁ δὲ μέσος ὅρος τῆς παραγωγῆς 12 ἕως 15 χι-

λιόγραμμα κλωστῆς καθ' ἡμερησίαν ἐργασίαν ἐκ 12 ὡρῶν. Ὁ ἀριθ. κλωστῆς τινος ἐκ βάμβακος ἐκφράζει ποσάκις μῆκος 1000μ. αὐτῆς ἐμπεριέχεται εἰς ἓν χιλιόγραμμον βάρους, ὥστε ἡ κλωστὴ Ν° 60 ἔχει 60,000 μέτρων μήκους ἐν ἑκάστῳ χιλιογράμμῳ τοῦ βάρους αὐτῆς. Ὅθεν ὁ ἀριθμὸς κλωστῆς τινος ἐστὶ τοσοῦτον ἀνώτερος, ὅσον ἡ κλωστὴ ἐστὶ λεπτοτέρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣΤ'.

Περὶ ἀντιστάσεως ὑλῶν. — Περὶ Λεβήτων.

354. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀντιστάσεως τῶν διαφόρων μερῶν μηχανῆς τινος, ἐστὶν ἓν τῶν δυσκολωτέρων ἀντικειμένων τῆς μηχανικῆς, ἕνεκα τῶν διαφόρων συνιστωσῶν αὐτὰ ὑλῶν. Μολοντοῦτο ἐπανειλημμένα πειράματα παρῆξαν συντελεστὰς ἀντιστάσεως τῶν διαφόρων ὑλῶν, καὶ κατέστησαν κανόνας δι' ὧν εὑρίσκεται ἡ ἀντίστασις ἑκάστης τούτων μετὰ πλείστης ὅσης ἀκριβείας.

355. Τὰ σώματα ὑπόκεινται εἰς τὴν ἐνέργειαν τεσσάρων διαφόρων δυνάμεων, αἵτινες τείνουσι νὰ μεταβάλλωσι τὴν κατάστασιν αὐτῶν, ἤτοι νὰ καταστρέψωσιν αὐτήν, εἰσὶ δ' αὗται ἡ *ἕλξις*, ἡ *θλίψις*, ἡ *κάμψις* καὶ ἡ *στρέψις*.

356. *Ἀντίστασις εἰς τὴν ἕλξιν*. Καλεῖται ἄμεσος συνεκτικότης στερεοῦ τινος σώματος, ἡ δύναμις ἡ συγκρατοῦσα τὰς κτηδόνας (ἶνας) καὶ ἀνθισταμένη εἰς τὴν κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους θλᾶσιν αὐτῶν. Ἡ βάσις τῆς ἕλξεως ἀπεναντίας, ἐστὶν ἡ ἕλκουσα σῶμά τι κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους του, καὶ τείνουσα νὰ θλάσῃ αὐτὸ διὰ τοῦ ἀποχωρισμοῦ τῶν ἰνῶν του. Ὅθεν ἡ συνεκτικὴ δύναμις σώματός τινος, καὶ ἡ τάσις τῆς ἕλξεως εἰς ἣν ὑπόκειται τοῦτο, εἰσὶ δυνάμεις κατ' εὐθείαν ἀντίθετοι.

Ἡ ἀντίστασις σώματός τινος εἰς τὴν ἕλξιν ἐστὶ τοσοῦτον μείζων, ὅσον ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐγκαρσίου διατομῆς αὐτοῦ ἐστὶ μείζων, ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι ἡ ἀντίστασις σώματός τινος εἰς τὴν ἕλξιν, ἐστὶ κατ' εὐθείαν ἀνάλογος τῇ ἐγκαρσίᾳ αὐτοῦ διατομῇ.

357. *Ἀντίστασις εἰς τὴν θλίψιν.* Δύναμίς τις καλεῖται θλιπτική, ὁπόταν τείνῃ ν' ἀποχωρήσῃ κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους τὰς ἶνας τοῦ σώματος ἐφ' οὗ ἐνεργεῖ, ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ ἀντίστασις σώματός τινος εἰς τὴν θλίψιν ἐστὶν ἀνάλογος τῇ ἐγκαρσίᾳ αὐτοῦ διατομῇ.

Ὅθεν διὰ σώματα ὑποκείμενα εἰς τὴν ἐνέργειαν τῆς θλίψεως, καθὼς καὶ τῆς ἕλξεως, ἡ ἀντίστασις ἐστὶν ἀνάλογος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς διατομῆς αὐτῶν, πλὴν ἡ ἐνέργεια τῆς ἕλξεως ἐστὶν ἀνεξάρτητος τοῦ μήκους, ἐκτὸς ἂν τοῦτο ἐστὶ τοιοῦτον ὥστε τὸ βάρος ἐπιῤῥεάζει ἐπαισθητῶς τὴν ἐνεργοῦσαν δύναμιν, ἐνῷ τὸ μῆκος τοῦ σώματος ἔχει μεγίστην ἐπιῤῥοὴν ὡς πρὸς τὴν δύναμιν τῆς θλίψεως.

358. Οἱ συντελεσταὶ τῆς θλίψεως μεταβάλλονται ἀναλόγως τοῦ μήκους τῶν μερῶν, ὡς ἐμφαίνεται ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι.

ΠΙΝΑΞ

τῶν συντελεστῶν θλίψεως ἀναλόγως τοῦ μήκους τῶν μερῶν.

Ἔνδειξις τῶν σωμάτων	Συντελεσταὶ θλίψεως. — Ἀναλογία τοῦ μήκους πρὸς τὴν μικροτέραν ἐγκαρσίαν διάστασιν.			
	12άκις	24άκις	48άκις	60άκις
Ἰσχυρὰ δρῦς	25,0	15,0	5,0	2,5
Ἐλαφρὰ δρῦς	8,4	5,6	»	»
Ἰσχυρὰ ἐλάτη	31,0	18,7	7,5	»
Ἐλαφρὰ ἐλάτη	0,2	4,9	»	»
Χυτοσίδηρος λεπτοῦ ὑποδείγματος . .	835,0	500,0	167,0	84,0
Χυτοσίδηρος ὠχρὸς	1670,0	1006,0	333,0	167,0

359. Ὁ ἑπόμενος πίναξ δίδει τοὺς συντελεστὰς τῆς ἕλξεως, ἤτοι τὴν ἀντίστασιν ἣν παρέχει ἕκαστον τετραγ. ὑφεκ. ἐγκαρσίου διατομῆς διαφόρων ὑλῶν, ὡς ἐπίσης καὶ τοὺς συντελεστὰς τῆς θλίψεως, διὰ τεμάχια ὑλῶν ὧν τὸ μῆκος δὲν ὑπερβαίνει τὸ δωδεκαπλάσιον τῆς μικροτέρας αὐτῶν ἐγκαρσίου διαστάσεως.

Οἱ διὰ τοῦ κατωτέρω πίνακος διδόμενοι συντελεσταὶ ἕλξεως καὶ θλίψεως, ἐκφράζουσι τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιογράμμων τοῦ βάρους, ὅπερ δύναται ἀφόβως νὰ ὑποστῇ ἕκαστον τετραγωνικὸν ὑφεκατόμετρον ἐγκαρσίου διατομῆς, ἀλλὰ πολλαπλασιαζομένων τῶν συντελεστῶν τῆς ἕλξεως ἐπὶ 10, 5, ἢ 6 καθ' ὅσον πρόκειται περὶ λίθων, ξύλων, ἢ μετάλλων, εὑρίσκεται ἡ δυναμένη νὰ συντρίψῃ

τοιαῦτα μέρη δύναμις. Παρομοίως πολλαπλασιαζομένων τῶν συντελεστῶν τῆς θλίψεως ἐπὶ 10, 5, ἢ 4 καθόσον τὰ μέρη εἰσὶν ἐκ λίθου, ξύλου, ἢ μετάλλου, εὑρίσκεται ἡ δυναμένη νὰ συντρίψῃ ταῦτα δύναμις.

ΠΙΝΑΞ

Σωμάτων ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς θλίψεως καὶ τῆς ἕλξεως.

Εἶδος σώματος		Συντελεστὴς ἕλξεως	Συντελεστὴς θλίψεως τεμαχίων μήκους κατωτέρου τοῦ δωδεκαπλασίου τοῦ πάχους.
		Χιλ.	Χιλ.
Λίθοι	Σκληρὸς ψαμμίτης..................	»	90
	Σκληρὸν μάρμαρον..................	»	100
	Μάρμαρον λευκὸν..............	»	30
	Ὀπτόπλινθοι κοινοί..................	»	4
	Χαλικόμιγμα..................	»	2,50
	Τιτανόλιθος..................	»	50
	Γρανίτης..................	»	40—70
Σχοινία καὶ ἱμάντες	Σχοινία ἐκ καννάβεως..................	325	»
	Ἱμάντες σκύτινοι..................	25	»
Ξύλα	Δρῦς..................	60-80	30
	Ἐλάτη..................	80	9
Μέταλλα	Χυτοσίδηρος αης ποιότητος..........	1000	9,7
	Χυτοσίδηρος κοινός..........	650	1000
	Σιδηρᾶ ἅλυσος μὲ ἐπιμήκεις κρίκους	400	»
	Σίδηρος εἰς ταινίας..........	750	»
	Χάλυψ κακῆς ποιότητος..........	600	»
	Χάλυψ αης ποιότητος..........	1500	»
	Σιδηροῦν πετάλειον..........	600	»
	Κρατέρωμα πυροβόλων..........	383	»
	Χαλκίνη μέρμις μέχρι 1 χιλ.	1167	»
	Ὁμοίως 1—2 χιλιοστῶν..........	833	»
	Χάλκινον πετάλειον..........	350	»
	Χυτὸς χαλκός..........	230	»
	Χυτὸς χαλκὸς λευκὸς ἢ ὠχρὸς....	220	1000
	Πετάλειον ψευδαργύρου..........	83	»
	Ὁμοίως μολύβδου..........	22	»
	Χυτὸς κασσίτερος..........	50	»

360. Ὁ κανὼν τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἐνεργείας τῆς ἕλξεως, συνίσταται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῆς ἐγκαρσίου διατομῆς τοῦ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν ταύτης μέρους, ἐπὶ τὸν ἐν τῷ πίνακι συντελεστὴν τῆς ἀντιστάσεως τῆς τῆς αὐτῆς φύσεως ὕλης.

Εὑρεῖν τὴν δύναμιν τῆς ἕλξεως σιδηρᾶς ὀρθογωνίου ῥάβδου 0,04 πλάτους ἐπὶ 0,03 πάχους.

Ἡ διατομὴ ταύτης ἔσεται $0,03 \times 0,04 = 0,12$ τετραγωνικὰ

ὑφ. Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως σιδήρου τοιούτων διαστάσεων, ἐστὶν 650, ὥστε $650 \times 12 = 7800$ χιλ. ἐστὶ τὸ βάρος ὅπερ δύναταί νὰ ὑποστῇ ἡ ῥάβδος αὕτη. $7800 \times 6 = 46800$ δὲ ἐστὶ τὸ βάρος ὅπερ θέλει θλάση αὐτήν.

Εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς διατομῆς σιδηρᾶς ῥάβδου δυναμένης νὰ ὑποςῇ ἕλξιν 7800χιλ. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἔσεται φανερῶς $\frac{7800}{658} = 12$ τ. ὑφ.. Γνωστῆς οὔσης τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀρθογωνίου διατομῆς ἡ ἑτέρα ἔσεται φανερῶς $\frac{12}{4} = 3$ ὑφ.

Εὑρεῖν τὸ βάρος ὅπερ δύναται νὰ ὑποστῇ σιδηρὰ στρογγύλης διατομῆς ῥάβδος 2,5ὑφ. διαμέτρου.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς διατομῆς ἐστὶ $\frac{\pi\delta^2}{4} = 0,785\ (2,5)^2 = 4,90$ τ.ὑφ.

ὥστε τὸ βάρος τοῦτο ἔσεται $4,9 \times 6,5 = 3185$ χιλ.

Γνωστῆς οὔσης τῆς ἀντιστάσεως ταύτης τῶν 3185χιλ., ἡ κυκλικὴ διατομὴ εὑρίσκεται τῇ διαιρέσει ταύτης διὰ 650, ἤτοι $\frac{3185}{650} = 4,90$.

Ἡ δὲ διάμετρος $\Delta = \sqrt{\frac{4,90}{0,785}} = 2,5$ὑφ.

361. Ἡ ἀντίστασις ἣν τεμάχιόν τι δύναται ν' ἀντιτάξῃ εἰς τὴν θλίψιν, χωρὶς νὰ ὑποστῇ μεταβολήν τινα, εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένης τῆς ἐγκαρσίου αὐτοῦ διατομῆς ἐπὶ τὸν ἐν τῷ πίνακι συντελεστὴν τῆς θλίψεως τῆς τῆς αὐτῆς φύσεως ὕλης.

Εὑρεῖν τὸ βάρος ὅπερ δύναται νὰ ὑποστῇ δρυΐνη τις στήλη, ἧς ἡ πλευρὰ τῆς τετραγώνου διατομῆς ἐστὶ 16ὑφ., τὸ δὲ μῆκος ἔλαττον τοῦ δωδεκαπλασίου τῆς πλευρᾶς τῆς διατομῆς ταύτης. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς διατομῆς ἐστὶ $16 \times 16 = 256$τ. ὑφ., ὥστε 256 ἐπὶ τὸν συντελεστὴν 30, ἤτοι $256 \times 30 = 7680$χιλ. ἐστὶ τὸ βάρος ὅπερ ἀκινδύνως δύναται ἡ στήλη νὰ φέρῃ.

Ἐὰν τὸ μῆκος τῆς στήλης ἦτο 24πλάσιον τῆς πλευρᾶς τῆς διατομῆς, ὁ συντελεστὴς τῆς ἀντιστάσεως κατὰ τὸν πίνακα θὰ ἦτο 15, ὥστε τὸ βάρος ὅπερ ἡ στήλη ἠδύνατο ἀκινδύνως νὰ ὑποστῇ θὰ ἦτο $256 \times 15 = 3840$ χιλ.

Εὑρεῖν τὸ βάρος ὅπερ ἀκινδύνως δύναται νὰ φέρῃ χυτοσιδηρὰ στήλη μέσης διαμέτρου 15ὑφ. καὶ μήκους 48πλάσιον ταύτης. Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως κατὰ τὸν πίνακα ἐστὶ 333. Ἡ κυκλικὴ

διατομὴ τῆς στήλης ἔχει ἐπιφάνειαν $0,785 \times 15 = 176,6^{\text{ὑφ.}}$ ὥστε $176,6 \times 333 = 58807^{\text{χιλ.}}$ ἐστὶ τὸ βάρος ὅπερ δύναται ἀκινδύνως νὰ φέρῃ ἡ προκειμένη στήλη.

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ βάρους ὅπερ δύναται νὰ φέρῃ ἀκινδύνως μέρος τι, εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐγκαρσίου διατομῆς, τῇ διαιρέσει τῆς ἀντιστάσεως ταύτης διὰ τοῦ ἀνταποκρινομένου εἰς τὸ εἶδος τοῦ ὑλικοῦ συντελεστοῦ, ἀναγομένου εἰς τὸ μῆκος.

Οὕτως ἐγκάρσιος διατομὴ χυτοσιδηρᾶς στήλης, μήκους 48πλασίου τῆς διαμέτρου της, δυναμένης ν' ἀνθέξῃ εἰς βάρος $58807,8^{\text{χιλ.}}$ ἔχει ἐπιφάνειαν $\frac{58807,8}{333} = 176,6^{\text{τ.ὑφ.}}$ ἡ δὲ διάμετρος αὐτῆς ἐστὶ
$$\Delta = \sqrt{\frac{176,6}{0,785}} = 15^{\text{ὑφ.}}$$

Εὑρεῖν τὸ βάρος ὅπερ δύναται νὰ φέρῃ χυτοσιδηρὰ στήλη $8^{\text{ὑφ.}}$ διαμέτρου, καὶ $3,84^{\text{μ.}}$ ὕψους.

Ὁ λόγος τοῦ ὕψους πρὸς τὴν διάμετρον ἐστὶ $\frac{384}{8} = 48$, ὥστε ὁ ληφθησόμενος συντελεστὴς ἐστὶ 333. Ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐγκαρσίου διατομῆς ἐστὶ $0,785 \times 8^2$ ὅπερ ἐπὶ 333 δίδει $16,730^{\text{χιλ.}}$, τὸ βάρος ὅπερ δύναται ἀκινδύνως ἡ στήλη νὰ φέρῃ.

362. *Ἀντίστασις εἰς τὴν κάμψιν.* Ἡ εἰς τὴν κάμψιν ἀντίστασις σώματός τινος, ἐστὶν ἡ ἀντιτασσομένη ἀντίστασις εἰς δύναμιν ἐνεργοῦσαν καθέτως τῷ μήκει αὐτοῦ. Σῶμά τι δύναται νὰ ὑποβληθῇ εἰς τὴν ἐνέργειαν τῆς κάμψεως διαφοροτρόπως. Οὕτω δοκός τις δύναται, ἐντοιχιζομένη κατὰ τὸ ἓν αὐτῆς ἄκρον, νὰ φέρῃ βάρος ἐπὶ τοῦ ἑτέρου, ἢ ἐρειδομένη κατὰ τὰ δύο ἄκρα, νὰ φέρῃ τὸ βάρος ἐν τῷ μέσῳ, ἢ τέλος ἐρειδομένη κατὰ τὸ μέσον νὰ φέρῃ βάρη εἰς ἀμφότερα τὰ ἄκρα.

363. Θεωρητέον πρῶτον τὴν περίστασιν καθ' ἣν δοκός τις ἐστὶν ἐντετοιχισμένη κατὰ τὸ ἓν αὐτῆς ἄκρον, καὶ φέρῃ βάρος ἐπὶ τοῦ ἑτέρου.

Ἔστω Π τὸ βάρος τοῦτο, ἀπέχον Λ ὑφ. τοῦ σημείου τῆς στερεώσεως τῆς δοκοῦ. Β ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως τοῦ εἴδους τοῦ ὑλικοῦ, α ἡ εἰς ὑφεκατόμ. ὁριζόντειος διάστασις τῆς ἐγκαρσίου διατομῆς, καὶ β ἡ εἰς ὑφεκατόμετρα κατακόρυφος διάστασις τῆς αὐτῆς διατομῆς.

Τὸ μέγιστον βάρος ὅπερ δύναται νὰ φέρῃ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δοκὸς ὀρθογωνίου διατομῆς, ἐντετοιχισμένη κατὰ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς, δίδεται διὰ τοῦ τύπου $\Pi = \frac{P \times \alpha\beta^2}{6\Lambda}$.

Τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἀντιστάσεως ὄντος διὰ τὸν σίδηρον 600, χυτοσίδηρον 750 καὶ ξύλον δρυὸς 60, ὁ τύπος οὗτος καθίσταται ἀναλόγως

$$\Pi = \frac{600 \times \alpha\beta^2}{6\Lambda} = \frac{100 \times \alpha\beta^2}{\Lambda}$$ διὰ τὸν σίδηρον.

$$\Pi = \frac{750 \times \alpha\beta^2}{6\Lambda} = \frac{125 \times \alpha\beta^2}{\Lambda}$$ διὰ τὸν χυτοσίδηρον.

$$\Pi = \frac{60 \times \alpha\beta^2}{6\Lambda} = \frac{10 \times \alpha\beta^2}{\Lambda}$$ διὰ τὸ ξύλον.

Τὸ βάρος ὅπερ δύναται σιδηρὰ ῥάβδος νὰ φέρῃ, ἧς ἡ ἀπὸ τῆς στηρίξεως ἀπόστασις μέχρι τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς αὐτοῦ ἐςὶν $150^{\text{ύφ.}}$, ἡ ὁριζόντειος πλευρὰ τῆς ἐγκαρσίου ὀρθογωνίου διατομῆς $\alpha = 3^{\text{ύφ.}}$ καὶ ἡ κατακόρυφος $\beta = 4^{\text{ύφ.}}$, ἐστὶ κατὰ τὸν εὑρεθέντα τύπον, $\Pi = \frac{100 \times 3 \times 4^2}{150} = 32$ $\chi^{\text{ιλ.}}$

Καὶ τοῦτο ὑποτιθεμένης τῆς ῥάβδου ὀρθίας, ἤτοι τῆς μεγαλειτέρας πλευρᾶς τῆς διατομῆς οὔσης κατακορύφου· ἂν ὅμως ἡ ῥάβδος ἐτίθετο ὑπτία, τότε ἡ πλευρὰ τῆς διατομῆς α θὰ ἦτο $4^{\text{ύφ.}}$ καὶ ἡ ὀρθία $\beta = 3$ ὑφεκατ. Τὸ δὲ βάρος ὅπερ ἠδύνατο νὰ φέρῃ θὰ ἦτο $\Pi = \frac{100 \times 4 \times 3^2}{150} = 24\chi^{\text{ιλ.}}$ Τουτέστι ῥάβδος τις τιθεμένη μὲ τὴν μεγαλειτέραν διάστασιν τῆς διατομῆς της ὀρθίαν, δύναται νὰ φέρῃ μεγαλείτερον βάρος τῆς ἰδίας ῥάβδου τιθεμένης μὲ τὴν μικροτέραν αὐτῆς πλευρὰν τῆς διατομῆς ὀρθίαν.

Ὁπόταν ἡ διατομὴ τῆς δοκοῦ ἐστὶ τετράγωνος $\alpha = \beta$, καὶ τὸ $\alpha\beta^2$ καθίσταται β^3, ὁ δὲ τύπος $\Pi = \frac{P \times \beta^3}{6\Lambda}$.

Ὁπόταν δὲ ἡ διατομὴ ἐστὶ κυκλικὴ, τουτέστιν ἡ ῥάβδος κυλινδρικὴ, Δ οὔσης τῆς διαμέτρου,

Διὰ τὸν σίδηρον $\Pi = \frac{60 \times \Delta^3}{\Lambda}$,

Διὰ τὸν χυτοσίδηρον $\Pi = \frac{75 \times \Delta^3}{\Lambda}$,

Διὰ τὸ ξύλον $\Pi = \frac{6 \times \Delta^3}{\Lambda}$.

Ἐκ τῶν τύπων τούτων, κατὰ τὰς διαφόρους περιστάσεις, ἐὰν τὸ ἐπὶ τοῦ ἄκρου βάρος Π ἐστὶ γνωστόν, εὐκόλως προσδιορίζονται αἱ τιμαὶ τῶν πλευρῶν ἢ τῆς διαμέτρου τῶν διατομῶν α, ϐ, Δ.

364. Δοκὸς ὑποϐασταζομένη ἐν τῷ μέσῳ καὶ φέρουσα βάρος εἰς ἀμφότερα τὰ ἄκρα, ἀντέχει εἰς διπλάσιον βάρος ἐκείνου εἰς ὃ δύναται ν' ἀνθέξῃ δοκὸς τῶν αὐτῶν διαστάσεων ἧς τὸ ἓν ἄκρον ἐντοιχίζεται, τὸ δὲ ἕτερον φέρει βάρος, διότι ἕκαστον τῶν εἰς τ' ἄκρα ταύτης βάρεων ἐνεργεῖ μὲ μοχλοϐραχίονα ἴσον μόνον τῷ ἡμίσει τοῦ ὅλου τῆς δοκοῦ μήκους.

Παρομοίως, δοκὸς ἐρειδομένη δι' ἑκατέρων τῶν ἄκρων, καὶ φέρουσα ἐν μέσῳ τὸ βάρος, δύναται ν' ἀνθέξῃ εἰς βάρος διπλάσιον ἐκείνου εἰς ὃ ἀντέχει ἡ ἰδία δοκὸς ἐντοιχισθεῖσα δι' ἑνὸς τῶν ἄκρων, καὶ τοῦ βάρους τεθέντος εἰς τὸ ἕτερον.

Δι' ἀμφοτέρας τὰς περιστάσεις ταύτας οἱ τύποι εἰσὶν οἱ αὐτοὶ ὡς ἀνωτέρω, τῇ διαφορᾷ μόνον τοῦ συντελεστοῦ ὅστις ἀποϐαίνει 200 διὰ τὸν σίδηρον, 250 διὰ τὸν χυτοσίδηρον, καὶ 20 διὰ τὸ ξύλον.

Εὑρεῖν τὸ βάρος ὅπερ δύναται νὰ φέρῃ ἀκινδύνως ῥάϐδος σιδηρᾶ ὀρθογωνίου διατομῆς, εἰς ἑκάτερον τῶν ἄκρων αὐτῆς, ὑποστηριζομένη ἐν μέσῳ, καὶ ἔχουσα τὰς ἑξῆς διαστάσεις, $\alpha = 3^{\text{ὑφ.}}$ $\beta = 2,5^{\text{ὑφ.}}$ μῆκος $\Lambda = 150^{\text{ὑφ.}}$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον τὸ βάρος τοῦτο ἔσεται

$$\Pi = \frac{200 \times 3 \times (2,5)^2}{150} = 25.^{\text{χιλ.}}$$

Ἐπίσης τὸ βάρος ὅπερ δύναται ἀκινδύνως νὰ φέρῃ ἐν τῷ μέσῳ αὐτῆς χυτοσιδηρᾶ ῥάϐδος τετραγώνου διατομῆς, ἐρειδομένη ἐπὶ τῶν δύο ἄκρων, καὶ διαστάσεων $\alpha = \beta = 5^{\text{ὑφ.}}$, καὶ μήκους $\Lambda = 2,00^{\mu.}$, ἐστὶ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον $\Pi = \frac{250 \times 5^3}{200} = 156^{\text{χιλ.}}$

365. Ὁπόταν ἡ ῥάϐδος στηριζομένη διὰ τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων, φέρει βάρος μὴ ἰσαπέχον αὐτῶν, τῇ παραστάσει διὰ λ καὶ λ' τῶν ἀποστάσεων ἑκατέρων τούτων ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ βάρους, ὁ τύπος διὰ ῥάϐδον τετραγώνου ἢ κυκλικῆς διατομῆς ἔσεται

Εἶδος σώματος	Διατομαὶ	
	Τετράγωνοι	Κυκλικαὶ
Σίδηρος	$6=\sqrt[3]{\frac{\Pi\times\lambda\times\lambda'}{100\times\Lambda}}$	$\Delta=\sqrt[3]{\frac{\Pi\times\lambda\times\lambda'}{60\times\Lambda}}$
Χυτοσίδηρος	$6=\sqrt[3]{\frac{\Pi\times\lambda\times\lambda'}{215\times\Lambda}}$	$\Delta=\sqrt[3]{\frac{\times\lambda\times\Pi\lambda'}{15\times\Lambda}}$
Ξύλον	$6=\sqrt[3]{\frac{\Pi\times\lambda\times\lambda'}{10\times\Lambda}}$	$\Delta=\sqrt[3]{\frac{\Pi\times\lambda\times\lambda}{6\times\Lambda}}$

Ἡ διάμετρος Δ δίδεται διὰ τῶν τύπων τούτων δι' ἄξονας κοινούς, ὁπόταν ὅμως πρόκειται περὶ ἄξονος ὑδραυλικῶν τροχῶν καλὸν ἐστὶν ἵνα οἱ διαιρέται 60, 75 καὶ 6 ἐλαττοῦνται εἰς τὸ ἥμισυ.

366. Ὁπόταν δοκός τις εὑρίσκεται ἐντετοιχισμένη κατὰ τὰ δύο αὐτῆς ἄκρα, δύναται νὰ ὑποστῇ ἀκινδύνως, θλίψιν τετραπλασίαν ἐκ ἰνης ἣν ὑφίσταται ὁμοία δοκὸς ἐντετοιχισμένη μόνον κατὰ τὸ ἓν αὐτῆς ἄκρον καὶ φέρουσα τὸ βάρος εἰς τὸ ἕτερον, διότι πρῶτον τὸ μῆκος τοῦ μοχλοῦ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ τὸ βάρος, ἐστὶ κατὰ τὸ ἥμισυ μικρότερον, καὶ δ ύτερον ὑπάρχουσι δύο ἐπιφάνειαι στερεώσεως, καὶ ἐπομένως ἀντίστασις διπλασία.

Ὅθεν οἱ εὑρεθέντες τύποι δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσι καὶ ἐνταῦθα, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ὁ συντελεστὴς Ρ, ἔσεται 400 διὰ τὸν σίδηρον, 500 διὰ τὸν χυτοσίδηρον, καὶ 40 διὰ τὸ ξύλον.

367. *Ἀντίστασις εἰς τὴν στρέψιν.* Ὁπόταν δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσιν ἀντιθέτως καὶ ἐφαπτομένως εἰς τὴν ἐπιφάνειαν στερεοῦ τινος σώματος, ὡσεὶ τείνουσα ἑκάστη νὰ περιστρέψῃ αὐτὸ ἀντιθέτως, τὸ σῶμα τοῦτο ὑπόκειται εἰς τὴν δύναμιν τῆς στρέψεως.

Ἡ τάσις τῆς στρέψεως ἄξονός τινος καὶ τῶν πυργίσκων αὐτοῦ, προέρχεται ἐκ τῆς δυνάμεως ἥτις περιστρέφει αὐτοὺς κατὰ μίαν ἔννοιαν, καὶ τῆς ἀντιστάσεως ἥτις ἀνθίσταται εἰς τὴν κίνησιν ταύτην.

Οἱ ἄξονες δὲν ὑπόκεινται πάντες κατὰ τὸν αὐτὸν βαθμὸν εἰς τὴν δύναμιν τῆς στρέψεως, δι' ὃ διαιροῦνται συνεπῶς τούτου οἱ πυργίσκοι εἰς τρεῖς κλάσεις.

Ἡ πρώτη περιλαμβάνει τοὺς ἄξονας τοὺς ὑποκειμένους εἰς τὴν

μεγαλειτέραν ἐνέργειαν τῆς στρέψεως, καὶ οἵτινες συνάμα φέρουσι μεγάλα βάρη, ὡς οἱ ἄξονες τῶν στροφάλων, ὑδραυλικῶν τροχῶν κλ. καὶ οἵτινες καλοῦνται ἄξονες *πρώτου κινητηρίου*. Ἡ δευτέρα περιλαμβάνει, τοὺς συγκοινωνοῦντας μετὰ τῶν πρώτων ἄξονας, καὶ τοὺς φέροντας τοὺς μεγάλους ἐμπλεκτικοὺς τροχούς. Ἐν δὲ τῇ τρίτῃ κλάσει περιλαμβάνονται πάντες οἱ δευτερεύοντες ἄξονες τῆς μεταδόσεως τῆς κινήσεως, οἵτινες φέρουσι μὲν ὀλίγον βάρος, πλὴν φθείρονται ταχέως ἕνεκα τῆς ταχίστης καὶ ἀδιακόπου αὐτῶν κινήσεως.

Ἡ πρὸς στρέψιν δύναμις ἣν πυργίσκος τις ὑφίσταται, ἐστὶ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος τῇ εἰς ἵππους δυνάμει, καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῷ ἀριθμῷ τῶν κατὰ δευτερόλεπτον περιστροφῶν.

Ὁ ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ἐν χρήσει τύπος πρὸς προσδιορισμὸν τῆς διαμέτρου Δ ἄξονος τινος ἢ πυργίσκου ἐστὶ $Δ = \sqrt[3]{\frac{Φ}{Ν} Γ}$, ἐν ᾧ Φ ἐστὶν ἡ εἰς ἵππους δύναμις τῆς μηχανῆς, Ν ὁ ἀριθμὸς τῶν κατὰ δευτερόλεπτον περιστροφῶν τοῦ ἄξονος, καὶ Γ ὁ κατὰ τὴν περίστασιν συντελεστής, ὅστις ἐστὶ διὰ τοὺς πυργίσκους

	Αης Κλάσεως,	Βας Κλάσεως,	Γης Κλάσεως.
Διὰ τὸν χυτοσίδηρον··	6800····	3280····	1640
Διὰ τὸν σίδηρον.····	4370····	2108····	1054.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τοὺς ξυλίνους ἄξονας, ἡ ἀντίστασις αὐτῶν ἐστὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς τῶν χυτοσιδηρῶν τῶν αὐτῶν διαστάσεων καὶ ὑπὸ τοὺς αὐτοὺς ὅρους, ὥστε γνωστῆς οὔσης τῆς διαμέτρου χυτοσιδηροῦ τινος ἄξονος, ἀρκεῖ ὅπως ἐπαυξηνθῇ αὔτη κατὰ τὸν λόγον $\sqrt[3]{4:1}$ ἢ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 1,6 πρὸς εὕρεσιν τῆς διαμέτρου ἄξονος ἐκ ξύλου δρυός.

368. Ἡ στερεότης τοίχου οἰκοδομῆς τινος, ἀπαιτεῖ ἵνα ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος αὐτοῦ κατακόρυφος, διέρχεται διὰ σημείου τινος τῆς βάσεως αὐτοῦ, τὸ δ' ἔδαφος ἐφ' οὗ ἡ βάσις αὕτη ἐρείδεται νὰ ᾖ ἐντελῶς ἐπίπεδον καὶ ἀκαταπίεστον. Ἡ στερεότης τῶν τοίχων ἐπαυξάνεται διὰ τῶν θεμελίων ὧν τὸ βάθος αὐξάνει ἄχρις οὗ εὑρεθῇ στερεὸν ἔδαφος. Τὸ πάχος τῶν θεμελίων ὑπερβαίνει κατὰ τὸ ἓν πέμπτον, τὸ ἓν τέταρτον καὶ πολλάκις κατὰ τὸ ἥμισυ τὸ πάχος τῶν τοίχων. Τοῦ βάρους τοίχου τινος διαμοιραζομένου εἰς

πάντα τὰ τῆς βάσεως αὐτοῦ σημεῖα, ἕπεται ὅτι τοσοῦτον μικροτέρα ἔσεται ἡ κατακάθισις αὐτοῦ, ὅσον μεγαλειτέρα ἐστὶν ἡ βάσις αὕτη. Πρὸς ἐπαύξησιν ἔτι τῆς στερεότητος τῶν τοίχων, δίδεται αὐτοῖς κλίσις ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω (σκάρπα) ἢ ὑπεροχή τις τῆς κάτω βάσεως πρὸς τὴν ἄνω κατὰ τὸ $\frac{1}{60}$—$\frac{1}{100}$.

Ἡ ἐπὶ τῶν τοίχων θλίψις προέρχεται ἐκ τῶν πατωξύλων, ψαλίδων κλ. ἐνεργεῖ δ' αὕτη ἐκ τῶν ἔσω πρὸς τὰ ἔξω, ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι ἡ στερεότης τοίχου τινος ἐλαττοῦται ὅσον ἐπαυξάνει τὸ ὕψος αὐτοῦ, κατὰ συνέπειαν τὸ πάχος τῶν τοίχων ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕψους αὐτῶν.

Κατὰ τὸν Ῥονδελέτον τὸ πάχος τοῦ τοίχου ἐκ λίθων ἢ ὀπτοπλίνθων συνήθους τινος οἰκοδομῆς, δίδεται διὰ τῶν ἑξῆς τύπων.

Ε ὄντος τοῦ εὑρεθησομένου πάχους, Λ τοῦ μήκους τοῦ κτιρίου ἢ τῆς ἀποστάσεως τῶν ἀξόνων δύο παραλλήλων τοίχων, καὶ Υ τοῦ ὕψους, ὁ τύπος

$$Ε=\frac{Λ+\frac{1}{2}Υ}{24}$$

δίδει τὸ ἐλάχιστον πάχος τοῦ μετωπικοῦ τοίχου.

Κατὰ τοῦτον τὸ πάχος μετωπικοῦ τοίχου ἁπλῆς τινος οἰκοδομῆς 8,00 μ. ὕψους καὶ 12,00 πλάτους, ἔσεται

$$Ε=\frac{12+\frac{8}{2}}{24}=0,66.$$

Ὁ τύπος πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ πάχους διπλῆς οἰκοδομῆς ἐστὶν

$$Ε=\frac{Λ+Υ.}{48}$$

Καὶ τέλος ὁ τύπος πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ πάχους μεσοτοίχου τινος ἐστὶν

$$Ε=\frac{Λ'+Υ'}{36}.$$

Ἐν ᾧ Λ' καὶ Υ' ἐκφράζουσι τὸ σχετικὸν μῆκος καὶ ὕψος τῶν μεσοτοίχων, ἅτινα οὐδεμίαν σχέσιν ἔχουσι πρὸς τὸ ὕψος καὶ μῆκος τοῦ μετωπικοῦ τοίχου.

Εὑρεῖν τὸ πάχος τοῦ μετωπικοῦ τοίχου οἰκοδομῆς τινος ἐκ δύο πατωμάτων συγκειμένης, καὶ ἧς τὸ μὲν μῆκος ἐστὶ 10μ. τὸ πλάτος 11, τὸ δὲ ὕψος τῶν δύο πατωμάτων,

Τοῦ μὲν ἰσογείου · · 5,00 · ·	}	10,00μ.
Τοῦ α'ου πατώματος 2,50 · ·		
Καὶ τοῦ β'ου · · · · · · 2,50 · ·		

Κατὰ τὸν δεύτερον τῶν ἀνωτέρω τύπων τὸ πάχος τοῦ μετωπικοῦ τοίχου τοῦ ἰσογείου ἔσεται

$$E=\frac{11+10}{48}=0,44.$$

Τοῦ πρώτου πατώματος $E=\frac{11+5}{48}=0,38.$

Καὶ τοῦ δευτέρου πατώματος $E=\frac{11+2,50}{48}=0,28.$

Παρατηρητέον ὅτι αἱ διαφοραὶ αὗται εἰς τὰ πάχη, προκύπτουσιν ἐκ τῆς ἐλαττώσεως τοῦ βάρους τοῦ τοίχου καθ' ὅσον ἡ βάσις λαμβάνεται ὑψηλότερον. Οὕτω διὰ τὸ ἰσόγειον ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν τὸ ὁλικὸν ὕψος τῆς οἰκοδομῆς 10,μ. ἐνῷ διὰ τὸ πρῶτον πάτωμα τὸ ὕψος ἐλήφθη 10—5=5,μ. καὶ διὰ τὸ δεύτερον 10—7,5=2,50.

Κατὰ τὸν ἴδιον Ῥονδελέτον, τὸ πάχος τῶν μεμονωμένων τοίχων ποικίλλει μεταξὺ τοῦ $\frac{1}{11}$ μέχρι τοῦ $\frac{1}{16}$ τοῦ ὕψους αὐτῶν, τὸ δὲ πάχος τῶν τοίχων τῶν οἰκοδομῶν, οὐδέποτε πρέπει νὰ ᾖ κατώτερον τοῦ $\frac{1}{24}$ τοῦ ὕψους αὐτῶν.

369. *Περὶ Λεβήτων*. Θερμαινομένου ὕδατος ἐντὸς ἀνοικτοῦ ἀγγείου, ὑψοῦται ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ ἄχρις 100,° ἀπὸ τῆς στιγμῆς δὲ ταύτης, ἐπέρχεται εἶδός τι ἰσορροπίας μεταξὺ τῆς θλίψεως τοῦ ἀέρος, καὶ τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος ὅπερ ἀναβράζει καὶ μεταβάλλεται εἰς ἀτμόν. Ὅσον καὶ ἂν αὐξήσῃ τὸ πῦρ, ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος μένει σταθερὰ, ἡ δ' ὑπερβάλλουσα θερμότης μεταβάλλει τοῦτο εἰς ἀτμόν. Ὁ ἀτμὸς οὗτος ἐν ἀνοικτῇ ἀτμοσφαίρᾳ οὐδεμίαν ἔχει δύναμιν.

Ὁπόταν ὅμως τὸ ὕδωρ θερμαίνεται ἐντὸς στεγανῶς κεκλεισμένου ἀγγείου, ὡς ἐντὸς λέβητος, ὁ καταλαμβάνων τὸν ἐλεύθερον ὕδατος χῶρον ἀτμὸς, ἀποκτᾷ συνεχῶς ἔντασιν ἢ ἐλαστικὴν δύναμιν, ἥτις ἐπαυξάνει καθ' ὅσον ὑψοῦται ἡ τοῦ ὕδατος θερμοκρασία, ἡ δὲ μεταξὺ θλίψεως καὶ θερμοκρασίας σχέσις ἐστὶ τοιαύτη, ὥστε μεταβολῆς τινος ἐπερχομένης εἰς τὴν θερμοκρασίαν, ἀνάλογος ἐπέρχεται εἰς τὴν ἔντασιν τοῦ ἀτμοῦ τοιαύτη.

Ἡ συμπύκνωσις αὕτη τοῦ ἀτμοῦ ἐντὸς στεγανῶς κεκλεισμένου λέβητος, παράγει δύναμιν ἐνεργητικοτάτην.

Ὁ ἑπόμενος πίναξ δεικνύει τὰς θλίψεις, τὸν ὄγκον, τὴν ταχύτητα τοῦ ἀτμοῦ καὶ τὴν ἀνταποκρινομένην θερμοκρασίαν.

ΠΙΝΑΞ

Δεικνύων τὴν θερμοκρασίαν, τοὺς ὄγκους καὶ τὰς ταχύτητας τοῦ ἀτμοῦ ὑπὸ διαφόρους θλίψεις.

Ἐλαστικότης ἢ θλίψις ἀτμοῦ εἰς ἀτμοσφαίρας.	Στήλη ὑδραργύρου εἰς ὕψος ἥτις μετρᾷ τὴν θλίψιν·	Θλίψις εἰς χιλιόγραμμα δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν ὑφεκατόμετρον.	Θερμοκρασία εἰς ἑκατονταβαθμ. διαιρέσεις.	Ὄγκος εἰς λίτρας ἑνὸς χιλιογράμ. ἀτμοῦ εἰς ἀνταποκρινομ. θλίψιν καὶ θερμοκρασίαν.	Ταχύτης ἀτμοῦ διαφεύγοντος εἰς τὴν ἀτμοσφαίραν.
	Μέτρα	Χιλιόγρ.	Βαθμοὶ	Λίτραι	Μέτρα
0,50 ἢ $^1/_2$	0,38	0,516	82,0	3,229,36	»
0,75 ἢ $^1/_2$	0,57	0,776	92,0	2,217,20	»
1.00	0,76	1,033	100,0	1,700,00	241
1.18	0,90	1,218	105,0	1,454,00	332
1.50	1.14	1,550	112,4	1,171,56	343
1.75	1.33	1,809	117,1	1,016,66	394
2,00	1.52	2,066	121,5	899,91	427
2,25	1.71	2,326	125,5	808,00	451
2,50	1.90	2,582	128,8	733,45	472
2,75	2,09	2,842	132,1	672,36	488
3,00	2,28	3,100	135,0	620,74	502
3,25	2,47	3,360	137,7	576,83	512
3,50	2,66	3,618	140,6	539,40	520
4,00	3,04	4,133	145,4	477,05	537
4,50	3,42	4,648	149,1	428,36	549
5,00	3,80	5,165	153,3	389,38	562
5,50	4,18	5,684	156,7	356,86	»
6,00	4,56	6,200	160,0	329,69	»
6,50	4.94	6,719	163,3	306,62	»
7,00	5,32	7,235	166,4	286,70	»
8,00	6.08	8,264	172,1	254,27	»

370. Καλεῖται θλίψις ἢ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ ἀτμοῦ, ἡ πίεσις ἣν παράγει ἐπὶ ἑνὸς τετραγωνικοῦ ὑφεκατομέτρου ἐπιφανείας, ἢ γενικώτερον ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ ἀτμοῦ λαμβάνεται συγκριτικῶς πρὸς τὸν ἀέρα θεωρούμενον ὡς μονάδα.

Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ θλίψις, ἤτοι ἡ ἀτμοσφαῖρα, δύναται ν' ἀνυψώσῃ ἐν τῷ κενῷ στήλην ὕδατος 10,33$^{μ.}$ ὕψους, ἢ ὑδραργύρου 0,76, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ πρὸς θλίψιν ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ ὑφεκατομέτρου 1,033$^{χιλ.}$ ἢ ἐπὶ ἑκάστου τετραγ. μέτρου 10330 χιλ.

Ἡ ἔκφρασις ὅτι ἡ πυκνότης ἀτμοῦ τινος ἐστὶ μιᾶς ἀτμοσφαίρας, ἐμφαίνει ὅτι προξενεῖ οὗτος ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ ὑφεκατομέ-

τρου θλίψιν 1,033$^{χιλ.}$ Ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἐστὶν 100 βαθμῶν.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς μονάδος τῆς θλίψεως τοῦ ἀτμοῦ εἰς πᾶσαν ἄλλην θερμοκρασίαν, πολλαπλασιαστέον τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τῶν ἀτμοσφαιρῶν ἐπὶ 1,033 χιλ.

Οὕτως ἡ θλίψις ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ ὑφεκατομέτρου ἀτμοῦ οὗ ἡ ἔνστασις ἐστὶ 5 ἀτμοσφαιρῶν, ἔσεται $\Theta = 5 \times 1{,}033 = 5{,}165$ χιλ.

Εὑρεῖν τὴν θλίψιν ἀτμοῦ 135° ἐπὶ ἐμβολέως 0,25 διαμέτρου.

Κατὰ τὸν πίνακα ἡ ἀνταποκρινομένη θλίψις εἰς 135° ἐστὶ 3 ἀτμοσφαιρῶν ἢ 3,10$^{χιλ.}$ ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ ὑφεκατομέτρου. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβολέως ἐστὶ $(25^2 \times 0{,}7854 = 490{,}87$$^{τ. ὑφ.}$ ὥστε ἡ θλίψις τοῦ ἀτμοῦ ἐπὶ τοῦ ἐμβολέως ἔσεται συνεπῶς

$$\Theta = 490{,}87 \times 3{,}10 = 1521{,}70^{χιλ.}$$

371. Ἡ ταξινόμισις τῶν μηχανῶν, εἰς μηχανὰς μεγίστης, μεσαίας καὶ μικρᾶς θλίψεως, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον μεγαλειτέρας ἢ μικροτέρας θλίψεως τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ. Μηχαναὶ μικρᾶς θλίψεως θεωροῦνται ἐκεῖναι ὧν ὁ ἐν τῷ λέβητι ἀτμὸς ἔχει ἔντασιν 1 ἕως $1\frac{1}{2}$ ἀτμοσφαίρας· μεσαίας ἐκεῖναι ὧν ἡ θλίψις τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ, ἔχει ἔντασιν 2—3 ἀτμοσφαιρῶν· καὶ τέλος μεγίστης θλίψεως, ἐκεῖναι ὧν ἡ ἔντασις τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ ἐστὶ 4—8 ἀτμοσφαιρῶν καὶ ἄνω.

372. Ἡ πεῖρα ἀπέδειξεν ὅτι ἓν κυβικὸν ὑφεκατόμετρον ἀπεσταγμένου ὕδατος, παράγει 1,700$^{λίτρ.}$ ἢ 1700$^{κ. ὑφ.}$ ἀτμοῦ εἰς 100°, καὶ ὑπὸ θλίψιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας. Ὅθεν ἓν χιλιόγραμμον ὕδατος παράγει 1700 λίτρας ἀτμοῦ εἰς 100° καὶ 1$^{χιλ.}$ βάρους, ὥστε μία μόνη λίτρα ἀτμοῦ εἰς 100° καὶ ὑπὸ μιᾶς ἀτμοσφαίρας θλίψιν θέλει ζυγίσει $\frac{1}{1700} = 0{,}588$ γράμμα, καὶ ἓν κυβ. μέτρον 0,588 χιλιόγραμμα.

Τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ἀτμοῦ εἰς πᾶσαν ἄλλην θερμοκρασίαν προσδιορίζεται διὰ τοῦ τύπου $B = \frac{0{,}7827}{1 + 0{,}00375 \times T} + \Theta$

ἐν ᾧ Θ ἐκφράζει τὴν εἰς χιλιόγραμμα θλίψιν ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ ὑφεκατομέτρου, καὶ Τ τὴν κατ' ἑκατονταβάθμιον θερμοκρασίαν.

373. Διάφοροι ὄγκοι ἀτμοῦ εἰσὶν ἀντιςρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐπ' αὐτῶν ἐπιφερομένων θλίψεων, τουτέστιν ἐὰν ὑπὸ θλίψιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας, ὁ ὄγκος ἀτμοῦ τινος ἰσοῦται μὲ στήλην ἑνὸς μέτρου ὕψους, ὑπὸ θλίψιν 2 ἀτμοσφαιρῶν, ὁ ὄγκος οὗτος θέλει περιορισθεῖ εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐλατουμένης τῆς θλίψεως εἰς τὸ ἥμισυ, ἡ στήλη θέλει διπλασιασθεῖ κατὰ τὸ ὕψος κλ. Ὁ νόμος οὗτος τοῦ λόγου τῶν ὄγκων πρὸς τὰς θλίψεις τοῦ ἀτμοῦ, καλεῖται *νόμος τοῦ Μαριώττου.*

Κατὰ τὸν νόμον τοῦτον, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου ὃν ἀτμός τις θέλει καταλάβει ὑπὸ ὁρισμένην θλίψιν, πολλαπλασιαστέον τὸν ἀρχικὸν ὄγκον ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν θλίψιν, καὶ διαιρετέον τὸ γινόμενον τοῦτο διὰ τῆς νέας ἐπιφερομένης θλίψεως. Ὁπόταν ὁ ἀτμὸς διαστέλλεται, τουτέστιν ὁπόταν χῶρός τις πλήρης ἀτμοῦ, αὐξήσῃ αἴφνης ἄνευ μεταβολῆς θερμοκρασίας,, ἡ διαστολὴ ἀκολουθεῖ τὸν νόμον τοῦ Μαριώττου.

374. Ὁ ὄγκος ἀτμοῦ τινος, λαμβανομένου τοῦ ὄγκου τοῦ ὕδατος ὡς μονάδος, γνωστῆς οὔσης τῆς θερμοκρασίας καὶ τῆς ἐλαστικῆς αὐτοῦ δυνάμεως, εὑρίσκεται διὰ τοῦ τύπου

$$\text{O}=\frac{349}{\Upsilon}\times(2+\text{T}),$$

ἐν ᾧ Υ ἐστὶ τὸ ὕψος τῆς μετρώσης τὴν ἐλαστικότητα τοῦ ἀτμοῦ στήλης ὑδραργύρου, καὶ Τ ἡ κατ' ἑκατονταβάθμιον θερμοκρασία. Ὅθεν ὁ εἰς λίτρας ὄγκος ἑνὸς χιλιογράμμου ἀτμοῦ εἰς θερμοκρασίαν 128°,85 καὶ ὑπὸ θλίψιν 190, ἐστὶ

$$\text{O}=\frac{349}{190}\times(270+128,85)=732,62 \text{ λιτρ.}$$

375. Τὸ συνήθως ἐν χρήσει σχῆμα τῶν λεβήτων τῶν ἀτμομηχανῶν ἐστὶν ἐπίμηκες κυλινδρικὸν ἀπολῆγον κατ' ἀμφότερα τ' ἄκρα ἡμισφαιρικῶς (Σχ. 231). Οἱ τοιοῦτοι λέβητες καλούμενοι τοῦ Οὐόλφ, σύγκεινται ἐκ πεταλείων σφυρηλάτου σιδήρου, ἐνίοτε δὲ ἐξ ἐρυθροῦ χαλκοῦ, ἀντέχοντος πλειότερον εἰς τὴν ἐνέργειαν τοῦ πυρός. Οἱ ἐκ σφυρηλάτου σιδηροῦ πεταλείου λέβητες, ἀντεκατέστησαν ἤδη γενικῶς τοὺς χυτοσιδηρούς, οἵτινες ὑπέκειντο εἰς συχνὰς ἐκρήξεις. Αἱ διαστάσεις τῶν τοιούτων λεβήτων ποικίλλουσι κατὰ τὰς περιστάσεις, συνήθως ὅμως τὸ μῆκος αὐτῶν ἐστὶ τὸ πεντα-

πλάσιον τῆς διαμέτρου. Ἡ ἀναλογία αὕτη μεταξὺ τοῦ μήκους καὶ τῆς διαμέτρου, ἐστὶ λίαν κατάλληλος πρός τε τὴν ἐνέργειαν τῆς φλογός, καὶ πρὸς ἀντίστασιν εἰς τὴν ἐσωτερικὴν τοῦ ἀτμοῦ θλίψιν.

Ἐνίοτε γίνεται χρῆσις, διὰ μικρᾶς θλίψεως μηχανάς, λεβήτων καλουμένων τοῦ Οὐάτ, ἐπιπέδου ἢ κοίλης βάσεως (Σχ. 232), οἵτινες παρέχουσιν ἀτμὸν συγκριτικῶς πλειότερον τῶν κυλινδρικῶν, πλὴν ἡ ἀντίστασις αὐτῶν ἐστὶ σχετικῶς λίαν μικροτέρα.

376. Πρὸς προφύλαξιν τῶν λεβήτων τοῦ Οὐόλφ, τῆς ἀμέσου ἐνεργείας τοῦ πυρός, καὶ πρὸς ἀποφυγὴν τῶν ἐκ τούτου προερχομένων συχνῶν ἐπισκευῶν, τίθενται κάτωθεν αὐτῶν εἷς, δύο, ἢ πολλάκις τρεῖς σωλῆνες (Σχ. 233) οἵτινες καλοῦνται *βραστῆρες*, διότι βυθιζόμενοι ἐν τῇ ἑστίᾳ δέχονται ἀμέσως τὴν ἐνέργειαν τῆς φλογὸς, ἥτις περιβάλλουσα αὐτούς τε καὶ τὴν κάτω ἐπιφάνειαν τοῦ λέβητος διεξέρχεται πρὸς τὴν καπνοδόχην. Διὰ τῶν βραστήρων τούτων ἐπαυξάνεται συνάμα καὶ ἡ θερμαινομένη ἐπιφάνεια. Οἱ βραστῆρες εἰσὶν ἐνίοτε προσκεκολλημένοι παγίως ἐπὶ τῶν λεβήτων, πλὴν προτιμώτερον ἐστὶν ἵνα προσαρμόζονται διὰ βραχιόνων εἰσερχομένων ἐντὸς ὀπῶν κάτωθεν τῶν λεβήτων, καθότι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἐνεργεῖται εὐκόλως καὶ ταχέως ἡ ἀντικατάστασις θλομένου τινος τούτων.

377. Τὸ πάχος τῶν κυλινδρικῶν λεβήτων κανονίζεται δυνάμει διατάγματος, διὰ τοῦ ἐκ τῆς πείρας ἐξαχθέντος τύπου,

$$e=\frac{18\times\delta\times\pi}{10}+3$$

Ἐνῷ θ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πάχος εἰς χιλιοστά.

δ ἡ εἰς μέτρα διάμετρος τοῦ λέβητος.

π ἡ θλίψις τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ μειωθεῖσα κατὰ μίαν ἀτμοσφαίραν.

Ὅθεν τὸ πάχος λέβητος διαμέτρου 1^{μ},00 ἀνθισταμένου εἰς 5 ἀτμοσφαιρῶν θλίψιν, ἔσεται κατὰ τὸν τύπον τοῦτον

$$e=\frac{18\times1\times4}{10}+3=10,20 \text{ ὑποχιλ.}$$

ΠΙΝΑΞ

Τοῦ πάχους ὅπερ δέον νὰ ἔχωσιν οἱ κυλινδρικοὶ λέβητες ἐκ σιδηροῦ ἢ χαλκίνου πεταλείου

Διάμετρος τῶν λεβήτων	Ἀριθμοὶ ἐκφράζοντες τὰς ἐντάσεις τοῦ ἀτμοῦ.						
	2 ἀτμοσφ.	3 ἀτμοσφ.	4 ἀτμοσφ.	5 ἀτμοσφ.	6 ἀτμοσφ.	7 ἀτμοσφ.	8 ἀτμοσφ.
Μέτρα	Ὑποχιλ.	Ὑποχιλ.	Ὑποχιλ.	Ὑποχιλ.	Ὑποχιλ.	Ὑποχιλ.	Ὑποχιλ.
0,50	3,90	4,80	5,70	6,60	7,50	8,40	9,30
0,55	3,99	4,98	5,97	6,96	7,95	8,94	9,93
0,60	4,08	5,16	6,24	7,32	8,40	9,48	10,56
0,65	4,17	5,34	6,51	7,68	8,85	10,02	11,19
0,70	4,26	5,52	6,78	8,04	9,30	10,56	11,82
0,75	4,35	5,70	7,05	8,40	9,75	10,10	12,45
0,80	4,44	5,88	7,32	8,76	10,20	11,64	13,08
0,85	4,53	6,06	7,59	9.12	10,65	12,18	13,71
0,90	4,62	6,24	7,86	9,48	11,10	12,72	14,34
0,95	4,71	6,42	8,13	9,84	11,55	13,26	14,97
1.00	4,80	6,60	8,40	10,20	12,00	13,80	15,60

378. Οἱ ἐκ σιδηροῦ πεταλείου ἢ χαλκοῦ λέβητες δοκιμάζονται ψυχροὶ ὄντες δι' ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου (328) καὶ διὰ θλίψεως τριπλασίας ἐκείνης εἰς ἣν θερμανθέντες δέον ν' ἀνθέξωσι. Οἱ δὲ ἐκ χυτοσιδήρου λέβητες, δοκιμάζονται διὰ θλίψεως πενταπλασίας ἐκείνης εἰς ἣν τακτικῶς θὰ ὑπόκεινται.

379. Ἡ δύναμις τῆς ἐξατμίσεως λέβητός τινος ἐστὶν ἀνάλογος τῆς θερμαινομένης ἐπιφανείας, τουτέστι τῆς εἰς τὴν ἐνέργειαν τῆς φλογὸς ἀμέσως ὑποκειμένης ἐπιφανείας.

Ἐν τοῖς λέβησι τοῦ Οὐάτ, βάσεως κοίλης ἢ ἐπιπέδου, θεωρητέον τὴν ἄμεσον ἐπιφάνειαν τῆς θερμάνσεως, ἤτοι τὴν ἀμέσως εἰς τὴν ἐνέργειαν τῆς φλογὸς ὑποκειμένην, καὶ τὴν ἐπιφάνειαν θερμάνσεωρ τῶν παρειῶν τοῦ λέβητος. Ἐν τοῖς λέβησι τούτοις ἐν οἷς τὸ ὕδωρ κατέχει τὰ δύο τρίτα τῆς ὅλης χωρητικότητος, ὁ δ' ἀτμὸς τὸ ἕτερον τρίτον, καλὸν ἐστὶν ἵνα ἡ τῶν παρειῶν θερμαινομένη ἐπιφάνεια τηρεῖται κατωτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐν τῷ λέβητι ὕδατος, ἵνα μὴ διὰ τῆς πυρώσεως τοῦ πεταλείου, προέλθη αἰφνίδιός τις ἔκρηξις.

380. Ὑπολογίζεται ὅτι οἱ λέβητες τοῦ Οὐάτ, δέον νὰ παρου-

σιάζουσιν ἐπιφάνειαν θερμάνσεως 1,40τ. μ. δι' ἕκαστον ἵππον δυνάμεως, ὥστε εὐκόλως προσδιορίζεται ἡ ἐπιφάνεια θερμάνσεως ἣν δέον νὰ ἔχῃ λέβης τις ἀναλόγως τῆς εἰς ἵππους δυνάμεως αὐτοῦ.

Ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια θερμάνσεως λέβητός τινος τοῦ Οὐάτ, διὰ δύναμιν 15 ἵππων ἔσεται $1,40 \times 15 = 21$τ. μ.

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θερμάνσεως δέον ν' ἀναλογισθῇ ὥστε τὸ ἓν τρίτον ν' ἀποτελῇ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θερμάνσεως τοῦ λέβητος, τὰ δ' ἕτερα δύο τρίτα τὰς παρειὰς αὐτοῦ, μὴ λογιζομένης τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐπικαλύμματος ὡς ἐξατμιστικῆς ἐπιφανείας.

Εὑρεῖν τὴν εἰς ἵππους δύναμιν λέβητός τινος τοῦ Οὐάτ, ὑποκειμένου εἰς τὰς ἑξῆς συνθήκας· α') ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἀμέσου θερμάνσεως ἢ τοῦ πυθμένος ἐστὶν 7τ. μ., β') ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης τῶν παρειῶν ἐπίσης 7,00 τ. μ.

Τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας θερμάνσεως οὔσης $3 \times 7 = 21$τ. μ. ἡ εἰς ἵππους δύναμις ἔσεται $\frac{21}{1,40} = 15$ ἵππων.

Ὑπελογίσθη ἐν τοῖς λέβησι τοῦ Οὐάτ, ὅτι πρὸς ἐξάτμισιν ἑνὸς κυβ. μέτρου ὕδατος καθ' ὥραν, ἀπαιτοῦνται 26τ. μ. ὁλικῆς ἐπιφανείας θερμάνσεως, ὧν τὸ τρίτον ὑποκείμενον εἰς τὴν ἄμεσον τοῦ πυρὸς ἐνέργειαν, συνάμα δὲ ὅτι ἓν τετρ. μέτρον θερμαινομένης ἐπιφανείας δύναται κατὰ μέσον ὅρον νὰ ἐξατμίσῃ 0,0384κ. μ. ἢ 38,40 λίτρας ὕδατος καθ' ὥραν. Ὅθεν γνωστοῦ ὄντος τοῦ βάρους τοῦ καθ' ὥραν καταναλισκομένου ἀτμοῦ, εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς θερμάνσεως τῇ διαιρέσει τοῦ βάρους τούτου τοῦ ἀτμοῦ διὰ 38. Τέλος ὑπελογίσθη ὅτι ἡ χωρητικότης τοιούτου τινὸς λέβητος δέον νὰ ᾖ 0,566κ. μ. δι' ἕκαστον ἵππον δυνάμεως.

381. Οἱ μετὰ βραστήρων κυλινδρικοὶ λέβητες τοῦ Οὐόλφ, παρουσιάζουσιν ἐν ἴσῳ ὄγκῳ, μεγαλειτέραν ἐπιφάνειαν θερμάνσεως ἐκείνων τοῦ Οὐάτ. Τὸ ἥμισυ τῆς χωρητικότητος τῶν λεβήτων τούτων κατέχεται παρὰ τοῦ ἀτμοῦ. Ὡς ἐπιφάνεια θερμάνσεως λαμβάνονται τὰ δύο τρίτα τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑκάστου βραστῆρος, πλέον τοῦ ἡμίσεος τῆς τοῦ λέβητος ἐπιφανείας. Ὑπολογίζεται δ' ἡ ἐπιφάνεια θερμάνσεως εἰς 1,30τ. μ. δι' ἕκαστον ἵππον δυνάμεως.

302. Τὸ μῆκος τῶν βραστήρων ὑπερβαίνει τὸ τοῦ λέβητος κατὰ 0,50 περίπου, οὗ μέρος μὲν κατέχεται παρὰ τῆς τοιχοποιΐας, μέρος δὲ ἐξέχει τοῦ κλιβάνου καὶ φέρει κρουνὸν ἐκκενώσεως, ἐν τοῖς ὑπολο-

γισμοῖς ὅμως τὸ μῆκος τοῦ βραστῆρος θεωρεῖται τὸ τοῦ λέβητος.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω ἡ εἰς ἵππους ἐξατμιστικὴ δύναμις λέβητός τινος μετὰ βραστήρων, ὑποκειμένου εἰς τὰς ἑξῆς συνθήκας

Μῆκος λέβητος 5,00μ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ 0,90

Μῆκος ἑκάστου βραστῆρος 5,00μ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ.. 0,40

Ἐπιφάνεια θερμάνσεως τοῦ λέβητος ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ἀναπτύξεως 7,06

Ἐπιφάνεια θερμάνσεως τοῦ ἑνὸς βραστῆρος ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀναπτύξεως αὐτοῦ.. 4,21

Ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου βραστῆρος ἐπίσης 4,21

Ὁλικὴ ἐπιφάνεια θερμάνσεως .... τετρ. μέτρα 15,48

ἔσεται $\frac{15,48}{1,30}=11.90$ ἵππων δύναμις.

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ λέβητος ἔσεται 14,12τ. μ. ἡ δὲ ἑκάστου βραστῆρος 5,61τ. μ..

ΠΙΝΑΞ

τῶν διαστάσεων καὶ πάχεων κυλινδρικῶν ἐκ πεταλείων λεβήτων μετὰ βραστήρων διὰ θλίψιν πέντε ἀτμοσφαιρῶν.

Ἀριθμὸς ἵππων δυνάμεως.	Μῆκος τῶν λεβήτων	Μῆκος τῶν δύο βραστήρων	Διάμετρος τῶν λεβήτων	Διάμετρος τῶν βραστήρων	Πάχος τοῦ πεταλείου
	Μέτρα	Μέτρα	Μέτρα	Μέτρα	Ὑποχιλιόμ.
2	1,65	1,75	0,66	0,28	8,00
4	2,10	2,20	0,70	0,30	8,00
6	2,70	2,85	0,75	0,35	9,00
8	3,40	3,60	0,80	0,35	9,00
10	4,10	4,30	0,80	0,38	10.00
12	4,80	5,00	0,80	0,38	10,00
15	5,60	5,80	0.80	0,45	10,00
20	6,60	6,80	0,85	0,50	10,00
25	8,00	8,20	0,85	0,50	10,00
30	8,30	8,50	1,00	0,60	10,50
35	9,50	9,70	1,00	0,60	11,00
40	10,00	10,30	1,00	0,70	11,00

Εὑρεῖν τὸ μῆκος Μ κυλινδρικοῦ τινος λέβητος ἄνευ βραστήρων, δυναμένου νὰ παρέχῃ δύναμιν 6 ἵππων, τῆς διαμέτρου του οὔσης 0,80, τῆς δ' ἐπιφανείας θερμάνσεως 1,30τ. μ. καθ' ἵππου δύναμιν. Ἡ ὁλικὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια ἔσεται $1,30\times6=7,80$τ. μ..

Ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια θερμάνσεως, οὖσα τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ λέβητος, ἔσεται

$$7.80 = \frac{2}{3} M \times 2\pi P = M \times \frac{4\pi P}{3}.$$

ἐν ᾧ M ἐστὶ τὸ ζητούμενον μῆκος τοῦ λέβητος, P ἡ γνωστὴ αὐτοῦ ἀκτὶς οὖσα τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τουτέστι $\frac{0,80}{2} = 0,40$, καὶ $\pi = 3,14$. Τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν σχετικῶν τιμῶν, ὁ τύπος καθίσταται

$$7.80 = M \times 3,14 \times 0,40 \times \frac{4}{3} = M \times 1,675$$

ὥστε τὸ μῆκος τοῦ λέβητος ἔσεται $M = \frac{7,80}{1,675} = 4,65^{\mu.}$

383. Ὁπόταν ἡ ἐξάτμισις δέον νὰ ἐνεργεῖται τάχιστα, ὡς ἐν ταῖς ἀτμαμάξαις, γίνεται χρῆσις λεβήτων φερόντων ἐσωτερικῶς σωλῆνας περιβαλλομένους ὑπὸ τοῦ πρὸς ἐξάτμησιν ὕδατος καὶ εἰς οὓς εἰσέρχεται ἡ φλὸξ καὶ διέρχεται ὁ καπνός.

Διὰ τῶν τοιούτων λεβήτων ἡ ποσότης τοῦ ἐξατμιζομένου ὕδατος ἐστὶν ἀνωτέρα τῆς ἐν τοῖς κοινοῖς λέβησι.

Ἐν τοῖς ἐξατμιστηρίοις, καλεῖται ἐξατμιστικὴ δύναμις ἑνὸς ἵππου, ἡ ἐξάτμισις 25 λιτρῶν ὕδατος καθ' ὥραν, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς 18 ἕως 20 χιλιογρ. κατὰ τετρ. μέτρον καὶ καθ' ὥραν.

384. *Παρελκόμενα τῶν λεβήτων. Ἐπίκλειστρα ἀσφαλείας.* Ταῦτα χρησιμεύουσι πρὸς διεκφυγὴν τοῦ ἀτμοῦ, ὁπόταν ἡ ἔντασις αὐτοῦ ὑπερβῇ τὴν ἀρχικὴν θλίψιν. Ἡ ὀπὴ αὐτῶν δέον νὰ ᾖ τοιαύτη ὥστε νὰ ἐπιτρέπῃ τὴν διέξοδον τῆς μεγαλειτέρας ποσότητος τοῦ ἀτμοῦ ἣν ὁ λέβης δύναται νὰ περιλάβῃ.

Ὁ ἐν χρήσει τύπος πρὸς προσδιορισμὸν τῆς διαμέτρου τοῦ ἐπικλείστρου ἀσφαλείας τῶν ἀτμομηχανῶν μεγίστης θλίψεως ἐστὶ $\Delta = 2,6\sqrt{\frac{2}{\text{Υ}-0,412}}$, ἐν ᾧ Δ ἐστὶν ἡ διάμετρος εἰς ὑφεκατόμετρα, E ἡ ἐπιφάνεια τῆς θερμάνσεως εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, καὶ Υ ἡ εἰς ἀτμοσφαίρας θλίψις τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ.

385. Γνωστῆς οὔσης τῆς ἐπιφανείας ἐπικλείστρου τινὸς ἀσφαλείας εἰς τετραγωνικὰ ὑφεκατόμετρα, καθὼς καὶ τῆς ἐν τῷ λέβητι ἐντάσεως τοῦ ἀτμοῦ, εὔκολος ἀποβαίνει ὁ προσδιορισμὸς τοῦ βάρους ὅπερ τοῦτο δέον νὰ φέρῃ, ἵνα ἰσορροπήσῃ τὴν θλίψιν ταύτην τοῦ ἀτμοῦ.

Θετέον ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ ἐστὶ 4 ἀτμοσφαι-

ρῶν ἢ 4,132χιλ. κατὰ τετραγωνικὸν ὑφεκατόμετρον, ἡ εἰς τετραγωνικὰ ὑφεκατόμετρα ἐπιφάνεια τοῦ ἐπικλείστρου 17,76, ἡ ὁλικὴ θλίψις τοῦ ἀτμοῦ ἔσεται 17,76×2,132=73,38χιλ.. Τὸ ἐπίκλειστρον ὅμως φέρει ἀντιθέτως τῇ ἐντάσει τοῦ ἀτμοῦ τὴν πίεσιν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς θλίψεως, ἥτις ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ ὑφεκατομέτρου ἐστὶν 1,033χιλ., δι' ἅπασαν δὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐπικλείστρου 1,033×17,76=18,34χιλ. ἅτινα δέον ν' ἀφαιρεθῶσιν ἐξ 73,38. Ἡ διαφορὰ 5504χιλ. ἐστὶ τὸ βάρος ὅπερ δέον νὰ προστεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπικλείστρου πρὸς ἰσοῤῥοπίαν τῆς θλίψεως τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ.

Ἀντὶ τὸ ἐπίκλειστρον νὰ ἐπιβαρύνεται διὰ τοῦ ὄγκου τοῦ βάρους 55,04χιλ., γίνεται χρῆσις μοχλοῦ (Σχ. 234) δι' οὗ τὸ βάρος τοῦτο ἐλαττοῦται ἀναλόγως τοῦ μήκους αὐτοῦ. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ προστεθειμένου βάρους ἀναλόγως τοῦ μήκους τοῦ μοχλοῦ, γίνεται ὡς ἐν τῷ περὶ μοχλοῦ ἐῤῥέθη (232).

386. *Ἐπίπλοος*. Τὸ ὕψος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐν τοῖς παγίοις λέβησιν ὕδατος, ῥυθμίζεται δι' ἐπιπλόου οὗ τὸ εἰδικὸν βάρος ἐστὶν ἀνώτερον ἐκείνου τοῦ ὕδατος. Τὸ παρασκεύασμα τοῦτο σύγκειται ἐκ πεπλατυσμένου λίθου ὠειδοῦς ἢ κυκλικοῦ, βυθιζομένου κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ πάχους του ἐν τῷ ὕδατι, καὶ κρεμαμένου διὰ χαλυβδίνης μέρμιθος 3 ἢ 4 ὑποχιλιομ. διαμέτρου, ἥτις κινεῖται ἐντὸς ὀπῆς πλήρους στυπείου πρὸς παρεμποδισμὸν πάσης διεκφυγῆς τοῦ ἀτμοῦ. Ἡ μέρμις αὕτη προσαρμόζεται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ λέβητος πρὸς τὸ ἄκρον ἀντισηκωτῆρος στρεφομένου περὶ τὸ κέντρον του, καὶ φέροντος ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων του βάρος (Σχ. 235).

Ἐν ταῖς ἀτμαμάξαις, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῷ λέβητι ὕδατος, δείκνυται κατ' εὐθείαν δι' ὑελίνου σωλῆνος 10—12 ὑποχιλιομ. διαμέτρου καὶ παχυτάτου, ὅστις ἐστὶ προσκεκολλημένος κατακορύφως διὰ δύο κυρτῶν σωληνηδίων πρὸς τὸν λέβητα (Σχ. 236).

387 Αἱ τῶν λεβήτων ἐκρήξεις προέρχονται τὸ συχνότερον ἐκ τῆς ἀμελείας ἢ ἀπροσεξίας τῶν θερμαστῶν, διότι ἐὰν τὸ ἐν λέβητί τινι ὕδωρ κατέλθῃ ὑπὲρ τὸ δέον, ἡ περιβάλλουσα τὴν παρειὰν φλόξ, ἐρυθροπυρεῖ ταύτην, ὥστε ἂν κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην προστεθῇ νέον ὕδωρ, τοῦτο μεταβάλλεται ἀκαριαίως εἰς ἀτμόν, οὗτος δ' ἀποκτᾶ ἔντασιν ἰσχυροτάτην ἧς ἡ ἐλαστικότης προξενεῖ τὴν τοῦ λέβη-

τος ἔκρηξιν. Ὅθεν ἀπαιτεῖται μεγίστη προσοχὴ εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἐπιπλόου.

Ἐσχάτως προσετέθη εἰς τὸ παρασκεύασμα τοῦ ἐπιπλόου εἰδοποιητήριον σύρικτρον, δι' οὗ εἰδοποιεῖται ὁ θερμαστὴς τὴν στιγμὴν καθ' ἣν τὸ ὕδωρ φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτερον ἢ κατώτερον αὐτοῦ ὅριον ἐν τῷ λέβητι.

388. *Μανογνώμων.* Οὗτος χρησιμεύει ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς μέσης καὶ μεγίστης θλίψεως, πρὸς ἔνδειξιν τῆς ἐντάσεως τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ. Ὑπάρχουσι διάφορα εἴδει μανογνωμόνων.

Ὁ μανογνώμων διὰ πεπιεσμένου ἀέρος, συνίσταται εἰς κυλινδρικὸν ὑέλινον σωλῆνα, 8—9 ὑποχιλ. διαμέτρου καὶ 35 ὑφεκατομ. μήκους, πεφραγμένον δὲ κατὰ τὸ ἀνώτερον ἄκρον. Βυθίζεται ὁ σωλὴν οὗτος διὰ τοῦ ἀνοικτοῦ αὐτοῦ ἄκρου ἐντὸς δοχείου ὑδράργυρον περιέχοντος, ὅπερ συγκοινωνεῖ διὰ σωλῆνος μετὰ κρουνοῦ μὲ τὸν λέβητα. Ὁ σωλὴν ἑνοῦται μετὰ δοχείου στεγανῶς, πρὸς ἀποφυγὴν πάσης διεξόδου.

Ἡ διαίρεσις τοῦ μανογνώμονος τούτου στηρίζεται ἐπὶ τῆς θλίψεως ὄγκου ἀέρος ἐντὸς τοῦ ὑελίνου σωλῆνος, καὶ ἀκολουθούσης τὸν νόμον τοῦ Μαριώττου.

Ἐπίσης γίνεται χρῆσις ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς τοῦ μεταλλίνου μανογνώμονος τοῦ Βουρδῶνος, ὅστις συνίσταται εἰς σωλῆνα σπειροειδεῖ, οὗ τὸ ἓν ἄκρον συγκοινωνεῖ μετὰ τοῦ ἀτμοῦ τοῦ λέβητος, τὸ δ' ἕτερον κινεῖ δείκτην ἐπὶ πλακὸς περιστρεφόμενον. Διὰ τῶν μεταβολῶν τῶν θλίψεων τοῦ ἀτμοῦ, ὁ σωλὴν συστελλόμενος ἢ διαστελλόμενος, μεταβάλλει καμπὴν καὶ περιστρέφει τὸν δείκτην ὅστις δεικνύει ἐπὶ τῆς πλακὸς τὴν θλίψιν τοῦ ἀτμοῦ.

389. Ἡ ἑστία τῶν λεβήτων πυροῦται διὰ στρώματος λιθανθράκων, ἐκτεινομένου ὅσον οἷόν τε κανονικώτερον ἐπὶ ἐσχάρας, ἄνωθεν τῆς τεφροδόχης κειμένης.

Ἐν ταῖς μηχαναῖς μεγίστης θλίψεως, ἡ ἐσχάρα τοῦ κλιβάνου ἔχει συνήθως ἐπιφάνειαν 7 ἕως 8 τετραγωνικῶν ὑποδεκαμέτρων δι' ἕκαστον ἵππον δυνάμενος. Τὸ κενὸν τῶν ῥάβδων κατέχει κατὰ τὴν ποιότητα τοῦ λιθάνθρακος τὸ τέταρτον ἢ τρίτον τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς ἐσχάρας.

390. Τὸ ὕψος τῶν καπνοδόχων ποικίλλει μεταξὺ 20 ἕως 35

μέτρων. Τὸ στόμιον τῆς κορυφῆς, ἐν περιπτώσει ὕψους κατωτέρου τῶν 20,00,$^{\mu.}$ ἐστὶ τὸ πέμπτον περίπου τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐσχάρας, δι' ἀνώτερον δὲ τούτου ὕψος, εἰς τὸ στόμιον δίδεται ἐπιφάνεια τὸ ἕκτον τῆς ἐσχάρας.

391. Τὸ βάθος τῆς τεφροδόχης ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς ἐσχάρας, πολλάκις δ' ἐκτείνεται καθ' ὅλον τὸ μῆκος τοῦ κλιβάνου, πρὸς εὔκολον κυκλοφορίαν τοῦ ἀέρος.

392. Κατὰ τὰ δεδομένα ταῦτα ὁ κλίβανος λέβητος 15 ἵππων δυνάμεως, ἕξει τὰς ἑξῆς διαστάσεις.

Ἐπιφάνεια ἐσχάρας $0{,}08^{\mu.}\times 15=1{,}20^{\mu.}$ καὶ $\sqrt{1{,}20}=1{,}09^{\mu.}$ πλευραί. Δι' ὕψος $20{,}00^{\mu.}$ ἡ ἐσωτερικὴ διατομὴ τῆς καπνοδόχης ἔσεται $\frac{1{,}20}{5}=0{,}24,^{\tau.\ \mu.}$ ἡ δὲ πλευρὰ αὐτῆς $\sqrt{0{,}24}=0{,}50$.

Ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας ἐξατμίζει 40 ἕως 45 χιλιόγραμμα ὕδατος καθ' ὥραν, πλὴν ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ἡ κατὰ μέσον ὅρον ἐξάτμισις ἑκάστου τετραγωνικοῦ μέτρου ἐπιφανείας καθ' ὥραν λαμβάνεται 20 ἕως 25 χιλιόγραμμα.

Ἡ πεῖρα ἐπίσης ἀπέδειξεν ὅτι ἓν τετραγ. μέτρον ἐσχάρας καίει 40 ἕως 50 χιλιογρ. λιθάνθρακος καθ' ὥραν. Ὅθεν λέβης παρέχων 280 χιλιογρ. ἀτμοῦ καθ' ὥραν θέλει καταναλώσει 43 χιλιόγραμμα λιθάνθρακος τῇ ὑποθέσει ὅτι ἕκαστον χιλ. τούτου παράγει 6,5 χιλ. ἀτμοῦ, ὁπότε ἡ κάμινος τοιούτου λέβητος ἔχει ἐσχάραν $1^{\tau.\ \mu.}$ ἐπιφανείας.

393. Εὑρεθήτωσαν αἱ διαστάσεις τῆς καμίνου καὶ καπνοδόχης λέβητος ἀτμομηχανῆς μεγίστης θλίψεως 8 ἵππων δυνάμεως, καταναλισκούσης 5 χιλιογρ. λιθάνθρακος καθ' ἵππον καὶ ὥραν κατὰ μέγιστον ὅρον, τῇ ὑποθέσει $1{,}52^{\tau.\ \mu.}$ ἐπιφανείας θερμάνσεως δι' ἕκαστον ἵππον δυνάμεως.

Ἡ ἐπιφάνεια θερμάνσεως διὰ τοὺς 8 ἵππους δυνάμεως ἔσεται

$$8\times 1{,}52=12{,}16 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

Ἑκάστου τετραγωνικοῦ μέτρου ἐπιφανείας θερμάνσεως παράγοντος κατὰ μέσον ὅρον 20 χιλιογρ. ἀτμοῦ, ὁ ὁλικὸς παραχθησόμενος ἀτμὸς ἔσεται $12{,}16\times 20=243{,}20$ χιλιογρ.

Ἐπειδὴ ἓν χιλγρ. λιθάνθρακος παράγει κατὰ μέσον ὅρον 6 χιλγρ. ἀτμοῦ, ἡ καθ' ὥραν κατανάλωσις λιθανθράκων ἔσεται $\frac{243{,}20}{6}=$ 40,50 χιλγρ.

Ἡ ἀνταποκρινομένη εἰς τὴν κατανάλωσιν ταύτην ἐπιφάνεια τῆς ἐσχάρας, τῇ ὑποθέσει ὅτι ἕκαστον τετραγων. ὑφεκατόμετρον καίει 1,2 χιλ. καθ' ὥραν, ἔσεται $\frac{10.50}{1,20}=33$ τ. ὑφ. ὧν τὸ τέταρτον θέλει μένει ἐλεύθερον πρὸς κυκλοφορίαν τοῦ ἀέρος.

Μένει ἤδη ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς καπνοδόχης, δι'ὃν παρατηρητέον ὅτι ἀπαιτοῦνται 10 κ. μ. ἀέρος πρὸς κατανάλωσιν 1 χιλγρ. λιθάνθρακος, ἑπομένως πρὸς κατανάλωσιν 40,50 χιλ. ἀπαιτοῦνται $40,5\times18=729$ κ. μ. ἀέρος.

Ὁ ἀὴρ οὗτος διερχόμενος διὰ τῆς ἑστίας ἀφίνει μέρος τοῦ ὀξυγώνου αὐτοῦ, ὅπερ ἐν μέρει ἀντικαθίσταται δι' ἀνθρακικοῦ ὀξέως καὶ ἀτμῶν ὕδατος.

Ἐὰν τὰ ἀέρια ταῦτα διεκφεύγουσι διὰ τῆς καπνοδόχης ὑπὸ θερμοκρασίαν 300°, ὁ ὄγκος ὅστις κατὰ τὸν Πεκλέτον ἐστὶ 38,54κ..μ δι' ἕκαστον χλγρ. λιθάνθρακος ἔσεται $40,5\times38,54=1560$ κ. μ. καθ' ὥραν.

Ὁ δὲ κατὰ δευτερόλεπτον διαφεύγων ὄγκος ἐστὶ $\frac{1560}{3600}=0,43$κ.μ.

Ἐὰν δ' ὑποτεθῇ ὡς συμβαίνει συνήθως εἰς τοὺς τοιαύτης δυνάμεως λέβητας, ὅτι ἡ καπνοδόχη ἐστὶν 22 μ. ὕψους, καὶ ὁ ψυχρὸς ἀὴρ 15°, ἡ δι' αὐτῆς ἐκροὴ τοῦ ἀερίου δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$\Upsilon=\sqrt{2g\eta\alpha(\tau-\tau')}.$$

Ἐν τῷ παρόντι παραδείγματι $\eta=22$μ. α ἐστὶ σταθερὰ ποσότης $\alpha=0,00365$, $\tau'=300^\circ$, $\tau=15^\circ$ καὶ $2g=19,62$. Ὥστε ὁ ἄνω τύπος καθίσταται $\Upsilon=\sqrt{19,62\times22\times0,00365\times(300-15)}=21$.

Τουτέστι τὸ ἀέριον διεκφεύγει τῆς καπνοδόχης μετὰ ταχύτητος 21,00 μ. κατὰ δευτερόλεπτον, μὴ λαμβανομένης ὅμως ὑπ' ὄψιν τῆς ἀντιστάσεως τῆς ἐκ τῶν παρειῶν τῆς καπνοδόχης προσγινομένης, ἥτις ὅμως λαμβανομένη ὑπ' ὄψιν ἐλαττοῖ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς $\frac{70}{100}$, ἤτοι $21\times0,70=14,70$ μ.

Ἐὰν ὁ ὄγκος τοῦ κατὰ δευτερόλεπτον διαφεύγοντος διὰ τῆς καπνοδόχης ἀερίου διαιρεθῇ διὰ τῆς εὑρεθείσης ταύτης ταχύτητος, τὸ πηλίκον θέλει δώσει τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν τοῦ στομίου, ἥτις ἐνταῦθα ἔσεται $\frac{0,433}{14,70}=2,9$ τ. ὑφ.

Καλὸν ὅμως εἶναι ἵνα τὸ στόμιον τοῦτο κατασκευασθῇ κατά τι μεγαλείτερον τοῦ ὁρίου τούτου, πρὸ πάντων ὁπόταν ἐνδεχόμενόν ἐστιν, ἵνα ἡ δύναμις τοῦ λέβητος ἐπαυξηνθῇ.

394. Ἡ συγκοινωνία τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ, μετὰ τοῦ κυλίνδρου, γίνεται διὰ σωλῆνος οὗ ἡ διάμετρος διὰ τὰς μηχανὰς ἐλαχίστης θλίψεως ἐστὶ τὸ ἓν πέμπτον τῆς διαμέτρου τοῦ κυλίνδρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ'.

ΠΕΡΙ ΑΤΜΟΜΗΧΑΝΩΝ

395. Ἡ ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς ἐνέργεια τοῦ ἀτμοῦ συνίσταται εἰς τὴν ἀλληλοδιάδοχον πίεσιν ἐπὶ ἑκατέρων τῶν μετώπων ἐμβολέως, δι' ἧς οὗτος λαμβάνει κίνησιν εὐθύγραμμον παλινδρομικήν, κατακόρυφον ἢ ὁριζόντειον, ἥτις μεταδίδεται μετασχηματιζομένη εἰς περιστροφικήν, εἰς τὸν κύριον τῆς μηχανῆς ἄξονα.

Αἱ ἀτμομηχαναὶ πᾶσαι εἰσὶ διπλῆς ἐνεργείας, ἐκτὸς τῶν πρὸς ἄντλησιν τῶν ἐν τοῖς μεταλλείοις ὑδάτων, αἵτινες εἰσὶν ἁπλῆς ἐνεργείας, τουτέστιν ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ μόνον ἐπὶ τοῦ ἑνὸς μετώπου τοῦ ἐμβολέως πρὸς ἀνύψωσιν αὐτοῦ. Αἱ ἀτμομηχαναὶ εἰσὶ τεσσάρων εἰδῶν.

Α'. Μηχαναὶ τοῦ Οὐὰτ μικρᾶς θλίψεως μετὰ συμπυκνωτοῦ, ἄνευ ἀραιωτοῦ, καὶ ἐξ ἑνὸς κυλίνδρου.

Β'. Μηχαναὶ τοῦ Οὐόλφ μέσης θλίψεως μετ' ἀραιωτοῦ καὶ συμπυκνωτοῦ, καὶ ἐκ δύο κυλίνδρων.

Γ'. Μηχαναὶ μεγίστης θλίψεως μετ' ἀραιωτοῦ, ἄνευ συμπυκνωτοῦ καὶ ἐξ ἑνὸς κυλίνδρου.

Δ'. Μηχαναὶ μεγίστης θλίψεως ἄνευ ἀραιωτοῦ καὶ συμπυκνωτοῦ καὶ ἐξ ἑνὸς κυλίνδρου.

396. Ἡ χρῆσις τῶν μηχανῶν τοῦ Οὐὰτ μικρᾶς θλίψεως ὀφείλεται εἰς τὸ κανονικὸν τῆς κινήσεως καὶ τὸ εὔκολον τῆς συντηρήσεως αὐτῶν. Τούτων γίνεται χρῆσις εἰς μέρη ἔνθα τὸ ὕδωρ ἐστὶν ἄφθονον, διότι ὁ ἀτμὸς κατὰ τὴν ἐκ τοῦ κυλίνδρου ἔξοδόν του, ἔρχεται εἰς ἐπαφὴν μετὰ ψυχροῦ ὕδατος καὶ ἀπαρτίζει μετὰ τούτου μῖγμα 40° θερμοκρασίας, διότι τὸ ψυχρὸν ὕδωρ θερμαίνεται ἕνεκα τῆς μετὰ τοῦ ἀτμοῦ συναφείας του. Ἕνεκα τῆς πτώσεως ταύτης τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἐξερχομένου τοῦ κυλίνδρου ἀτμοῦ, ἡ κατ' ἀντίθε-

τον ἔννοιαν τοῦ δρόμου τοῦ ἐμβολέως ἀναπτυσσομένη ἀντίστασις, ἐστὶ πολὺ μικροτέρα παρ' εἰ ὁ ἀτμὸς ἐξήρχετο ἀμέσως εἰς τὴν ἀτμοσφαίραν.

Ἡ κατανάλωσις καυσίμου ὕλης τῶν μηχανῶν τούτων, ἐστὶ κατὰ μέσον ὅρον 5 ἕως 6 χιλ. καθ' ὥραν δι' ἕκαστον ἵππον δυνάμεως, καταναλίσκουσι δὲ ταυτοχρόνως 0,94$^{κ. μ.}$ ὕδατος διά τε τὸν συμπυκνωτὴν καὶ τὴν τοῦ ἀτμοῦ παραγωγήν. Ὁ ἐν τῷ λέβητι ἀτμός, κέκτηται συνήθως θερμοκρασίαν 105°, ἡ δ' ἔντασίς του ἐστὶ 1,18 ἀτμοσφαίρας, ἤτοι ἡ θλίψις 1,20$^{χιλ.}$ κατὰ τετραγωνικὸν ὑφεκατόμετρον. Ἡ ἀσθενὴς θλίψις τοῦ ἐν τῷ λέβητι ἀτμοῦ, καθιστᾶ σπανίας τὰς ἐκρήξεις, δι' ὃ αἱ τοιαῦται μηχαναὶ εἰσὶν ἐν χρήσει εἰς τ' ἀτμοκίνητα πλοῖα.

397. Αἱ μηχαναὶ μέσης θλίψεως τοῦ Οὐόλφ σύγκεινται ἐκ δύο ἰσοϋψῶν πλὴν ἀνίσων διαμέτρων κυλίνδρων, ἐν τῷ μικροτέρῳ τῶν ὁποίων ὁ ἀτμός, ἐνεργεῖ μεθ' ἁπάσης τῆς ἐν τῷ λέβητι ἐντάσεως αὐτοῦ, ἐντεῦθεν δὲ μεταβαίνει εἰς τὸν μεγαλείτερον κύλινδρον, ἔνθα καταλαμβάνει μείζονα χῶρον ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, καλεῖται δὲ τοῦτο ἀραίωσις τοῦ ἀτμοῦ.

Ἡ κατανάλωσις καυσίμου ὕλης ἐστὶ κατὰ μέσον ὅρον 2,5 ἕως 3,5 χιλ. καθ' ὥραν καὶ ἵππον δυνάμεως, ἡ δὲ τοῦ ὕδατος ἐστὶ ταυτοχρόνως καὶ καθ' ἵππον δυνάμεως 0,300$^{κ. μ.}$ ἢ 300 λιτρῶν. Ἡ ὑπεροχὴ τῶν μηχανῶν τούτων ἐπὶ ἐκείνων τοῦ Οὐὰτ συνίσταται εἰς τὴν ἧττονα κατανάλωσιν καυσίμου ὕλης, ἕνεκα ὅμως τοῦ πολυπλόκου τῆς συστάσεώς των, ὑπόκεινται εἰς συχνὰς διαταράξεις καὶ μεγίστη ἀπαιτεῖται ἐπιμέλεια πρὸς συντήρησιν αὐτῶν.

398. Αἱ μηχαναὶ μεγίστης θλίψεως μετ' ἀραιωτοῦ, ἄνευ συμπυκνωτοῦ καὶ ἐξ ἑνὸς κυλίνδρου, διαφέρουσι καθ' ὅτι ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ ὁλοκλήρως, οὐχὶ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβολέως, ἀλλὰ μέρος αὐτῆς μόνον, κατὰ δὲ τὸ ἐπίλοιπον μέρος ἀραιοῦται. Καταναλίσκουσι μόνον τὸ πρὸς παραγωγὴν τοῦ ἀτμοῦ ἀπαιτούμενον ὕδωρ, ὁ δὲ ἀτμὸς ἐξερχόμενος τοῦ κυλίνδρου, διασκορπᾶται εἰς τὴν ἀτμοσφαίραν. Αἱ τοιαῦται μηχαναὶ εἰσὶν ἐν χρήσει πρὸ πάντων ἐν τοῖς κλωστηρίοις.

399. Αἱ μηχαναὶ μεγίστης θλίψεως ἄνευ ἀραιωτοῦ ἢ συμπυκνωτοῦ, διακρίνονται διὰ τὴν ἁπλότητα τῆς διασκευῆς των, καὶ

τὸν ὀλίγον χῶρον ὃν καταλαμβάνουσι, δι' ὃ εἰσὶν ἐν χρήσει κυρίως ἐν ταῖς ἀτμαμάξαις, ἔτι δὲ τὸ καταναλισκόμενον ὕδωρ ἐστὶ μόνον τὸ πρὸς παραγωγὴν τοῦ ἀτμοῦ ἀπαιτούμενον.

Ἡ εἰς καύσιμον ὕλην κατανάλωσις αὐτῶν ἐστὶν 6 ἕως 7 χιλ. καθ' ὥραν καὶ ἵππον δυνάμεως, διότι ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ δι' ὅλης αὐτοῦ τῆς ἐντάσεως καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν τοῦ ἐμβολέως.

Ὁ ἐξερχόμενος τοῦ κυλίνδρου ἀτμός, διασκορπᾶται εἰς τὴν ἀτμοσφαίραν, ὅπερ προξενεῖ ἀντιθέτως ἀντίστασιν τῇ δυνάμει τοῦ ἀτμοῦ μιᾶς ἀτμοσφαίρας, ὥστε ἐὰν ἡ ἐν τῷ λέβητι ἀντίστασις τοῦ ἀτμοῦ ἐστὶν 6 ἀτμοσφαιρῶν, ἡ κυρίως ἐνεργοῦσα δύναμις δέον νὰ θεωρεῖται 5 τοιούτων μόνον.

400. Ἡ χρῆσις τῶν ἀτμομηχανῶν δὲν ἠδύνατο νὰ γενικευθῇ ὡς ἡ τῶν ὑδραυλικῶν τροχῶν, παρ' ἐνόσῳ αὕτη ἠδύνατο νὰ μεταδώσῃ περιστροφικὴν κίνησιν εἰς ἄξονα, κίνησις ἥτις δύναται νὰ χρησιμεύσῃ εἰς πᾶν μηχάνημα. Ἡ περιγραφὴ τῆς μηχανῆς τοῦ Οὐάτ, ἥτις ἐστὶ τὸ πρότυπον τῶν ἀτμομηχανῶν, θέλει δώσει ἀκριβῆ ἰδέαν τῆς διασκευῆς καὶ ἐνεργείας τῶν τοιούτων ἐν γένει.

Τὸ (Σχ. 237) παριστᾷ ἐν συνόλῳ τὴν μηχανὴν τοῦ Οὐάτ, τὸ δὲ (Σχ. 238) παριστᾷ ὑπὸ μείζονα κλίμακα διατομὴν πρὸς κατάδειξιν τῶν ἐσωτερικῶν αὐτῆς μερῶν. Ὁ ἑκατέρωθεν πεφραγμένος κύλινδρος Α, περιέχει τὸν παλινδρομικῶς κινούμενον ἐμβολέα Β, οὗ ὁ μίσχος συνδέεται μετὰ τοῦ ἀντισηκωτῆρος ΔΕΖ διὰ τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ Οὐάτ, ἡ δὲ παλινδρομικὴ τούτου κίνησις προξενεῖ τὴν παλινδρομικὴν κίνησιν τοῦ ἀντισηκωτῆρος περὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ Ε. Τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτοῦ συνδέεται διὰ σιδηρᾶς ῥάβδου Θ, πρὸς στρόφαλον παγίως προσκεκολλημένον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου ἄξονος Κ. Ἡ παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ ἀντισηκωτῆρος μεταδίδει παλινδρομικὴν κίνησιν εἰς τὴν ῥάβδον, ἥτις ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ στροφάλου προξενεῖ τὴν συνεχῆ περιστροφικὴν κίνησιν τοῦ ἄξονος Κ, ἐφ' οὗ εὑρίσκεται ὁ κανονιστὴρ τροχὸς Λ πρὸς ῥύθμισιν τῆς κινήσεως. Διὰ τοῦ τροχοῦ τούτου κατωρθοῦται ἵνα ἡ κίνησις ᾖ συνεχής, καὶ μὴ διακόπτεται κατὰ τὰς στιγμὰς καθ' ἃς ἥ τε ῥάβδος καὶ ὁ στρόφαλος εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὅπερ συμβαίνει δὶς δι' ἑκάστην περιστροφήν, φανερὸν δ' ἐστὶν ὅτι κατὰ τὰς στιγμὰς ταύτας, ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς ῥάβδου δύναμις κατὰ μῆκος αὐτῆς, οὐ-

δόλως τείνει πρὸς περιστροφὴν τοῦ στροφάλου, ὥστε ὁ ἄξων ἐξακολουθεῖ τὴν κίνησίν του, μόνον δυνάμει τῆς κτηθείσης αὐτοῦ ταχύτητος, ἥτις ἐστὶν τοσοῦτον μεγαλειτέρα, ὅσον τὸ κατὰ τὴν κίνησίν του παρασυρόμενον παρ' αὐτοῦ σῶμα καὶ ἡ ταχύτης τῆς περιςροφῆς εἰσὶ μείζονα. Ὁ ἀτμὸς τοῦ λέβητος ἔρχεται εἰς τὸν κύλινδρον διὰ τοῦ σωλῆνος α (Σχ. 238), εἰσέρχεται δ' ἐν αὐτῷ διὰ χώρου τινος β, ὅστις καλεῖται ἀτμοθήκη, ἀφ' ὅπου εἰσέρχεται εἰς τὸν κύλινδρον ἐκ τοῦ κάτω ἢ ἄνω ἐπικλείστρου, καθ' ὅσον ὁ ἐμβολεὺς ἀνέρχεται ἢ κατέρχεται. Ὁ ἐν τῇ ἀτμοθήκῃ ταύτῃ κινούμενος σύρτης, παράγει τὴν ὁτὲ μὲν ἄνωθεν ὁτὲ δὲ κάτωθεν δίοδον τοῦ ἀτμοῦ. Ὁ σύρτης οὗτος ὃν ἰδίως παριστᾶ τὸ (Σχ. 239) συνίσταται εἰς κενὸν κύλινδρον πλατυνόμενον κατὰ τὰ δύο ἄκρα καὶ φέροντα μίσχον δι' οὗ τίθεται εἰς κίνησιν ἐν τῇ ἀτμοθήκῃ. Τὰ (Σχ. 240 καὶ 241) παριστῶσι τὰς δύο διαφόρους θέσεις ἃς λαμβάνει ὁ σύρτης, ἀνερχομένου ἢ κατερχομένου τοῦ ἐμβολέως, εἰσὶ δὲ ὑπὸ μεγαλειτέραν κλίμακα τὰ ἐν τῷ (Σχ. 238) ἐν μικρῷ παριστανόμενα. Ὁ σύρτης ἐρείδεται διὰ τῶν μικρῶν αὐτοῦ μετώπων ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν τῶν περιβαλλουσῶν τὰς ὀπάς. Ὁ σύρτης περιβάλλεται στυπείοις ἵνα καλῶς ἐφαρμόζεται πρὸς τὰς παρειὰς τῆς ἀτμοθήκης. Διὰ τῆς διατάξεως ταύτης ἡ ἀτμοθήκη διαχωρίζεται εἰς δύο διακεκριμένα μέρη, ὧν τὸ μὲν συγκοινωνεῖ μετὰ τοῦ σωλῆνος α δι' οὗ ἔρχεται ὁ ἀτμός, τὸ δ' ἕτερον εὑρίσκεται εἰς διαρκεῖ συγκοινωνίαν μετὰ τοῦ σωλῆνος δ ὅστις ἀπολήγει εἰς τὸν συμπυκνωτὴν Ε. Τὸ (Σχ. 240) παριστᾶ τὸν σύρτην κατέχοντα τὴν ἀνωτάτην αὐτοῦ θέσιν.

Ὁ ἐκ τοῦ λέβητος ἐρχόμενος ἀτμὸς διέρχεται πέριξ αὐτοῦ, φθάνων εἰς τὸ ἀνώτερον μέρος τοῦ κυλίνδρου. Τὸ κατώτερον μέρος εὑρίσκεται εἰς συγκοινωνίαν μετὰ τοῦ συμπυκνωτοῦ, καὶ ὁ ἐμβολεὺς κατέρχεται διὰ τῆς ὑπερβαλλούσης θλίψεως ἣν ὑφίσταται ἐπὶ τοῦ ἄνω αὐτοῦ μετώπου. Τὸ (Σχ. 241) παριστᾷ τὸν σύρτην ἐν τῇ κατωτάτῃ αὐτοῦ θέσει· ὁ ἐκ τοῦ λέβητος ἐρχόμενος ἀτμὸς ἐνεργεῖ ὑπὸ τὸν ἐμβολέα, ὁ δ' ἄνωθεν αὐτοῦ εὑρισκόμενος τοιοῦτος μεταβαίνει εἰς τὸν συμπυκνωτὴν διερχόμενος τὸν σύρτην κατὰ μῆκος, ὥστε ὁ ἐμβολεὺς ἀνέρχεται.

Διὰ τοῦ σωλῆνος ζ, ἔρχεται πίδαξ ψυχροῦ ὕδατος διαρκῶς εἰς

τὸν συμπυκνωτήν, τῆς ποσότητος τοῦ ὕδατος ῥυθμιζομένης διὰ τοῦ κρουνοῦ θ. Τὸ εἰς τὸν πυθμένα τοῦ συμπυκνωτοῦ συναζόμενον θερμὸν ὕδωρ, προερχόμενον ἐν μέρει μὲν ἐκ συμπυκνωθέντος ἀτμοῦ, ἐν μέρει δὲ διὰ τοῦ ὑπὸ τοῦ σωλῆνος ζ φερομένου ὕδατος, ἀντλεῖται διαρκῶς δι' ἀντλίας, δι' ἧς συνάμα ἀντλεῖται καὶ μέρος τοῦ ἐν τῷ συμπυκνωτῇ ἀέρος. Ὁ ἐμβολεὺς τῆς ἀντλίας ταύτης η ἐστὶ προσαρμοσμένος διὰ μακροῦ μίσχου εἰς τὸ σημεῖον τοῦ Θ ἐνάρθρου παραλληλογράμμου, φέρει δ' οὗτος δύο ἐπίκλειστρα ι ι ἀνοίγοντα ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Ὁ σωλὴν δι' οὗ συγκοινωνεῖ ὁ συμπυκνωτὴς μετὰ τοῦ κάτω μέρους τῆς ἀντλίας, φέρει ἐπίσης ἐπίκλειστρον η ἀνοῖγον πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀντλίας.

Τὸ παρὰ τῆς ἀντλίας ἀντλούμενον θερμὸν ὕδωρ ἐκ τοῦ συμπυκνωτοῦ χύνεται εἰς ἐπιστεγαστρίδα λ, ἀφ' ὅπου μέρος τούτου ἀντλεῖται διὰ τῆς χορηγίδος ἀντλίας καὶ φέρεται πάλιν εἰς τὸν λέβητα πρὸς ἀντικατάστασιν τοῦ εἰς ἀτμοὺς ἐξαχθέντος. Ὁ ἐμβολεὺς τῆς χορηγίδος ἀντλίας, τίθεται ἐπίσης εἰς κίνησιν διὰ τοῦ ἀντισηκωτῆρος, διὰ τῆς ἀνυψώσεως τοῦ ὁποίου τὸ ἐν τῇ ἐπιστεγαστρίδι ὕδωρ ἐκμυζᾶται ὑπὸ τοῦ σωλῆνος ν καὶ διέρχεται διὰ τοῦ ἀνοίγοντος ἐπικλείστρου, κατερχομένου δ' ἀκολούθως τούτου, τὸ ἐπίκλειστρον Θ κλείει, ἀνοίγει δὲ τὸ Θ′, τὸ δ' ὕδωρ ἐξωθεῖται εἰς τὸν σωλῆνα π, ὅστις φέρει αὐτὸ εἰς τὸν λέβητα.

Τρίτη ἀντλία ψ, τιθεμένη ἐπίσης εἰς κίνησιν διὰ τοῦ ἀντισηκωτῆρος, ἀντλεῖ ψυχρὸν ὕδωρ ἔκ τινος φρέατος ἢ δεξαμενῆς, καὶ χύνει αὐτὸ εἰς ἰδίαν ἐπιστεγαστρίδα διὰ τοῦ στομίου ρ, τὸ ὕδωρ δὲ τοῦτο ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ σωλῆνος ζ εἰς τὸν συμπυκνωτὴν φερόμενον, ἐν ᾧ πίπτει ἐν εἴδει βροχῆς πρὸς συμπύκνωσιν τοῦ ἀτμοῦ.

Ἡ παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ σύρτου δι' ἧς ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ ὁτὲ μὲν ἄνωθεν ὁτὲ δὲ κάτωθεν τοῦ ἐμβολέως, μεταδίδεται αὐτῷ ὑπὸ τῆς μηχανῆς. Πρὸς τοῦτο ὁ ἄξων Κ φέρει ἔκκεντρον (336) δακτυλίῳ περιβεβλημένον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιστρεφόμενον ὀλισθαίνει. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἄξονος Κ, τὸ μᾶλλον ἐξέχον μέρος τοῦ ἐκκέντρου, φέρεται ὁτὲ μὲν δεξιὰ ὁτὲ δὲ ἀριστερὰ, τὸ δὲ δακτύλιον Ξ, συνδεδεμένον μετὰ τῶν ῥάβδων σσ, καὶ μὴ δυνάμενον νὰ περιστραφῇ μετὰ τοῦ ἐκκέντρου, ὠθεῖται ὑπ' αὐτοῦ ὁτὲ μὲν πρὸς τὸ ἓν ὁτὲ δὲ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος, ὅπερ προξενεῖ τὴν παλινδρομικὴν κί-

νησιν τῶν ῥάβδων σσ. Αἱ ῥάβδοι αὗται ἑνούμεναι κατὰ τὸ ἕτερον ἄκρον, φέρουσιν ἐγκοπὴν δι' ἧς δράττουσι τὴν βάλανον τ ἀγκωνωτοῦ τινος μοχλοῦ τ κ υ. Ἕνεκα τῆς παλινδρομικῆς κινήσεως τῶν ῥάβδων σσ, ὁ μοχλός των περιστρέφεται περὶ τὸ πάγιον αὐτοῦ σημεῖον κ ποτὲ μὲν κατὰ μίαν ἔννοιαν, ποτὲ δὲ κατ' ἀντίθετον, καὶ ἡ ἀλληλοδιάδοχος αὕτη αὐτοῦ κίνησις μεταδίδεται εἰς κατακόρυφον μίσχον, ἐναρθρούμενον ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς Υ πρὸς τὸν μοχλὸν, ἀφ' ἑτέρου δὲ πρὸς τὸν μίσχον τοῦ σύρτου. Ὅθεν διὰ τῆς κινήσεως ταύτης τοῦ ἐκκέντρου, ἐνεργουμένης ὑπὸ τῆς μηχανῆς αὐτῆς, φέρεται τακτικῶς ὁ σύρτης ἐν ἑκάστῃ στιγμῇ εἰς θέσιν κατάλληλον ἵνα ὁ ἀτμὸς ἐξακολουθῇ τὴν ἐνέργειάν του. Καθ' ἣν στιγμὴν ἡ μηχανὴ τίθεται εἰς κίνησιν, ὁ διευθύνων ἀνυψεῖ τὴν λαβὴν εἰς ἣν ἀπολήγουσιν οἱ κανόνες σσ, ἵνα ὁ μοχλὸς μένει ἐλεύθερος ἐν τῇ κινήσει του, ἀκολούθως δὲ δράττων τὴν λαβὴν εἰς ἣν λήγουσιν οἱ βραχίονες κυ, θέτει εἰς κίνησιν τὸν μοχλὸν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ μεταδίδῃ εἰς τὸν σύρτην διαδοχικῶς τὰς θέσεις ἃς δέον νὰ λαμβάνῃ ἵνα ὁ ἀτμὸς ἐνεργῇ ἀλληλοδιαδόχως ἐφ' ἑκάστου τῶν μετώπων τοῦ ἐμβολέως, τεθείσης δὲ τῆς μηχανῆς εἰς κίνησιν, ἐπαναφέρει τὴν συγκοινωνίαν τῶν ῥάβδων σσ μετὰ τοῦ μοχλοῦ των, καὶ ἡ κίνησις ἐξακολουθεῖ πλέον ἀφ' ἑαυτῆς.

Πρὸς ῥύθμισιν τῆς κινήσεως τῆς μηχανῆς τίθεται ἐπ' αὐτῆς ῥυθμιστὴς συγκείμενος ἐκ κατακορύφου στύλου ψ, ἐφ' οὗ στρεφομένου, περιστρέφονται δύο σφαῖραι κρεμάμεναι διὰ βραχιόνων, οἵτινες ἀνέρχονται ἢ κατέρχονται διὰ δύο κανόνων ἐναρθρουμένων μετ' αὐτῶν καὶ μετ' αὐλοῦ ὀλισθαίνοντος κατὰ μῆκος τοῦ στύλου, ὥστε τὰ τέσσαρα ταῦτα τεμάχια ἀπαρτίζουσιν ἔναρθρον παραλληλόγραμμον. Ὁ κατακόρυφος στύλος ψ τίθεται εἰς κίνησιν δι' ἀτέρμονος ἱμάντος χ χ ὅστις μεταδίδει εἰς αὐτὸν τὴν κίνησιν τοῦ ἄξονος Κ. Ὁ κανονιστὴρ οὗτος διατίθεται εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐνεργῇ ἀφ' ἑαυτοῦ ἐπὶ τῆς μηχανῆς πρὸς ἐπαύξησιν ἢ ἐλάττωσιν τῆς δυνάμεως, καθόσον ἡ κίνησις ἐλαττοῦται ἢ αὐξάνει. Πρὸς τοῦτο ὁ αὐλὸς τῆς κορυφῆς τοῦ παραλληλογράμμου, φέρει κυκλικὴν ἐγκοπὴν ὁμοίαν λαιμῷ τροχαλίας, μοχλὸς δὲ προσαρμοζόμενος δι' ἑνὸς τῶν ἄκρων του πρὸς ὁριζόντειον ἄξονα, ἀπολήγει κατὰ τὸ ἕτερον εἰς δίκρανον οὗ τὰ δύο σκέλη ἐμπλέκονται ἐν τῇ ἐγκοπῇ. Ὁ μοχλὸς οὗτος οὐδό-

λως ἐνοχλεῖ τὴν περιστροφικὴν κίνησιν τοῦ αὐλοῦ τοῦ κανονιστῆρος, περιστρεφομένου τούτου ἐλευθέρως μεταξὺ τῶν σκελῶν τοῦ δικράνου, ἐὰν ὅμως ἡ περιστροφικὴ κίνησις ἐπιταχυνθῇ, αἱ σφαῖραι ἀπομακρύνονται περισσότερον, ὁ αὐλὸς ἀνέρχεται, καὶ τὸ δίκρανον τοῦ μοχλοῦ ἀνέρχεται ἐπίσης, τοὐναντίον δὲ κατέρχεται τὸ δίκρανον τοῦτο ἐπιβραδυνομένης τῆς κινήσεως τῆς μηχανῆς. Ὅθεν ὁ μοχλὸς, θέλει περιστρέφει τὸν ὁριζόντειον ἄξονα ἐφ' οὗ ἐστὶ προσαρμοσμένος κατὰ μίαν ἢ κατ' ἄλλην ἔννοιαν, καθ' ὅσον ἡ μηχανὴ κινεῖται ταχύτερον ἢ βραδύτερον.

Ἡ κίνησις αὕτη μεταδίδεται δι' ἀναλόγων κανόνων καὶ μοχλῶν, ὧν ἡ κατανόησις τῆς διατάξεως ἐστὶν εὔκολος, εἰς τὸν ἄξονα ἐπικλείστρου κειμένου ἐντὸς τοῦ φέροντος τὸν ἀτμὸν τοῦ λέβητος εἰς τὴν ἀτμοθήκην σωλῆνος, ὡς δείκνυται ἐν τοῖς (Σχ 240 καὶ 241). Ὅθεν προκύπτει ὅτι τὸ ἐπίκλειστρον διατίθεται οὕτως ὥστε νὰ παρέχῃ τὴν διάβασιν πλειοτέρου ἢ ὀλιγωτέρου ἀτμοῦ, καθ' ὅσον ἡ κίνησις τῆς μηχανῆς βραδύνεται ἢ ἐπιταχύνεται.

Αὕτη ἐστὶν ἡ διάταξις καὶ ὁ τρόπος τῆς ἐνεργείας τῆς μηχανῆς τοῦ Οὐὰτ, ἥτις ἐστὶ τὸ πρότυπον πασῶν τῶν ἀτμομηχανῶν. Τὰ διάφορα συνιστῶντα αὐτὴν μέρη λαμβάνουσι καθ' ἑκάστην διαφόρους τροποποιήσεις πρὸς ἐντελεστέραν εὐχέρειαν τῆς ἐνεργείας αὐτῶν.

401. Ἡ μηχανὴ τοῦ Οὔλφ σύγκειται ἐκ δύο κυλίνδρων παρακειμένων, ἰσοϋψῶν πλὴν διαφόρων διαμέτρων, ἐν οἷς ὁ ἀτμὸς εἰσέρχεται ἀλληλοδιαδόχως. Διὰ τῆς διατάξεως ταύτης ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ μετ' ἀραιώσεως. Οἱ δύο ἐμβολεῖς Α καὶ Β (Σχ. 242), συνδέονται μεταξύ των διὰ τῶν ἄκρων τῶν μίσχων αὐτῶν, ὥστε κινοῦνται συνάμα, καὶ εὑρίσκονται διαρκῶς εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος ἐν τοῖς κυλίνδροις Γ καὶ Δ. Ὁ ἀτμὸς τοῦ λέβητος εἰσέρχεται εἰς τὸν κύλινδρον Γ, διὰ τῶν κρουνῶν Ε καὶ Ζ, ὁτὲ μὲν ἄνωθεν ὁτὲ δὲ κάτωθεν τοῦ ἐμβολέως. Τὸ ἄνω μέρος τοῦ κυλίνδρου Γ συγκοινωνεῖ μετὰ τοῦ κάτω τοῦ κυλίνδρου Δ, τὸ δὲ ἄνω τούτου μετὰ τοῦ κάτω τοῦ Γ, διὰ σωλήνων μετὰ κρουνῶν Θ καὶ Η, ὁ δὲ σωλὴν Δ συγκοινωνεῖ μετὰ τοῦ συμπυκνωτοῦ διὰ σωλήνων μετὰ κρουνῶν Κ. Λ. Ἀνοιγομένων τῶν κρουνῶν ΕΗΛ, τῶν λοιπῶν κεκλεισμένων ὄντων, ὁ ἀτμὸς τοῦ λέβητος θλίβει τὸν ἐμβολέα Α ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ὁ δὲ ἀτμὸς ὅστις εὑρίσκεται ὑπὸ τὸν ἐμβολέα τοῦτον, καὶ ὅστις ἐν μέ-

ρει εἰσῆλθεν εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ κυλίνδρου Δ, θλίβει τὸν ἐμβολέα Α ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ τελευταία αὕτη θλίψις ὑπερνικᾷ τὴν πρώτην, διότι ὁ ἐμβολεὺς Β ἐστὶ μείζων τοῦ ἑτέρου, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δύο τούτων θλίψεων, προστίθεται εἰς τὴν θλίψιν ἣν ὑφίσταται ὁ ἐμβολεὺς Α ἐπὶ τοῦ ἄνω αὐτοῦ μετώπου, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο τῶν θλίψεων ὠθεῖ τοὺς ἐμβολεῖς πρὸς τὰ κάτω. Κατελθόντες οὗτοι εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τῆς διαδρομῆς των, ἀνοίγουσιν οἱ κρουνοὶ ΕΗΛ, οἱ δ' ἐπίλοιποι κλείουσι, καὶ ὁ ἀτμὸς τοῦ λέβητος εἰσέρχεται εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ κυλίνδρου Γ, ὁ δὲ εὑρισκόμενος εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ κυλίνδρου τούτου εἰσέρχεται εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ κυλίνδρου Δ, ἐκεῖνος δὲ ὅστις εὑρίσκετο εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ κυλίνδρου τούτου μεταβαίνει εἰς τὸν συμπυκνωτήν. Ὅθεν οἱ ἐμβολεῖς ἀνέρχονται διὰ τῆς ἐνεργείας δυνάμεως ἴσης ἐκείνης δι' ἧς κατῆλθον, καὶ οὕτω καθεξῆς. Οἱ κρουνοὶ ἐτέθησαν ἐνταῦθα πρὸς κατάληψιν τοῦ τρόπου τῆς ἐνεργείας τοῦ ἀτμοῦ, ἐν τῇ μηχανῇ ὅμως ἀντὶ τούτων ὑπάρχουσι σύρται καταλλήλως διατεταγμένοι.

Ἡ ὁλικὴ δύναμις διὰ τῆς ἐνεργείας τῆς ὁποίας ἀνέρχονται ἢ κατέρχονται οἱ ἐμβολεῖς, ἐστὶ μεγαλειτέρα ἐκείνης ἥτις θ' ἀνεπτύσσετο ἐὰν ὁ κύλινδρος Γ, εὑρίσκετο μόνος, καὶ ἂν ὁ ἀτμὸς μετὰ τὴν ἐν αὐτῷ ἐνέργειάν του μετέβαινεν ἀμέσως εἰς τὸν συμπυκνωτήν, μολοντοῦτο ἡ καταναλισκομένη ποσότης ἀτμοῦ θὰ ἦτο ἡ αὐτὴ δι' ἑκάστην διαδρομὴν τοῦ ἐμβολέως. Ὅθεν διὰ τῆς χρήσεως δευτέρου κυλίνδρου, αὐξάνει τὸ παραγόμενον ἔργον διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος ἀτμοῦ, καθ' ὅτι οὗτος ἀραιοῦται μεταβαίνων ἐκ τοῦ κυλίνδρου Γ εἰς τὸν Δ, μεταβαίνει δὲ εἰς τὸν συμπυκνωτὴν ἀφοῦ χρησιμοποιηθῇ καὶ ἀραιωθῇ

402. Ἡ παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ ἐμβολέως μεταδίδεται εἰς τὴν μηχανὴν τοῦ Οὐάτ ὡς ἐρρέθη δι' ἀντισηκωτῆρος, ῥάβδου, καὶ στροφάλου. Ἐνίοτε ὁ ἀντισηκωτὴρ παραλείπεται ἐντελῶς, ἑνοῦται δὲ ἀμέσως τὸ ἄκρον τοῦ μίσχου τοῦ ἐμβολέως μετὰ τῆς ῥάβδου (Σχ. 243). Πρὸς καθοδηγίαν τῆς εὐθυγράμμου κινήσεως τοῦ μίσχου, τὸ ἄκρον τούτου Β φέρει δύο εἰδικὰ μέρη ἑκατέρωθεν αὐτοῦ, ἅτινα δύνανται νὰ ὦσι καὶ τροχαλίαι, καὶ ἅτινα ὀλισθαίνουσι μεταξὺ τῶν κατευθυντήρων ΕΕ.

Ἐνίοτε προσέτι παραλείπεται καὶ αὐτὴ ἡ ῥάβδος, ὁ δὲ μίσχος τοῦ ἐμβολέως ἑνοῦται ἐνάρθρως μετὰ τοῦ στροφάλου. Πρὸς τοῦτο ὅμως δεῖται ἵνα ὁ κύλινδρος Α ἐστὶ κινητὸς (Σχ. 244), ὥστε ὁ μίσχος τοῦ ἐμβολέως νὰ δύναται νὰ κινῆται κατὰ τὸν ἄξονα αὐτοῦ καθ' ὅλην τὴν κίνησιν τοῦ στροφάλου. Πρὸς τοῦτο ὁ κύλινδρος Α κρατεῖται διὰ δύο πυργίσκων Ε ἐπὶ τῶν ὁποίων στρέφει παλινδρομικῶς ὁτὲ μὲν πρὸς τὸ ἓν ὁτὲ δὲ πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος. Πρὸς ῥύθμισιν τῆς κινήσεως τοῦ μίσχου, οὗτος φέρει δύο τροχαλεῖα, ἅτινα ὀλισθαίνουσι κατὰ μῆκος δύο παγίων ῥάβδων. Ἐπειδὴ οἱ πυργίσκοι Ε εἰσὶ τὰ μόνα ἀκίνητα μέρη τοῦ κυλίνδρου, ὁ ἀτμὸς τοῦ λέβητος εἰσέρχεται εἰς τὸν κύλινδρον δι' ἑνὸς τούτων, διὰ δὲ τοῦ ἑτέρου ἐξέρχεται ὁ ἐνεργήσας τοιοῦτος.

403. Ἡ ἐφαρμογὴ της δυνάμεως τοῦ ἀτμοῦ πρὸς κίνησιν πλοίων, ἐστὶ καταληπτὴ μετὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, διότι ἀρκεῖ ἵνα διὰ τῶν μέσων τούτων μεταδοθῇ ἡ παλινδρομικὴ κίνησις ἐμβολέως ἀτμομηχανῆς, εἰς περιστροφικὴν κίνησιν ὁριζοντείου ἄξονος φέροντος τροχοὺς ἢ ἕλικα.

404. Αἱ τοῦ λέβητος διαστάσεις μὴ παρέχουσαι τὴν ἀπαιτουμένην ποσότητα ἀτμοῦ πρὸς ταχεῖαν κίνησιν τῶν ἁμαξῶν, ἐβράδυναν ἐπὶ πολὺν χρόνον τὴν δι' αὐτοῦ κίνησιν τούτων, ἄχρις οὗ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη διὰ τοῦ ὑπὸ τοῦ Seguin ἐφευρεθέντος λέβητος τῶν ἀτμαμαξῶν, ὅστις ἐστὶν ὁ ἐν τῇ ἑξῆς περιγραφῇ τῆς ἀτμαμάξης ἀπαντώμενος.

Δύο κύλινδροι Α (Σχ. 245) εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν καὶ πρὸς τὸ ἔμπροσθεν μέρος τῆς ἀτμαμάξης, ποτὲ μὲν κεκλιμένως τιθέμενοι, ποτὲ δὲ ὁριζοντείως. Ἐν ἑκάστῳ τούτων κινεῖται ἐμβολεὺς διὰ τῆς ἐφ' ἑκάστου τῶν μετώπων αὐτοῦ ἐναλλὰξ ἐνεργείας τοῦ ἀτμοῦ, ὅπερ ἀποτελεῖ οὕτως εἰπεῖν δύο ἀτμομηχανὰς διπλῆς ἐνεργείας. Ὁ μίσχος Β ἑκάστου ἐμβολέως κατευθύνεται εἰς τὴν κίνησίν του διὰ τροχαλείων αα, εὑρισκομένων ἐπὶ τοῦ ἄκρου αὐτοῦ, ἐναρθροῦται δ' οὗτος πρὸς ῥάβδον Γ ἥτις δράττει τὴν ἐφ' ἑνὸς τῶν κινητηρίων τροχῶν Ε εὑρισκομένην βάλανον Δ, καὶ ἥτις ἀπέχουσα κατά τι τοῦ κέντρου ἐνεργεῖ ὡς στρόφαλος περὶ αὐτό. Ἡ παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ ἐμβολέως, παράγει τὴν περιστροφικὴν κίνησιν τῶν τροχῶν. Οἱ δύο στρόφαλοι οὓς περιστρέφουσιν

οἱ ἐμβολεῖς, εἰσὶν ἄλλως διατεθειμένοι κατ' ὀρθὰς μεταξύ των ὡς ἐν ταῖς μηχαναῖς τῶν ἀτμοπλοίων (403) καὶ πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπόν.

Ἡ ἐν τῷ κυλίνδρῳ διανομὴ τοῦ ἀτμοῦ ἐνεργεῖται διὰ συρτῶν, κινουμένων διὰ κυκλικῶν ἐκκέντρων εὑρισκομένων ἐπὶ τῶν τροχοφόρων ἀξόνων, ὡς φαίνεται ἐν τῷ (Σχ. 246). Τὸ ἔκκεντρον Ζ μεταδίδει παλινδρομικὴν κίνησιν εἰς τὴν ῥάβδον Θ ἥτις λήγει εἰς ϐ εἰς ἐγκοπήν, δι' ἧς δράττει τὸ κατώτερον μέρος τοῦ μοχλοῦ Η (Σχ. 245). Ὁ μοχλὸς οὗτος κινεῖται περὶ τὸ μέσον αὐτοῦ παλμικῶς συνεπείᾳ τοῦ μετὰ τοῦ ἐκκέντρου συνδέσμου αὐτοῦ, ὅπερ δίδει χώραν εἰς παλινδρομικὴν κίνησιν τοῦ μίσχου Κ τοῦ ἐν τῇ ἀτμοθήκῃ Λ εὑρισκομένου σύρτου.

Ἵνα ἡ ἀτμάμαξα δύναται νὰ κινῆται ὁτὲ μὲν πρὸς τὰ ἐμπρὸς ὁτὲ δὲ πρὸς τὰ ὄπισθεν, παρατηρητέον ὅτι τοῦ ἑνὸς τῶν ἐμβολέων εὑρισκομένου εἰς τὸ μέσον τῆς διαδρομῆς του, ὁ ἀτμὸς δέον νὰ θλίβῃ αὐτὸν ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἑτέρου μετώπου, καθόσον ἡ ἀτμάμαξα κινεῖται πρὸς τὰ ἐμπρὸς ἢ τὰ ὀπίσω, ἐν τῇ μιᾷ τῶν περιστάσεων τῶν ὁποίων ὁ σύρτης δέον νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς ἀτμοθήκης, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ εἰς τὸ ἀντίθετον. Ὅθεν πρὸς ἀλλαγὴν τῆς ἐννοίας τῆς κινήσεως τῆς ἀτμαμάξης, ἀρκεῖ ἵνα καταλλήλως ὁδηγηθῇ ὁ σύρτης διὰ δευτέρου ἐκκέντρου ἀντιθέτου τοῦ πρώτου καὶ εὑρισκομένου ἐπὶ τοῦ τροχοφόρου ἄξονος. Ὁ τροχοφόρος ἄξων φέρει δύο ἔκκεντρα ΖΖ' (Σχ. 247) πρὸς κίνησιν ἑκάστου τῶν συρτῶν, αἱ δὲ κινούμεναι ὑπὸ τούτων ῥάβδοι ΘΘ', ἑνοῦνται δι' ὁλκοῦ ἐν ᾧ κινεῖται ἡ εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον τοῦ κατακορύφου μοχλοῦ Η βάλανος μ. Ἀγκωνωτὸς μοχλὸς γ δ ε κινητὸς περὶ τὸ σημεῖον δ, χρησιμεύει πρὸς ὑποστήριξιν τοῦ ὁλκοῦ ϐ ϐ' εἰς κατάλληλον ὕψος διὰ δύο κανόνων προσκεκολλημένων εἰς τὸ σημεῖον ε, εἰς δὲ τὸ ἄκρον γ τοῦ μοχλοῦ τούτου ἀρθρουμένη μακρὰ ῥάβδος ζ χρησιμεύει ἵνα ὁ διευθύνων σύρων ἢ ὠθῶν αὐτήν, δύναται νὰ δράττῃ κατὰ βούλησιν τὸν μοχλοβραχίονα Η διὰ τοῦ ἄκρου ϐ ἢ τοῦ ϐ'.

Διὰ τῆς διατάξεως ταύτης, εὐκόλως κατανοεῖται ὅτι πρὸς ἀλλαγὴν τῆς ἐννοίας τῆς κινήσεως τῆς ἀτμαμάξης, διὰ τῆς χαμηλώσεως ἢ ἀνυψώσεως τῶν δύο ἄκρων τῶν ῥάβδων τῶν ἐκκέντρων διὰ τοῦ ἀγκωνωτοῦ μοχλοῦ γδε καὶ τοῦ κανόνος ζ, οὐδεὶς ὑπάρχει φό-

βος ἵνα ἡ βάλανος μ δὲν δράττεται καταλλήλως ὑπὸ τοῦ ἄκρου τῆς ῥάβδου μεθ' ἧς δέον νὰ τεθῇ εἰς συγκοινωνίαν.

Ἡ πεῖρα ἀπέδειξεν ἐνταῦθα ὅτι ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ μετὰ διαφόρου βαθμοῦ ἀραιώσεως, καθ' ὅσον ἡ βάλανος εὑρίσκεται εἰς ταύτην ἢ ἐκείνην τὴν θέσιν σχετικῶς πρὸς τὰ ἄκρα τοῦ ὁλκοῦ. Ὅθεν ἡ διάταξις αὕτη ἐπιτρέπει τὴν κατὰ βούλησιν τροποποίησιν τῆς ἀραιώσεως τοῦ ἀτμοῦ κατὰ τὴν κίνησιν τῆς ἀτμαμάξης. Διὰ τὴν πρὸς τὰ ἔμπροσθεν κίνησιν ταύτης, δέον ἵνα ἡ βάλανος μ εὑρίσκεται εἰς ἓν τῶν δύω ἡμίσεων τοῦ ὁλκοῦ, διὰ δὲ τὴν πρὸς τὰ ὄπισθεν εἰς τὸ ἀντίθετον ἥμισυ τούτου. Ἡ ἀραίωσις τοῦ ἀτμοῦ ἐνεργεῖται διὰ τῆς ἀνυψώσεως τοῦ ὁλκοῦ, εἰς τρόπον ὥστε ἡ βάλανος μ νὰ καταλαμβάνῃ θέσεις διαφόρους εἰς ἕκαστον τῶν δύο ἡμίσεων αὐτοῦ. Τὸ βάρος τοῦ ὁλκοῦ καὶ τῶν δύο ῥάβδων τῶν ἐκκέντρων, ἰσοῤῥοποῦνται διὰ τοῦ ἀντισηκώματος ν, ἵνα τὰ μέρη ταῦτα τηρῶνται εὐκολώτερον εἰς κατάλληλον ὕψος ἀναλόγως τῆς διευθύνσεως πρὸς ἣν θὰ κινηθῇ ἡ ἀτμάμαξα. Ὁ ὁλκὸς οὗτος καλεῖται, ὁλκὸς τοῦ Στεφενσῶνος παρὰ τοῦ ἐφευρέτου αὐτοῦ μεγάλου ἄγγλου μηχανικοῦ.

Ἡ ἑστία τῆς ἀτμαμάξης εὑρίσκεται εἰς Μ, ἡ δὲ καύσιμος ὕλη, ἥτις συνήθως ἐστὶ Κὸκ (διυλισθεὶς λιθάνθραξ) εἰσφέρεται διὰ τῆς θυρίδος θ. Ἡ ἑστία περιβάλλεται πανταχόσε διὰ περιβλημάτων, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐκτείνεται μέρος τοῦ ὕδατος τοῦ λέβητος. Ἡ φλὸξ ἐξερχομένη τῆς ἑστίας, διαπερᾷ πλείονας σωλῆνας παρακειμένους ἀλλήλοις κατὰ μῆκος τῆς ἀτμαμάξης, μεταξὺ δὲ τούτων εὑρίσκεται τὸ πλεῖστον τοῦ πρὸς ἐξάτμισιν ὕδατος, τὰ δὲ ἐκ τῆς κατακαύσεως προερχόμενα ἀέρια, μεταβαίνουσιν εἰς χῶρον πρὸς τὰ ἔμπροσθεν τῆς ἀτμαμάξης εὑρισκόμενον, καὶ διαφεύγουσι διὰ τῆς ὑπὲρ τοῦτον καπνοδόχης.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν τῷ λέβητι σωλήνων ἐνίοτε φθάνει εἰς 100 ἢ 150, τῆς διαμέτρου αὐτῶν οὔσης 0,04—0,05. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ θερμαινομένη ἐπιφάνεια δύναται νὰ λάβῃ ἀνάπτυξιν μέχρι 50 τ.μ. ὅπερ παρέχει τὴν παραγωγὴν τῆς μεγαλειτέρας ποσότητος ἀτμοῦ τῆς καταναλισκομένης ἐν τῇ ταχίστῃ τῆς ἀτμαμάξης κινήσει.

Ὁ λέβης συνίσταται κυρίως εἰς ὁριζόντειον κύλινδρον Ν, ἐν μέσῳ τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται οἱ μνημονευθέντες σωλῆνες. Ἐκδοχεῖον ἀτ-

μοῦ Ο, εὑρίσκεται ἀμέσως ἄνωθεν τῆς ἑστίας, ἄνωθεν δὲ τούτου παχὺς σωλὴν Π, διαπερῶν τὸν λέβητα κατὰ μῆκος, φθάνει μέχρι τοῦ ἑτέρου τῆς ἀτμαμάξης ἄκρου, ἔνθα διαιρεῖται εἰς δύο, πρὸς κατεύθυνσιν τοῦ ἀτμοῦ εἰς τοὺς κυλίνδρους. Ὁ ἀτμὸς μετὰ τὴν ἐνέργειάν του διεκφεύγει διὰ δύο σωλήνων Ξ, ὧν ἡ διάταξις φαίνεται ἐν τῷ (Σχ. 248) ὅπερ παριστᾷ ἐγκάρσιον διατομὴν πρὸς τὸ ἔμπροσθεν μέρος τῆς ἀτμαμάξης. Οἱ δύο οὗτοι σωλῆνες ἑνούμενοι κατὰ τὰ ἄκρα των, ἐξέρχονται κάτωθεν τῆς καπνοδόχης, ὥστε ὁ ἐγκαταλιμπάνων τοὺς κυλίνδρους ἀτμὸς, ἐξωθεῖται κατὰ τὸν ἄξονα τῆς καπνοδόχης, καὶ ὁ ἐκφεύγων καθ' ἑκάστην στιγμὴν πίδαξ ἀτμοῦ ἀναζωπυρεῖ τὴν κυκλοφορίαν τοῦ ἀέρος, καὶ ἑπομένως τὴν κατάκαυσιν τῆς ἐν τῇ ἑστίᾳ καυσίμου ὕλης.

Ὁ λέβης φέρει δύο ἐπίκλειστρα ἀσφαλείας Ρ καὶ Σ (Σχ. 246) ὧν οἱ μοχλοὶ ὅμως δὲν φέρουσι βάρη, διότι τὸ ἑκάστοτε ἀκανόνιστον τῆς κινήσεως ἤθελε κωλύει τὴν ἐλευθέραν αὐτῶν ἐνέργειαν, ἀντιδόμως τούτων οἱ μοχλοὶ ὑπόκεινται κατὰ τὰ ἄκρα των εἰς τὴν θλίψιν ἐλατηρίων ἐντὸς περιβλημάτων Σ εὑρισκομένων, καὶ ὧν ῥυθμίζεται ἡ θλιπτικὴ δύναμις διὰ περικοχλίου εὑρισκομένου ἐπὶ τοῦ ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου μίσχου, καὶ κειμένου ἄνωθεν τοῦ μοχλοῦ τοῦ ἐπικλείστρου.

Ὁ ἔμπροσθεν τοῦ διευθύνοντος στρόφαλος Τ, χρησιμεύει ἵνα οὗτος δι' αὐτοῦ ἀνοίγει ἢ κλεῖ τὸ στόμιον Υ τοῦ σωλῆνος Π (Σχ. 246). Σταματώσης τῆς ἀτμαμάξης, ἀρκεῖ ὅπως περιστραφῇ ὁ στρόφαλος οὗτος, ἵνα ὁ ἀτμὸς εἰσδύων ἐν τῷ σωλῆνι Π καὶ κατὰ συνέπειαν ἐν τοῖς κυλίνδροις, θλίψῃ τοὺς ἐμβολεῖς καὶ θέσῃ τὴν ἀτμάμαξαν εἰς κίνησιν. Πρὸς διακοπὴν δὲ τῆς κινήσεως ταύτης, στρέφεται ὁ στρόφαλος κατ' ἀντίθετον ἔννοιαν, ὁπότε οἱ ἐμβολεῖς ἐξακολουθοῦσι νὰ κινῶνται ἐντὸς τῶν κυλίνδρων, ἕνεκα τῶν συνδέσμων αὐτῶν μετὰ τῶν κινητηρίων τροχῶν, ἀλλὰ παράγουσιν ὡς πρὸς τὴν κίνησιν τῆς ἀτμαμάξης ἐνέργειαν ἀντιστάσεως ἕνεκα τῆς τριβῆς ἣν ἀναπτύσει ἡ κίνησίς των αὐτη.

Τὴν ἀτμάμαξαν ἀκολουθεῖ δευτέρα ἅμαξα φέρουσα τὸ ἀναγκαῖον ὕδωρ διὰ τὴν μηχανὴν, ἀντλῶσαν τοῦτο δι' εἰδικῶν ἀντλιῶν. Ἕκαστος ἐμβολεὺς τῆς ἀτμαμάξης θέτει εἰς κίνησιν ἰδίαν ἀντλίαν, ἡ δὲ διάταξις τούτων δείκνυται ἐν τῷ (Σχ. 247). Ὁ μίσχος τοῦ ἐμβο-

λέως τῆς ἀντλίας ἑνοῦται μετὰ τοῦ μίσχου τοῦ κινητηρίου ἐμβολέως, ὥστε ἡ παλινδρομικὴ κίνησις τοῦ τελευταίου τούτου μεταδίδεται ὁμοίως εἰς τὸν μίσχον τῆς μικρᾶς ἀντλίας ν, ὥστε τὸ ὕδωρ τῆς ἁμάξης ταύτης ἐκμυζώμενον διὰ τοῦ σωλῆνος Ο ἐξωθεῖται διὰ τοῦ σωλῆνος Π δι' οὗ χύνεται ἐν τῷ λέβητι. Ἐν τοῖς σωλῆσι τούτοις εὑρίσκονται δύο ἐπίκλειστρα ἑκατέρωθεν τῆς ἀτμοθήκης ν, δι' ὧν τὸ ὕδωρ βιάζεται νὰ ῥέῃ κατὰ μίαν ἔννοιαν οὐχὶ δὲ κατ' ἀντίθετον.

405. *Ὑπολογισμοὶ ἐπὶ τοῦ ἔργου καὶ τῶν διαστάσεων. Μηχαναὶ ἐλαχίστης θλίψεως.* Τὸ ἔργον ἀτμομηχανῆς τινος μετρᾶται διὰ τῆς ἐπιφερομένης ἐπὶ τοῦ ἐμβολέως θλίψεως, ἐπὶ τὴν κατὰ δευτερόλεπτον ταχύτητα αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ἐν τῇ ἐφαρμογῇ, μηχανὴ ἐν καλῇ καταστάσει παρέχει μόνον τὰ 0,50—0,55 τοῦ θεωρητικοῦ ἔργου, τὸ εὑρισκόμενον γινόμενον τούτων δέον νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 0,50 διὰ τὰς μηχανὰς δυνάμεως ἐλάσσονος τῶν 12 ἵππων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ πρακτικῶς παραγομένου ἔργου. Τὸ γινόμενον τοῦτο διαιρούμενον διὰ 75 δίδει τὴν εἰς ἵππους πραγματικὴν δύναμιν.

Κατὰ ταῦτα, εὑρεθήτω τὸ ἔργον ἀτμομηχανῆς τινος πληρούσης τὰς ἑξῆς συνθήκας. Ἔντασις ἀτμῶν 105^0, ὅπερ κατὰ τὸν πίνακα (369) ἀντιστοιχεῖ εἰς θλίψιν 1,218χιλ. κατὰ τ. ὑφ. Διάμετρος ἐμβολέως 0,35, ἡ διαδρομὴ αὐτοῦ 0,92, ἐκτελεῖ δὲ 31 διπλᾶς διαδρομὰς κατὰ λεπτόν.

Ἡ κατὰ δευτερόλεπτον ταχύτης ἐστὶ $\frac{0,92\times2\times31}{60}=0,95$μ.
Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβολέως $0,785\times(35)^2=900$ τ. ὑφ.

Ἡ ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ ὑφεκατ. θλίψις τοῦ ἀτμοῦ ἐστὶ 1,218,χιλ. πλὴν ἐκ ταύτης δέον ν' ἀφαιρεθῇ ἡ ἀντίστασις ἣν ὁ συμπεπυκνωμένος ἀτμὸς ἀντιτάσσει κατὰ τὴν ἐκ τοῦ κυλίνδρου ἔξοδόν του εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἐμβολέως, ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀντίστασις αὕτη ἣν ἀντιτάσσει ὁ ἀτμὸς οὗτος ὑπὸ 40^0 ἐστὶ 0,15χιλ. κατὰ τ. ὑφ. ἡ πραγματικὴ θλίψις τοῦ ἀτμοῦ ἀπομένει $1,218-0,15=1,068$ κατὰ τ. ὑφ. Ἐφ' ὅλης δὲ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐμβολέως ἐστὶν $960\times1,068=1025,28$.χιλ. Ἡ θλίψις αὕτη πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὴν ταχύτητα τοῦ ἐμβολέως δίδει $1025,28\times0,95=974$χ.μ. ὡς θεωρητικὸν ἔργον τοῦ ἀτμοῦ, καὶ $974\times0,50=487$ ὡς πραγματικὸν τοιοῦτον. $\frac{487}{75}=6,49$ ἵππων, ἐστὶν ἡ εἰς ἵππους δύναμις τῆς μηχανῆς.

406. ΠΙΝΑΞ

τῶν διαμέτρων καὶ τῶν ταχυτήτων τῶν ἐμβολέων ἐν ταῖς μηχαναῖς μικρᾶς θλίψεως μετὰ συμπυκνωτοῦ.

Δύναμις εἰς ἵππους	Διάμετρ. τοῦ ἐμβολέως εἰς ὑφεκατομ	Ἐπιφάν. ἐμβολ. δι' ἵππον δυν. εἰς τετρ. ὑφεκ.	Θλῖψις ἐπὶ τοῦ ἐμβολέως κατὰ τετρ. ὑφ.	Διαδρομὴ τοῦ ἐμβολέως εἰς ὑφεκατ.	Ἀριθ. διπλῶν δρόμων κατὰ λεπτὸν	Ταχύτης τοῦ ἐμβολέως κατὰ δευτερόλ. εἰς μέτρα	Βάρος καταναλισ ἀτμοῦ καθ' ἵππον καὶ ὥραν
	ὑφεκατομ	τετ.ὑφ.	χιλιόγρ.	ὑφεκατ.		μέτρα	χιλιόγρ.
1	15,2	181	0,49	51,0	50	0,850	30,81
2	21,3	178	0,49	60,9	42	0,863	38,77
4	29,5	171	0,49	76,1	34	0,900	38,77
6	35,3	163	0,49	91,4	31	0,944	38,72
8	40,4	160	0,49	101,7	27	0,960	38,72
10	45.0	159	0,49	121,9	24	0,985	38,64
12	49,0	157	0,49	121,9	24	0,925	38,64
16	55,3	150	0,50	137,1	22	1,005	37,80
20	61,0	146	0,51	152,3	20	1,055	37,38
24	66,3	144	0,72	169,5	18	1,916	36,88
30	72,6	137	0,53	182,8	17	1,036	36,04
36	79,0	136	0,53	182,5	17	1,036	35,90
40	86,5	134	0,53	198,7	16	1,060	35,70
45	87,2	133	0,53	198,7	16	1,060	35,50
50	91,4	132	0,54	213,3	15	1,066	35,82
60	99,6	130	0,74	228,5	14	1,066	34,94
70	107,3	129	0,55	243,8	13	1,057	34,36
80	114,3	129	0,56	243,8	13	1,057	34,31
90	120,8	126	0,57	259,0	12	1,036	34,01
100	127,0	126	0,58	259,0	12	1,036	32,97

Ὁ πίναξ οὗτος δίδει τὴν διάμετρον τοῦ ἐμβολέως ἀτμομηχανῆς τινος μικρᾶς θλίψεως γνωστῆς οὔσης τῆς εἰς ἵππους δυνάμεως. Δεικνύει προσέτι ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἐμβολέως ἐστὶ διὰ τὰς κατωτέρας τῶν 12 ἵππων δυνάμεως μηχανάς, ἐλάσσων τοῦ ἑνὸς μέτρου κατὰ δευτερόλεπτον, διὰ δὲ τὰς ἀνωτέρας δυνάμεως τοιαύτας, ἡ ταχύτης αὕτη ὑπερβαίνει τὸ μέτρον.

Ἡ μέση ταχύτης δι' ἁπάσας τὰς ἀτμομηχανὰς θεωρεῖται 1,00μ. κατὰ δευτερόλεπτον.

407. Τὸ πάχος τῶν κυλίνδρων προσδιορίζεται διὰ τοῦ τύπου τοῦ ἄγγλου Tredgold, ὅστις ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιασθήτω τὸ τέταρτον τῆς εἰς χιλιόγραμμα ἐλαστικῆς δυνάμεως τοῦ ἀτμοῦ ἐφ' ἑνὸς τετραγωνικοῦ ὑφεκατομ. ἐπὶ τὴν εἰς ὑφεκατόμετρα διάμετρον, καὶ διαιρετέον τὸ γινόμενον διὰ 420. Πολλαπλασια-

σθήτω τὸ πηλίκον τοῦτο ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ διαιρεθήτω διὰ τῆς διαμέτρου ἐλαττωθείσης κατὰ 5, 5, εἰς δὲ τὸ ἐξαγόμενον προστεθήτω 1 ὑφεκατόμετρον. Τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον, δείξει τὸ ζητούμενον πάχος.

Ὅθεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον τὸ πάχος χυτοσιδηροῦ κυλίνδρου 50 ὑφ. διαμέτρου, τῆς θλίψεως τοῦ ἀτμοῦ οὔσης 1,818χιλ. ἐφ' ἑκάστου τετραγωνικοῦ ὑφεκατομέτρου, ἤτοι $1,218 \times 0,785 = 0,95$ κατὰ κυκλικὸν ὑφεκ. εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς,

$$\frac{4 \times 0,95 \times 50}{420} = 0,45 \text{ καὶ } \frac{0,45 \times 50}{50-5,5} = 0,50.$$

Ὅθεν $0,50 + 1 = 1,50$ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πάχος.

408. Ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβολέως προσδιορίζεται ὑπὸ τοῦ διπλασίου τῆς ἀκτῖνος ἢ τῆς διαμέτρου τοῦ στροφάλου.

409. Κατὰ τὸν Tredgold, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ἄκρων ἀρθρώσεων τοῦ ἀντισηκωτῆρος, ἰσοῦται 3,08 φορὰς τὴν διαδρομὴν τοῦ ἐμβολέως.

Τὸ κατακόρυφον ὕψος τοῦ μέσου τοῦ ἀντισηκωτῆρος, ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ 0,86, τὸ δὲ πάχος αὐτοῦ ἐστὶ τὸ δέκατον ἕκτον τοῦ ὕψους τούτου.

Τῇ ἐφαρμογῇ τῶν δεδομένων τούτων ἐπὶ ἀντισηκωτῆρος μηχανῆς μικρᾶς θλίψεως ἑβδομήκοντα ἵππων, προκύπτει ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ἄκρων ἀρθρώσεων, ἐστὶ $3,08 \times 2,438 = 7,50$μ. Ἡ διάμετρος τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὸν πίνακα (406) 107,3.ὑφ. Τὸ κατακόρυφον ὕψος τοῦ μέσου τοῦ ἀντισηκωτῆρος $107,3 \times 0,86 = 92,2$,ὑφ. τὸ δὲ πάχος αὐτοῦ $\frac{92,2}{16} = 5,7$ὑφ. ἢ 57 ὑποχιλιόμετρα.

410. *Μηχαναὶ μεγίστης θλίψεως, ἄνευ ἀραιωτοῦ ἢ συμπυκνωτοῦ.* Ἐν ταῖς μηχαναῖς ταύταις ἐν αἷς ὁ ἀτμὸς ἐξερχόμενος τοῦ κυλίνδρου διασκορπᾶται εἰς τὴν ἀτμοσφαίραν, ἀπόλλυται θλίψις μιᾶς ἀτμοσφαίρας ἕνεκα τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος, τὸ χρησιμοποιούμενον δ' ἔργον τῶν τοιούτων μηχανῶν ὑπολογίζεται διὰ τοῦ ἀκολούθου κανόνος.

Πολλαπλασιασθήτω ἡ εἰς τετραγωνικὰ ὑφεκατόμετρα ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβολέως ἐπὶ τὸν εἰς ἀτμοσφαίρας ἀριθμὸν τοῦ ἀτμοῦ μεῖον μιᾶς, καθὼς καὶ ἐπὶ τὴν εἰς δευτερόλεπτα ταχύτητα αὐτοῦ, διαιρεθήτω δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο δι' 75· τὸ πηλίκον θέλει δώσει τὴν

εἰς ἵππους θεωρητικὴν τῆς μηχανῆς δύναμιν. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο πολλαπλασιαστέον ἀκολούθως ἐπὶ 0,45 ἢ 0,50, καθόσον πρόκειται διὰ μηχανὰς κατωτέρας ἢ ἀνωτέρας τῶν 12 ἵππων δυνάμεως, τὸ πηλίκον θέλει δώσει τὸ πραγματικὸν τῆς μηχανῆς ἔργον.

Ὅθεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον τὸ πραγματικὸν ἔργον ἀτμομηχανῆς μεγίστης θλίψεως ἄνευ ἀραιωτοῦ καὶ συμπυκνωτοῦ, ἧς ἡ διάμετρος τοῦ ἐμβολέως ἐστὶ 50$^{υφ.}$, ἡ ταχύτης 1,45$^{μ.}$ ἡ ἐν τῷ κυλίνδρῳ θλίψις τοῦ ἀτμοῦ 5 ἀτμοσφαιρῶν, ἤτοι ἡ πραγματικὴ παραγομένη θλίψις αὐτοῦ 4 ἀτμοσφαιρῶν, ἢ 4,132 $^{χιλ.}$ ἐπὶ ἑκάστου τετρ, ὑφ. τοῦ ἐμβολέως, ἔσεται

$$0,50 \times \frac{0,785 \times (50)^2 \times 4,132 \times 1,45}{75} = 78,38 \text{ ἵππων δύναμ.}$$

411. Πρὸς κατασκευὴν ἀτμομηχανῆς συστήματος τινος καὶ δυνάμεως δεδομένης, τὸ πρῶτον παρουσιαζόμενον ζήτημα ἐστὶν ὁ προσδιορισμὸς τῶν διαστάσεων τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἐμβολέως ἐστὶ γνωστὴ, δὲν μένει ἢ ὁ προσδιορισμὸς τῆς διαμέτρου. Ἡ διάμετρος τῶν κυλίνδρων ἢ ἐμβολέων τῶν ἀτμομηχανῶν μεγίστης θλίψεως ἄνευ ἀραιωτοῦ ἢ συμπυκνωτοῦ, προσδιορίζεται διὰ τοῦ ἀκολούθου κανόνος.

Πολλαπλασιασθήτω ἡ εἰς ἵππους δύναμις ἐπὶ 75, τὸ δὲ γινόμενον διαιρεθήτω διὰ τοῦ συντελεστοῦ 0,39,(0,50×0,785=0,39). Τοῦ γινομένου τῆς ταχύτητος τοῦ ἐμβολέως ἐπὶ τὴν εἰς ἀτμοφαίρας θλίψιν μεῖον μιᾶς, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, δίδει τὴν ἐσωτερικὴν διάμετρον τοῦ κυλίνδρου.

Ὅθεν ἡ διάμερος ἀτμομηχανῆς δυνάμεως 78,38 ἵππων, τῆς ταχύτητος τοῦ ἐμβολέως οὔσης 1,45$^{μ.}$, τῆς δὲ πραγματικῆς θλίψεως τεσσάρων ἀτμοσφαιρῶν, ἔσεται

$$\Delta = \sqrt{\frac{78,38 \times 75}{0,39 \times 1,45 \times 4,132}} = 50 \text{ ὑφ.}$$

412. *Μηχαναὶ μετ' ἀραιωτοῦ*. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἔργου τῶν μηχανῶν τούτων, γίνεται διὰ τοῦ πίνακος τοῦ Πονσελέτου, στηριζομένου ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ὅτι, ὡρισμένος ὄγκος ἀτμοῦ ὑπὸ ὡρισμένην θλίψιν, διαστελλόμενος κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα, παράγει πάντοτε τὸ αὐτὸ ποσὸν ἔργου. Ὁ πίναξ ὑπελογίσθη ληφθέντος ὡς βάσεως, τοῦ ἔργου ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ἀτμοῦ ὑπὸ μιᾶς ἀτμοσφαίρας

θλίψιν, ἄνευ ἀραιωτοῦ, ἐνεργούσης ἐπὶ ἐμβολέως ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου ἐπιφανείας.

ΠΙΝΑΞ

Ποσότητος ἔργων παραγομένων ὑφ' ἑνὸς Κ. Μ. ἀτμοῦ ὑπὸ διαφόρους ἐντάσεις.

Ὄγκος μετὰ τὴν ἀραίωσιν	Ποσότης ἀνταποκρινομένου ἔργου διὰ θλίψιν					
	3 ἀτμοσφ.	4 ἀτμοσφ.	4 ½ ἀτμοσφ.	5 ἀτμοσφ.	5 ½ ἀτμοσφ.	6 ἀτμοσφ.
	χιλ.μτ.	χιλ.μτ.	χιλ.μτ.	χιλ.μτ.	χιλ.μτ.	χιλ.μτ.
1,00	31000	41333	46500	51666	56833	62000
1,25	37917	50556	56875	63195	69514	75834
1.50	43569	64464	65303	72615	79876	87438
1,75	48349	69984	72522	80580	88638	96696
2,00	52488	74852	78732	87480	96228	104976
2,25	56139	79208	83208	93565	102921	112278
2.50	59406	83148	89109	99010	108911	118812
2,75	62361	86744	93541	103935	114328	124722
3,00	65658	90052	97587	108430	119273	130116
3,25	67539	93116	101308	112565	123821	135078
3,50	69837	95968	104755	116395	128034	139674
3,75	71976	98632	107964	119990	131956	142952
4.00	73974	103500	110961	125290	135619	147948
4,50	77625	107856	116437	129375	142312	155250
5.00	80892	107856	121338	134820	148502	161784

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου εὑρίσκεται τὸ ἔργον ἀτμομηχανῆς τινος ἄνευ συμπυκνωτοῦ, ἧς γνωστὰ εἰσὶν, ἡ διάμετρος καὶ διαδρομὴ τοῦ ἐμβολέως, ἡ θλίψις τοῦ ἀτμοῦ καὶ ὁ βαθμὸς τῆς ἀραιώσεως, διὰ τοῦ ἑξῆς κανόνος.

Πολλαπλασιασθήτω ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβολέως ἐπὶ τὸ μέρος τῆς διαδρομῆς αὐτοῦ καθ' ὃ ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ δι' ὅλης αὐτοῦ τῆς ἐντάσεως, ὅπερ δίδει τὸν ὄγκον τοῦ καταναλισκομένου ἀτμοῦ ἐν ἑκάστῳ δρόμῳ τοῦ ἐμβολέως. Πολλαπλασιασθήτω ὁ ὄγκος οὗτος ἐπὶ τὴν ἐν τῷ πίνακι ἀνταποκρινομένην ποσότητα ἔργου εἰς τὸν βαθμὸν τῆς ἀραιώσεως καὶ θλίψεως τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἀτμοῦ μεῖον μιᾶς ἀτμοσφαίρας, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο παλλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν μέσον συντελεστὴν 0,50 καθὼς καὶ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν κατὰ δευτερόλεπτον ἁπλῶν δρόμων τοῦ ἐμβολέως, διαιρεθήτω δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο διὰ 4500. Τὸ πηλίκον ἐκφράζει τὸ χρησιμοποιούμενον ἔργον τῆς μηχανῆς εἰς ἵππων δύναμιν.

Εὑρεθήτω τὸ ἔργον μηχανῆς τινος ἧς ὁ κύλινδρος ἐστὶ 50ὑφ. διαμέτρου, ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβολέως 0,72, ἡ ταχύτης αὐτοῦ 80 ἁπλῶν δρόμων κατὰ λεπτὸν, ἡ ἔντασις τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἀτμοῦ 5 ἀτμοσφαιρῶν, τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐμβολέως διαρκούσης τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς διαδρομῆς του.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβολέως ἐστὶ $0,785 \times 0,30 \times 0,30 = 0,$ $0,7065^{\tau.\ \mu.}$ Ὄγκος τοῦ καταναλισκομένου ἀτμοῦ $0,07065 \times 18 = 0,0127$. Τοῦ ἀτμοῦ ἐνεργοῦντος μόνον κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβολέως, ὁ ὄγκος μετὰ τὴν ἀραίωσιν ἔσεται τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀρχικοῦ, ὥστε κατὰ τὸν πίνακα ἡ ποσότης ἔργου ἡ ἀναλογοῦσα εἰς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀρχικοῦ ὄγκου ἑνὸς κυβ. μέτρου ἀτμοῦ ὑπὸ θλίψιν 4 ἀτμοσφαιρῶν ἐστὶν $98632^{\chi\iota\lambda.}$, ὥστε ἡ ποσότης ἔργου ἡ ἀνταποκρινομένη εἰς 0,129 ἐστὶν $98632 \times 0,0127 = 1252,62^{\chi\iota\lambda.}$, θεωρητικὸν ἔργον δι' ἕκαστον τοῦ ἐμβολέως δρόμον. Ὅθεν τὸ πραγματικὸν κατὰ δευτερόλεπτον ἔργον ἔσεται $\frac{0,50 \times 80 \times 1252,62}{4500} =$ 11,134 ἵππων δύναμιν.

413. Ἡ διάμετρος τοῦ ἐμβολέως ἀτμομηχανῆς ἄνευ συμπυκνωτοῦ, ἧς γνωστά εἰσιν ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβολέως, ὁ βαθμὸς τῆς ἀραιώσεως τοῦ ἀτμοῦ, ἡ θλίψις καὶ ἡ ἀριθμητικὴ εἰς ἵππους δύναμις, προσδιορίζονται διὰ τοῦ ἑξῆς κανόνος.

1.ον Πολλαπλασιασθήτω ἡ ἀριθμητικὴ εἰς ἵππους δύναμις ἐπὶ 4500, καὶ διαιρεθήτω τὸ γινόμενον διὰ τοῦ μέσου συντελεστοῦ 0,50, καὶ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἁπλῶν τοῦ ἐμβολέως δρόμων· τὸ πηλίκον θέλει ἐκφράσει τὸ θεωρητικὸν τοῦ ἀτμοῦ ἔργον δι' ἕκαστον δρόμον τοῦ ἐμβολέως.

2.ον Διαιρεθήτω τὸ πηλίκον τοῦτο διὰ τῆς ποσότητος ἔργου ἑνὸς κ. μ. ἀτμοῦ, τῆς ἀνταπακρινομένης ἐν τῷ πίνακι εἰς τὸν βαθμὸν τῆς ἀραιώσεως, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀτμοσφαιρικῶν θλίψεων μεῖον μιᾶς, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἔσεται ὁ ὄγκος τοῦ καταναλισκομένου ἀτμοῦ καθ' ἕκαστον μέρος τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβολέως, καθ' ὃ ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ δι' ὅλης του τῆς ἐντάσεως.

3ον Διαιρεθήτω ὁ ὄγκος οὗτος διὰ τοῦ μέρους τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβολέως, καὶ εὑρεθήσεται οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μέρους τοῦ ἐμβολέως τούτου, καὶ 4ον διαιρεθήτω ἡ ἐπιφάνεια αὕτη διὰ 0,185,

καὶ ἐξαχθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ ἐξαγόμενον θέλει παριστᾶ τὴν διάμετρον τοῦ ἐμβολέως.

Κατὰ ταῦτα εὑρίσκεται ἡ διάμετρος τοῦ ἐμβολέως ἀτμομηχανῆς μετ' ἀραιωτοῦ τετραπλασιάζοντος τὸν ἀρχικὸν ὄγκον, τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβολέως οὔσης 0,12, τῆς ταχύτητος 80 ἁπλῶν δρόμων κατὰ λεπτὸν, τῆς θλίψεως τοῦ ἀτμοῦ κατὰ τὴν ἐκ τοῦ κυλίνδρου ἔξοδόν του καὶ κατὰ τὸ τέταρτον τῆς διαδρομῆς του οὔσης 5 ἀτμοσφαιρῶν, καὶ τῆς μηχανῆς παραγούσης ἔργον 11,134 ἵππων δύναμιν, ὡς ἑξῆς.

Τὸ θεωρητικὸν ἔργον τοῦ ἀτμοῦ ἐστὶ

$$\frac{11,134 \times 4500}{0,50 \times 80} = 1252,62.\chi.\,\mu.$$

Τὸ ἔργον τοῦτο διαιρούμενον διὰ 98632,χιλ. τουτέστι τὸ ἔργον ἑνὸς κ. μ. ἀτμοῦ, τῆς ἀραιώσεως οὔσης τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀρχικοῦ ὄγκου, καὶ ἀνταποκρινομένου εἰς τὸν πίνακα εἰς θλίψιν 5 ἀτμοσφαιρῶν μεῖον μιᾶς ἤτοι 4, δίδει πηλίκον 0,0127,τ. μ. ὅπερ ἐκφράζει τὸν ὄγκον τοῦ καταναλισκομένου ἀτμοῦ δι' ἕκαστον δρόμον τοῦ ἐμβολέως.

Ὁ ὄγκος οὗτος διαιρούμενος διὰ τοῦ τετάρτου τῆς διαδρομῆς, δίδει $\frac{0,72}{4} = 0,18$, οὗ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διαιροῦντος τὸ 0,0127 δίδει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐμβολέως $\frac{0,0127}{0,18} = 0,07065$τ. μ. ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ ἐμβολέως ἔσεται

$$B = \sqrt{\frac{0,07065}{0,785}} = 0,30\mu.$$

414. Οἱ ἀνωτέρω κανόνες διὰ τὰς μηχανὰς ἐξ ἑνὸς κυλίνδρου μετ' ἀραιωτοῦ, ἐφαρμόζονται ἐπίσης διὰ τὰς μηχανὰς τοῦ Οὔολφ ἐκ δύο κυλίνδρων. Ὁ βαθμὸς τῆς ἀραιώσεως ἐν ταῖς τελευταίαις, ταύταις ὁρίζεται διὰ τοῦ λόγου ὅστις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν χώρων τῶν δύο κυλίνδρων, καθ' ὅσον ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ δι' ὅλης αὐτοῦ τῆς ἐντάσεως καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν τοῦ μικροῦ ἐμβολέως, ἀκολούθως δὲ ἐκχέεται ἀραιούμενος ἐν τῷ μεγάλῳ κυλίνδρῳ. Ἐὰν ὅμως αἱ τοιαῦται μηχαναὶ φέρουσι συμπυκνωτήν, ἀφαιρεθήτω μόνον ἐκ τῆς διὰ τοῦ παρὰ τῷ κυλίνδρῳ μανογνώμονος δεικνυομένης θλίψεως τοῦ ἀτμοῦ, ἀντίστασις 0,15χιλ. κατὰ τετραγωνικὸν ὑφεκατόμετρον.

415. Πρὸς ῥύθμισιν τοῦ συνεχοῦς τῆς κινήσεως ἐν πάσαις σχε-

δὸν ταῖς μηχαναῖς, γίνεται χρῆσις τῶν κανονιστήρων τροχῶν (400). Ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς τὸ βάρος τοιούτου τινος τροχοῦ ὑπολογίζεται διὰ τοῦ τύπου τοῦ Ῥονδελέτου $\Pi = \frac{4645 \times \gamma \times N}{\nu \times \upsilon^2}$, ἐν ᾧ N ἐστὶ τὸ βάρος τοῦ δακτυλίου ἢ σώτρου, υ ἡ ἐν τῇ περιφερείᾳ μέση ταχύτης, ν ὁ ἀριθμὸς τῶν κατὰ λεπτὸν περιστροφῶν τοῦ ἄξονος, γ συντελεστής τις μεταβαλλόμενος ἀναλόγως τῆς ἀπαιτουμένης κανονικότητος τῆς κινήσεως, καὶ ὅστις διὰ τὰς συνήθεις ἀτμομηχανὰς ἐστὶν 20 ἕως 25, καὶ 35—40 ἢ 50—60 διὰ τὰς ἀτμομηχανὰς τῶν κλωστηρίων ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῆς κλωστῆς.

Διὰ τοῦ τύπου τούτου τὸ βάρος τοῦ κανονστῆρος τροχοῦ ἀτμομηχανῆς διπλῆς ἐνεργείας δυνάμεως 30 ἵππων, τοῦ ἄξονος ἐκτελοῦντος 25 περιστροφὰς κατὰ λεπτὸν, καὶ τῆς διαμέτρου οὔσης 5,50$^{μ.}$, εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς, τῇ ὑποθέσει γ=35.

Ἡ μέση ταχύτης τοῦ τροχοῦ ἐστὶν $\frac{3,14 \times 5,5 \times 25}{60} = 7,00^{μ.}$, ὅθεν τὸ βάρος τοῦ σώτρου

$$\Pi = \frac{4645 \times 35 \times 30}{25 \times (7)^2} = 3981,4 \text{ χιλ.}$$

Τὸ βάρος τῆς πλήμνης καὶ τῶν βραχιόνων συνήθως παραλείπεται. Ἐν ταῖς μετ' ἀραιωτοῦ μηχαναῖς, τὸ βάρος τοῦ σώτρου τοῦ κανονιστῆρος τροχοῦ ἐστὶ συνήθως 200 ἕως 250$^{χιλ.}$ δι' ἕκαστον ἵππον δυνάμεως, διὰ τὰς συνήθεις ταχύτητας τοῦ ἄξονος τοῦ στροφάλου. Ἐν ταῖς ἀτμομηχαναῖς μικρᾶς θλίψεως, ἡ διάμετρος τοῦ κανονιστῆρος τροχοῦ ἐστὶ συνήθως τὸ τριπλάσιον ἢ τετραπλάσιον τοῦ μήκους τῆς διαδρομῆς τῶν ἐμβολέων, ἡ δ' ἐν τῇ περιφερείᾳ μέση αὐτοῦ ταχύτης, ὁπόταν οὗτος εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ στροφάλου, 6 ἕως 7$^{μ.}$ κατὰ δευτερόλεπτον.

Κατὰ τὰ ἐκτεθέντα παρατηρητέον ὅτι ἡ ἐνέργεια τοῦ κανονιστῆρος τροχοῦ αὐξάνει ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος, ὅθεν ὁπόταν ἡ ἐνέργεια αὕτη δέον νὰ ἦναι λίαν μεγάλη, ὁ κανονιστὴρ δὲν τίθεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ στροφάλου, ἀλλ' ἡ ταχύτης τοῦ ἄξονος τούτου μεταδίδεται αὐτῷ ἐπιταχυνθεῖσα δι' ἐμπλεκτικῶν ἐνδιαμέσων τροχῶν.

416. Ἡ κατανάλωσις τοῦ ἀτμοῦ εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομέ-

νου τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου (ἐὰν ἡ μηχανὴ ἐστὶν ἄνευ ἀραιωτοῦ) ἢ τοῦ μέρους μόνον τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου ἔνθα ὁ ἀτμὸς ἐνεργεῖ δι' ὅλης αὐτοῦ τῆς ἐντάσεως, ἐπὶ τὸ παρὰ τοῦ ἐμβολέως διατρεχόμενον διάστημα ἐν μιᾷ ὥρᾳ, καὶ ἐπὶ τὸ βάρος τοῦ ἀτμοῦ ἀναλόγως τῆς θλίψεως αὐτοῦ

Ἡ δὲ κατανάλωσις καυσίμου ὕλης, εὑρίσκεται τῇ διαιρέσει τοῦ ποσοῦ τῆς καταναλώσεως τοῦ ἀτμοῦ, διὰ τῆς θερμαντικῆς δυνάμεως ἑνὸς χιλιογράμμου λιθάνθρακος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἓν χιλγρ. καλῆς ποιότητος λιθάνθρακος μετατρέπει κατὰ μέσον ὅρον 6 χιλγρ. ὕδατος εἰς ἀτμόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ'.

Περὶ ῥοῆς τοῦ ὕδατος.—Ὑδραυλικοὶ τροχοί.—Στρόβιλοι.

417. Ἡ ποσότης τοῦ ὕδατος ἣν παρέχει ῥοή τις τούτου ἐν δεδομένῳ χρόνῳ, ἐξαρτᾶται ἔκ τε τῆς ταχύτητος τοῦ ὕδατος, καὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ σχήματος τῆς ὀπῆς ἐξ ἧς ἐκρέει.

Ἡ ταχύτης τοῦ ὕδατος, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν διώρυγός τινος ἢ ποταμοῦ, εὑρίσκεται δι' ἐπιπλόων σωμάτων ῥιπτομένων ἐντὸς αὐτοῦ, καὶ μετρουμένου δι' ὡρολογίου τοῦ χρονικοῦ διαστήματος ὅπερ ἀπαιτεῖται ἵνα ταῦτα διανύσωσι πλέοντα ὡρισμένην ἀπόστασιν, ἀκολούθως δὲ διαιρουμένου τοῦ διανυθέντος διαστήματος διὰ τοῦ χρόνου εἰς δευτερόλεπτα, καὶ τὸ πηλίκον ἐκφράζει τὴν ζητουμένην ταχύτητα εἰς μέτρα.

Ἐὰν τὸ διανυθὲν διάστημα ὑφ' ἑκάστου ἐπιπλόου ἐστὶ 50μ. ἐντὸς 35 δευτερολέπτων, ἡ ταχύτης τῆς ῥοῆς ἐστὶ κατὰ τ' ἀνωτέρω $Υ=\frac{50}{35}=1,428^{μ.}$

418. Πρὸς καταμέτρησιν τῆς ταχύτητος τοῦ ὕδατος εἰς βάθος τι κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, γίνεται χρῆσις τοῦ μυλίσκου τοῦ Βόλτμαν. Ὁ μυλίσκος οὗτος (Σχ. 249) συνίσταται εἰς μικρὸν μύλον ἐκ ταρσῶν περιστρεφόμενον περὶ ὁριζόντειον ἄξονα. Ὁ ἄξων οὗτος τίθετα ἐντὸς τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ῥοῆς του, ὁπόταν τοῦτον θέτει εἰς κίνησιν τὸν μυλίσκον μετὰ τοσαύτης ταχύτητος ὅσον ἡ ῥοὴ τοῦ ὕδατος ἐστὶ μεγαλειτέρα.

Τὸ παρασκεύασμα ἐστὶν οὕτω διατεθειμένον ὥστε νὰ μετρῶνται

εὐκόλως αἱ τοῦ ἄξονος περιστροφαί. Πρὸς τοῦτο ὁ ἄξων φέρει μέρος ἕλικος Ζ, ἐμπλεκόμενον μετὰ κάτωθεν εὑρισκομένου ἐμπλεκτικοῦ τροχοῦ, ὅστις ὅμως χαμηλοῦται ἵνα διακόπτεται κατὰ βούλησιν ἡ ἔμπλεξις. Παρὰ τὸν ἐμπλεκτικὸν τοῦτον τροχὸν εὑρίσκεται ἕτερος ὅμοιος, τιθέμενος εἰς κίνησιν δι' ἀστερίσκου προσαρμοσμένου ἐπὶ τοῦ πρώτου, καὶ στρεφομένου βραδύτερον τούτου. Οἱ ἄξονες τῶν τροχῶν ΒΒ, εὑρίσκονται ἐπὶ τεμαχίου κινητοῦ περὶ τὸ ἀριστερὸν αὐτοῦ ἄκρον, κανὼν δὲ ε χρησιμεύει πρὸς ἀνύψωσιν τοῦ δεξιοῦ ἄκρου αὐτοῦ ἐνεργῶν ὡς μοχλὸς, ὥστε ἀνυψουμένων τῶν τροχῶν ἀποκαθίσταται ἡ ἔμπλεξις μετὰ τῆς ἕλικος Ζ. Μὴ ἀνελκομένου τοῦ κανόνος Ε ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ὁ μοχλὸς Γ χαμηλοῦται διὰ τῆς ἐνεργείας τοῦ ἐλατηρίου Φ, ὁπότε χαμηλοῦνται συνεπῶς καὶ οἱ τροχοὶ ΒΒ, καὶ δύο μικραὶ ἐξοχαὶ ΑΑ ἐμπλεκόμεναι μετ' αὐτῶν κωλύουσιν αὐτοὺς πάσης περιστροφῆς. Τὸ ὅλον παρασκεύασμα ὀλισθαίνει διὰ καταλλήλου μηχανισμοῦ ἐπὶ σιδηρᾶς ῥάβδου Δ, στερεούμενον διὰ κοχλίου εἰς σημεῖόν τι αὐτῆς. Τοῦ παρασκευάσματος τεθέντος ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ὁ μυλίσκος περιστρέφεται. Ἀνέλκεται τότε ὁ κανὼν Ε καὶ ἀποκαθίσταται ἡ ἔμπλεξις, ἥτις διατηρηθεῖσα ὡρισμένον χρόνον, διακόπτεται πάλιν διὰ τῆς καθόδου τοῦ κανόνος Ε, ὁπότε ἡ περιστροφὴ τῶν τροχῶν διακόπτεται διὰ τῶν ἐξοχῶν ΑΑ. Ἐξάγεται τότε τὸ παρασκεύασμα τοῦ ὕδατος, καὶ ἀναλόγως τῆς θέσεως ἣν αἱ ἐξοχαὶ ΑΑ κατέχουσι σχετικῶς πρὸς τοὺς τροχοὺς Β, μετρᾶται εὐκόλως ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων καθ' οὓς ὁ δεξιὸς τροχὸς περιεστράφη διαρκούσης τῆς ἐμπλέξεως, ὅστις ἐστὶ συνάμα καὶ ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν τοῦ μυλίσκου κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο, διότι δι' ἑκάστην περιστροφὴν τοῦ ἄξονος, ἡ ἕλιξ ΒΖ περιστρέφει τὸν τροχὸν κατὰ ἕνα ὀδόντα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐκτελεσθεισῶν ἐντὸς ἑνὸς λεπτοῦ περιστροφῶν, πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν μέσην περιφέρειαν τοῦ μυλίσκου, καὶ τὸ γινόμενον δίδει τὸ διανυθὲν ἐντὸς λεπτοῦ διάστημα, ὅπερ διαιρούμενον δι' 60 δίδει τὴν ταχύτητα τῆς ῥοῆς κατὰ δευτερόλεπτον.

Ὅθεν ἐὰν μυλίσκος μέσης περιφερείας 1,5 ἐκτελεῖ 120 περιστροφὰς ἐντὸς λεπτοῦ, ἡ ταχύτης τῆς ῥοῆς ἐστὶν

$$\frac{120 \times 1{,}50}{60} = 3{,}00^{\mu.}$$

419. Τοῦ μυλίσκου τοῦ Βόλτμαν δύναται ἐπίσης νὰ γίνῃ χρῆσις καὶ πρὸς καταμέτρησιν τῆς ταχύτητος τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, ὁπόταν ὁ μυλίσκος δὲν εἰσάγεται καθ' ὁλοκληρίαν ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἀλλὰ μόνον ὁ ἄξων αὐτοῦ διαβρέχεται ὑπ' αὐτοῦ.

420. Ἡ μέση ταχύτης τοῦ ὕδατος ἀσκεποῦς αὔλακος ὑπὸ σταθερὰν κλίσιν καὶ διατομήν, δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$Υ' = 56,86 \times \sqrt{\frac{Α}{Ε} \times \frac{Η}{Μ}} - 0,072.$$

Πρὸς χρῆσιν τοῦ τύπου τούτου ἀπαιτεῖται νὰ ἐκτελεσθῇ προηγουμένως ἡ χωροστάθμησις ἐπὶ μήκους τινὸς Μ, καὶ νὰ μετρηθῇ ἡ ἐπιφάνεια Α, καθὼς καὶ ἡ διαβρεχομένη περιφέρεια τῆς διατομῆς Ε, πρὸς εὕρεσιν τῆς κλίσεως Η τοῦ ὕδατος, τῆς ἀνταποκρινομένης εἰς τὸ μῆκος Μ.

Ὅθεν ἡ μέση ταχύτης τοῦ ὕδατος ἐντὸς αὔλακος ὁμοιομόρφου ὀρθογωνίου διατομῆς, πλάτους 3,50, καὶ βάθους 1,20 ἐπὶ μήκους 140 μέτρων καὶ κλίσεως 0,08, εὑρίσκεται συνεπῶς τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς διατομῆς $Α = 3,50 \times 1,20 = 4,20^{τ.μ.}$, καὶ τῇ διαβρεχομένῃ περιφερείᾳ $Ε = 3,50 + 2 \times 1,20 = 5,90$.

$$Υ' = 56,86 \times \sqrt{\frac{4,20}{5,90} \times \frac{0,08}{140}} - 0,072 = 1,065^{μ.}$$

421. Γνωστῆς οὔσης τῆς μέσης ταχύτητος αὔλακος σταθερᾶς ἢ ὁμοιομόρφου διατομῆς καθὼς καὶ κλίσεως, εὑρίσκεται ἡ κατὰ δευτερόλεπτον ῥοὴ τοῦ ὕδατος διὰ τοῦ τύπου $Δ = Ε \times Υ'$, ἐν ᾧ Ε ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς διατομῆς τῆς αὔλακος καὶ Υ' ἡ μέση ταχύτης.

Ὅθεν ἡ ῥοὴ αὔλακος ἐπιφανείας διατομῆς 4,20 καὶ μέσης ταχύτητος 1,065, ἔσεται

$Δ = 4,20 \times 1,065 = 4,473^{κ.μ.}$ ἢ 4473 λίτραι κατὰ λεπτόν.

422. Ἡ ποσότης τοῦ παρεχομένου ὕδατος ὑπὸ πηγῆς τινος, δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐμφραττομένης τῆς ῥοῆς του καθ' ὅλον τὸ μῆκος, διὰ σανίδων λεπτῶν φερουσῶν ὀπὰς 20 ὑποχιλ. διαμέτρου, καὶ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντείου γραμμῆς. Ἀποφράσσεται μέρος τῶν ὀπῶν τούτων, φρασσομένων διὰ πωμάτων, ἄχρις οὗ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος τηρεῖται σταθερὰ ὑπεράνω τοῦ κέντρου τῶν ὀπῶν, ὁπόταν δὲ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη τηρεῖται σταθερά, ἐκρέει φανερῶς ἐκ τῶν ὀπῶν ἡ ὑπὸ τῆς πηγῆς παρεχομένη ποσότης ὕδατος.

Ἡ ποσότης τοῦ ἐκρέοντος ὕδατος δι' ἑκάστης ὀπῆς 0,02 διαμέτρου διὰ σανίδος 0,017 πάχους, καὶ ὑπὸ θλίψιν ὕδατος 0,03 ἐπὶ τοῦ κέντρου αὐτῆς, ἐστὶν 20κ. μ. κατὰ 24 ὥρας.

423. Συνήθως ἐν τοῖς ὑδραυλικοῖς τροχοῖς, ἡ ῥοὴ τοῦ ὕδατος λαμβάνει χῶραν διὰ λεπτῶν ἀνοιγμάτων ἐν διαφράγμασι. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ θεωρητικὴ ταχύτης τοῦ ὕδατος ἀκολουθεῖ τὸν νόμον τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων, καὶ δίδεται διὰ τοῦ τύπου $\Upsilon = \sqrt{2gH}$, ἐν ᾧ H ἐστὶν ἡ ἀπόστασις τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἀνοίγματος, καὶ g ἡ ταχύτης τῆς πτώσεως σώματός τινος κατὰ τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου τῆς πτώσεως, ὅπερ ἐστὶ (204) $=9,81,^{\mu.}$ ὥστε ὁ ἄνω τύπος λαμβάνει τὴν μορφὴν $\Upsilon = \sqrt{19,62 \times H}$. Ὅθεν ἡ ταχύτης ὑπὸ στήλην ὕδατος $H = 3,00^{\mu.}$ ἔσεται

$$\Upsilon = \sqrt{19,62 \times 3,00} = 7,67^{\mu.}$$

Κατὰ τὸν τύπον τοῦτον παρατηρητέον ὅτι ἡ ταχύτης ἣν κέκτηται τὸ ὕδωρ ἐκρέον ἐκ δεξαμενῆς τινος, ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ὑπὲρ τὸ κέντρον τῆς ὀπῆς ἢ ἀνοίγματος τῆς ἐκροῆς. Ὅθεν πρὸς ἐπαύξησιν τῆς ταχύτητος ἄνευ μεταβολῆς τοῦ ὄγκου, ἀρκεῖ ἵνα ἐπαυξηθῇ τὸ ὕψος μόνον τῆς δεξαμενῆς, ἐλαττουμένων τῶν λοιπῶν αὐτῆς διαστάσεων, αἵτινες οὐδεμίαν ἔχουσιν ἐπιῤῥοὴν ἐπὶ τῆς ταχύτητος.

424. Ὁπόταν ἡ ἐκροὴ τοῦ ὕδατος γίνεται κάτωθεν τοῦ διαφράγματος (Σχ. 250), ὁ ὄγκος τοῦ ἐκρέοντος ὕδατος ἐντὸς δευτερολέπτου δίδεται διὰ τοῦ τύπου $\Delta = \lambda \times \eta \sqrt{2gH}$, ἐνῷ λ παριστᾷ τὸ πλάτος τοῦ ἀνοίγματος τῆς ἐκροῆς εἰς μέτρα, η τὸ κατακόρυφον αὐτῆς ὕψος, καὶ $\sqrt{2gH}$ τὴν ὡς ἀνωτέρω ταχύτητα.

Ὅθεν ὁ θεωρητικὸς ὄγκος τοῦ παρεχομένου ἐντὸς δευτερολέπτου ὕδατος, ὑπὸ διάφραγμα καὶ δι' ἀνοίγματος 0,80 πλάτους καὶ 0,20 ὕψους, τοῦ ὕψους τοῦ ὑπὲρ τὸ διάφραγμα ὕδατος ὄντος $3,00^{\mu.}$ ἔσεται $\Delta = 0,80 \times 0,20 \times \sqrt{19,62 \times 3} = 1,228^{\kappa.\mu.}$ Ἤτοι 1228 λίτρας κατὰ δευτερόλεπτον.

Ὁ πραγματικὸς ὅμως ὄγκος τῆς ἐκροῆς διαφέρει τοῦ θεωρητικοῦ. Ἡ διαφορὰ αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς συνθλίψεως καὶ ἐπομένως ἐλαττώσεως τῆς ταχύτητος, ἕνεκα τῆς διαφορᾶς τῶν διαστάσεων τῆς ὀπῆς τῆς ἐκροῆς πρὸς τὰς τῆς δεξαμενῆς.

Ὅθεν πρὸς εὕρεσιν τῆς πραγματικῆς ῥοῆς, πολλαπλασιαστέον τὴν θεωρητικὴν ῥοὴν ἐπὶ τὸν συντελεστὴν 0,60. Ἐὰν τὸ διάφραγμα ἐστὶ κεκλιμένον ὁ συντελεστὴς οὗτος αὐξάνει, καὶ διὰ μὲν διάφραγμα ὑπὸ γωνίαν 60° ὁ συντελεστὴς ἀποβαίνει 0,75, διὰ δὲ διάφραγμα ὑπὸ 45°, 0,80.

425. Ὁ τύπος πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ πλάτους τοῦ ἀνοίγματος τῆς ἐκροῆς διαφράγματος, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὕψους αὐτοῦ καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ ἐκρέοντος ἐντὸς δευτερολέπτου ὕδατος εἰς κυβ. μέτρα, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ εὑρεθέντος ἀνωτέρω τύπου $\Delta = \gamma \times \lambda \times h \times \sqrt{2gH}$, ἐν ᾧ γ ἐστὶν ὁ συντελεστὴς τῆς πραγματικῆς ῥοῆς, διότι ἐκ τούτου

$$\lambda = \frac{\Delta}{\gamma \times \eta \times \sqrt{2gH}}.$$

Τουτέστι διαιρεθήτω ὁ εἰς εἰς κυβ. μέτρα ὄγκος τῆς ἐκροῆς τοῦ ὕδατος ἐντὸς δευτερολέπτου, διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους τοῦ ἀνοίγματος τῆς ἐκροῆς ἐπὶ τὴν ἀνταποκρινομένην ταχύτητα εἰς τὸ βάρος τῆς θλίψεως τοῦ ὕδατος, καὶ ἐπὶ τὸν μεταβλητὸν κατὰ τὰς περιστάσεις συντελεστὴν τοῦ πραγματικοῦ ὄγκου τῆς ἐκροῆς.

Κατὰ ταῦτα τὸ πλάτος διαφράγματος ἐν ᾧ $\Delta = 0{,}750$, $\eta = 0{,}15$ καὶ $H = 1{,}25$ καὶ τούτου ὄντος ὑπὸ κλίσιν 45°, ἔσεται

$$\Lambda = \frac{0{,}750}{0{,}80 \times 0{,}15 \times \sqrt{19{,}62 \times 1{,}25}} = 1{,}29 \text{ μ.}$$

Ὁ ἑπόμενος πίναξ ἁπλοποιεῖ τοὺς ὑπολογισμοὺς πρὸς εὕρεσιν εἰς λίτρας τοῦ παρεχομένου ὕδατος, διότι εὑρίσκεται ὁ ἐν τῷ πίνακι ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἰς τὸ ὕψος τοῦ ἀνοίγματος τῆς ἐκροῆς καὶ τὴν στήλην τοῦ ὕδατος, καὶ πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐπὶ τὸ δεδομένον πλάτος τοῦ διαφράγματος.

ΠΙΝ

τοῦ παρεχομένου ὕδατος ὑπὸ κατακορύφου διαφράγ

Ἀνοίγματα ἢ κατακόρυφα ὕψη τοῦ διαφρ.	Ἐκροὴ ὕδατος εἰς Λίτρας κατὰ δευτερό									
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
Μέτρα	Λιτρ	Λιτρ	Λιτρ	Λιτρ	Λιτρ	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.
0,05	44	62	76	88	98	107	116	124	131	138
0,06	53	75	91	107	117	128	139	148	159	165
0,07	61	86	106	122	136	148	161	172	183	192
0,08	69	98	120	139	155	170	184	196	207	219
0,09	78	109	135	156	174	191	208	220	236	246
0,10	86	122	149	173	193	212	228	246	259	272
0,11	94	133	164	189	212	230	249	267	284	299
0,12	102	145	178	206	230	251	272	291	309	326
0,13	110	157	192	222	249	272	294	314	334	352
0,14	119	168	208	238	267	292	316	338	359	399
0,15	126	179	220	255	285	312	338	361	384	405
0,16	134	190	234	271	304	330	360	385	409	432
0,17	142	201	248	287	322	350	382	414	434	456
0,18	150	213	262	304	340	370	403	432	459	484
0,19	158	223	276	324	358	392	425	453	483	510
0,20	167	235	291	337	377	414	446	485	509	536
0,21	»	247	305	354	396	431	470	512	534	563
0,23	»	271	334	388	434	472	515	550	585	616
0,27	»	318	392	454	509	559	594	645	688	724
0,29	»	340	421	487	546	602	649	693	735	777
0,31	»	364	449	521	583	635	694	741	787	831
0,33	»	388	477	555	622	676	737	789	839	884
0,35	»	415	507	583	659	717	782	837	889	938
0,37	»	436	534	622	696	758	826	885	940	981
0,39	»	462	564	653	734	798	872	933	991	1045
0,41	»	»	591	688	772	840	915	981	1042	1097
0,43	»	»	620	722	809	881	961	1028	1093	1157
0,45	»	»	649	754	847	920	1005	1076	1144	1204
0,47	»	»	677	787	885	961	1050	1124	1194	1257
0,49	»	»	706	820	922	1082	1095	1172	1245	1311
0,50	»	»	733	853	940	1023	1115	1194	1271	1337

426. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ταχύτητος τοῦ ὕδατος ἐξερχομένου δι' ἀνοίγματος ὁπόταν τοῦτο ἀκολουθεῖται ὑπὸ αὔλακος, πολλαπλασιαστέον τὴν ὡς ἀνωτέρω εὑρισκομένην ταχύτητα σχετικῶς πρὸς τὴν ὑπερκειμένην στήλην τοῦ ὕδατος, ἐπὶ τὸν σταθερὸν συντελεστὴν 0,85.

427. Ἡ ταχύτης τοῦ ὕδατος εἰς τὸ ἄκρον αὔλακος φερούσης

ΝΑΞ

ματος 1,00μ. πλάτους καὶ ὑπὸ διαφόρους θλίψεις.

λεπτον τῆς στήλης τοῦ ὕδατος οὔσης									
1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.	Λιτρ.
145	151	157	162	168	191	214	235	251	268
175	181	187	194	201	229	259	281	301	321
201	210	218	226	233	267	299	329	350	374
229	248	249	258	266	305	341	374	400	427
257	267	279	289	300	343	382	420	450	481
285	298	310	321	332	380	424	466	500	533
314	327	340	353	365	418	466	511	550	587
341	356	371	384	397	455	507	557	599	640
368	385	401	416	429	492	549	602	647	693
396	414	431	446	462	510	590	648	697	745
424	443	461	477	493	566	631	639	747	799
452	472	491	509	526	603	673	739	797	852
478	501	521	540	558	638	715	789	847	905
506	529	551	571	589	677	757	830	896	958
534	558	580	601	621	715	799	876	946	1011
562	586	610	627	654	753	841	922	996	1065
590	615	640	664	687	790	884	968	1046	1118
646	674	701	726	757	865	968	1060	1146	1224
658	791	823	853	883	1016	1136	1245	1345	1437
815	850	884	916	949	1092	1220	1337	1444	1544
871	909	945	980	1014	1167	1305	1429	1544	1650
927	969	1007	1043	1079	1242	1389	1521	1644	1756
983	1027	1067	1103	1145	1317	1474	1614	1743	1863
1040	1086	1128	1169	1210	1392	1557	1706	1843	1969
1096	1145	1189	1232	1276	1468	1641	1798	1943	2076
1152	1204	1250	1298	1341	1543	1725	1890	2042	2182
1208	1262	1311	1361	1407	1618	1809	1982	2142	2289
1265	1321	1372	1424	1472	1694	1894	1075	2241	2394
1321	1380	1438	1488	1537	1769	1978	1167	2341	2504
1377	1438	1494	1551	1603	1845	2062	2259	2440	2614
1405	1468	1525	1583	1635	1882	2104	2305	2490	2669

αὐτὸ ἐκ τοῦ διαφράγματος πρὸς ὑδραυλικὸν τροχόν, δίδεται διὰ τοῦ τύπου (Σχ. 251).

$$\upsilon'' = \upsilon \times \upsilon'$$

Ἐν ᾧ υ'' ἐστὶν ἡ ταχύτης εἰς τὸ ἄκρον τῆς αὔλακος, υ ἡ μέση ταχύτης, ὑπολογισθεῖσα εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀνοίγματος ἀναλόγως τῆς ὑπερκειμένης στήλης ὕδατος H, ἤτοι $\sqrt{2gH}$.

Καὶ υ′ ἡ ταχύτης σχετικῶς πρὸς τὸ ὕψος η τὸ ἐνδεικνύον τὴν ὁλικὴν κλίσιν τῆς αὔλακος, ἤτοι $\sqrt{2gη}$,
ὥστε ὁ τύπος καθίσταται $υ''=\sqrt{19,62\times(H+η)}$.

Ὅθεν ἡ ταχύτης τοῦ ὕδατος εἰς τὸ ἄκρον αὔλακος, ἐν ᾗ $η=0,10$ καὶ $H=0,222$ ἐστὶν $υ''=\sqrt{19,62\times(0,222+0,10)}$ $=2,51$ μ.

Ὁπόταν τὸ ὕδωρ ἐξερχόμενον τοῦ ἀνοίγματος διαφράγματος, καταπίπτει ὀρθίως ἐν εἴδει καταῤῥάκτου, ἡ ταχύτης αὐτοῦ ὑπολογίζεται διὰ τοῦ αὐτοῦ ὡς ἀνωτέρω εὑρεθέντος τύπου $Δ=γ\times λ\times η\times\sqrt{2gH}$, ἐν ᾧ ὅμως ὁ συντελεστὴς $γ=0,63$.

428. Ἐὰν τὸ ὕδωρ ἐκρέῃ δι' ὑπερχειλίσεως ὡς ἐν τῷ (Σχ. 252) δείκνυται, ὁ ὄγκος τῆς ἐκροῆς του δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$Δ=γ\times λ\times H\sqrt{2gH},$$

ἐν ᾧ Δ ἐστὶν ὁ εἰς κυβικὰ μέτρα ὄγκος τοῦ ῥέοντος κατὰ δευτερόλεπτον ὕδατος.

λ τὸ πλάτος τῆς δι' ὑπερχειλίσεως ῥοῆς εἰς μέτρα.

H τὸ πάχος, ἢ κατακόρυφον ὕψος τοῦ ὕδατος ἀπὸ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τοῦ ἐν τῇ δεξαμενῇ τοιούτου, μέχρι τῆς ἀνωτέρας ὑψώσεως τῆς ὑπερχειλίσεως.

γ ἐστὶ μεταβλητὸς συντελεστὴς ἀναλόγως τοῦ πάχους τῆς ὑπερχειλίσεως, καὶ ὅστις ὁπόταν τὸ πλάτος τῆς ὑπερχειλίσεως ἐστὶν ἔλασσον τοῦ τῆς δεξαμενῆς, ἐστὶ 0,39 δι' ὕψη ὑπερχειλίσεως περιλαμβανόμενα μεταξὺ 0,16 καὶ 0,30. Ἐὰν ὅμως τὸ πλάτος τῆς ὑπερχειλίσεως ὀλίγον μόνον διαφέρει τοῦ τῆς δεξαμενῆς, ὁ συντελεστὴς οὗτος καθίσταται 0,42.

Οἱ τύποι πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ῥοῆς τοῦ ὕδατος ἐντὸς σωλήνων κυλινδρικῶν εἰσὶν

$$Υ=53,58\sqrt{\frac{δk}{4}}-0,025 \text{ καὶ}$$

$$Δ=ΕΥ=\frac{πδ^2}{4}\times Υ.$$

Ἐν οἷς Υ ἐστὶν ἡ μέση ταχύτης,

Δ ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος εἰς κυβικὰ μέτρα,

δ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ σωλῆνος,

Κ ἡ ἀνὰ μέτρον κλίσις, ἤτοι τὸ ὅλον μῆκος Λ διαιρούμενον διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν ὕψεων τῶν δύο ἄκρων, καὶ

Ε ἡ ἐπιφάνεια τῆς διατομῆς τοῦ σωλῆνος.

430. *Ὑδραυλικοὶ τροχοί.* Οἱ ὑδραυλικοὶ τροχοὶ χρησιμεύουσι πρὸς μετάδοσιν τῆς δυνάμεως τοῦ ὕδατος πρὸς κίνησιν μηχανῆς· Τιθέμενοι οὗτοι εἰς κίνησιν διὰ τῆς ἐνεργείας τοῦ ὕδατος, μεταδίδουσιν εἰς τὸ ἐπίλοιπον μηχάνημα τὴν κίνησιν διὰ συστήματος ἐμπλεκτικοῦ ἢ ἄλλου τινὸς τοιούτου.

Ὑπάρχουσι διαφόρων εἰδῶν ὑδραυλικοὶ τροχοὶ, ὡς ἐκ τῆς διατάξεως τούτων καὶ τοῦ τρόπου καὶ θέσεως τῆς ἐπ' αὐτῶν ἐνεργείας τοῦ ὕδατος.

431. Κρεμάμενος ὑδραυλικὸς τροχὸς καλεῖται ὁ ὑπὸ ῥοῆς ὕδατος κινούμενος ἄνευ διαφράγματος, ἀλλὰ τοῦ ὕδατος ῥέοντος φυσικῶς, ὡς ὁ τοῦ (Σχ. 253).

Τὸ χρησιμοποιούμενον ἔργον τοιούτου τινος τροχοῦ δίδεται διὰ τοῦ τύπου $\Phi=81,5\times A\Upsilon(\Upsilon-\upsilon)\upsilon$, ἐν ᾧ Φ παριστᾷ τὸ βάρος ὅπερ ἡ μέση περιφέρεια τοῦ τροχοῦ ἤθελεν ἀνυψώσει διὰ τῆς ταχύτητος αὐτῆς, ἤτοι τὸ διανυόμενον ἐντὸς δευτερολέπτου διάστημα, Α τὴν διαβρεχομένην ἐπιφάνειαν τοῦ κατακορύφου ταρσοῦ τοῦ τροχοῦ, Υ τὴν ἐν τῇ περιφερείᾳ ταχύτητα τῆς ῥοῆς, καὶ υ τὴν ταχύτητα εἰς τὸ μέσον τοῦ διαβρεχομένου μέρους τοῦ κατακορύφου ταρσοῦ.

Ὅθεν τὸ ἔργον τοιούτου τινος τροχοῦ, ἐν ᾧ $A=2,10^{\tau.\mu.}$, $\Upsilon=1,50^{\mu.}$ καὶ $\upsilon=1,10^{\mu.}$, ἔσεται

$$\Phi=81,5\times2,10\times1,50(1,50-1,10)\times1,10=112,959^{\chi\iota\lambda.\mu.}$$

ἢ $\frac{112,959}{75}=1,50$ ἵππου.

Ἐν τοῖς τοιούτοις τροχοῖς τὸ ὕψος τῶν ταρσῶν οὐδέποτε δέον νὰ ᾖ ἔλλασσον τῶν $0,33^{\mu.}$ ἢ μεῖζον τοῦ ἑνὸς τετάρτου τῆς ἀκτῖνος τοῦ τροχοῦ. Ἡ ἀπόκλισις αὐτῶν κατὰ τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος των.

Ἡ ἐν τῷ κέντρῳ τῶν ταρσῶν τοῦ τροχοῦ ταχύτης, ἐστὶ περίπου τὰ 0,4 τῆς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὕδατος τοιαύτης. Τὸ δὲ πραγματικὸν ἔργον τὰ 0,30 τοῦ θεωρητικοῦ.

432. Ἐὰν Λ ἐστὶ τὸ πλάτος τῶν ταρσῶν καὶ η τὸ ὕψος αὐτῶν, ἐπιφάνεια Α=Λη, ὥστε ὁ ἀνωτέρω τύπος καθίσταται

$$\Phi=81,5\times\Lambda\times\eta(\Upsilon-\upsilon)\Upsilon\upsilon \text{ ἐξ ἧς}$$

$$\Lambda=\frac{\Phi}{81,5\times\eta\times\Upsilon(\Upsilon-\upsilon)\upsilon}$$

τύπος δίδων τὸ πλάτος τῶν ταρσῶν γνωστῶν ὄντων Φ,η,Υ καὶ υ.

Ὅθεν τροχοῦ τινος πληροῦντος τὰς συνθήκας $\Phi=350,^{\chi\iota\lambda.}$ $\eta=0,6^{\mu.}$ $\Upsilon=2,50^{\mu.}$ καὶ $\upsilon=0,4\times2,50=1.00^{\mu.}$ τὸ πλάτος ἔσεται

$$\Lambda=\frac{350}{81,50\times0,60\times2,5(2,5-1)\times1.00^{\mu.}}=1,9.^{\mu.}$$

433. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἔργου τῶν διαφόρων συστημάτων τῶν ὑδραυλικῶν τροχῶν, δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἐκ τῆς ἀπολύτου δυνάμεως τοῦ ὕδατος, πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ μεταβλητόν τινα συντελεστὴν κατὰ τὰς περιστάσεις.

Ὅθεν ἐὰν Φ παριστᾷ τὴν ἀπόλυτον δύναμιν ῥοῆς τινος ὕδατος εἰς ἵππους, Δ τὸν ῥέοντα ὄγκον αὐτοῦ κατὰ δευτερόλεπτον εἰς κυβικὰ μέτρα, καὶ Η τὸ εἰς μέτρα ὁλικὸν ὕψος τῆς πτώσεως, ὁ τύπος ἔσεται

$$\Phi=\frac{1000\Delta H}{75}$$

τουτέστιν ἡ ὁλικὴ θεωρητικὴ δύναμις ῥοῆς τινος, ἔσεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τοῦ ῥέοντος κατὰ δευτερόλεπτον ὕδατος ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς πτώσεως, διὰ 75.

434. Τὸ ἔργον τῶν ὑδραυλικῶν τροχῶν μετὰ ταρσῶν ἐπιπέδων, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐν γένει διατάξεως αὐτῶν.

Ἐὰν οἱ ταρσοὶ εὑρίσκονται ἐντὸς αὔλακος καλῶς κατασκευασθείσης, καὶ ὑπάρχει περὶ αὐτοὺς κενὸν πανταχόσε 0,04—0,05, κατακόρυφον δὲ διάφραγμα εὑρίσκεται μακρόθεν τοῦ τροχοῦ, τὸ πραγματικὸν ἔργον ἐστὶ τὰ 0,20 περίπου τοῦ ἀπολύτου, δίδεται δὲ διὰ τοῦ τύπου

$$\Phi=\frac{200\Delta H}{75}.$$

Ὅθεν ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι, τοῦ ὕψους τῆς πτώσεως ὄντος $1,50^{\mu.}$ τοῦ δὲ κατὰ δευτερόλεπτον ῥέοντος ὕδατος ὑπολογιζομένου κατὰ τ' ἀνωτέρω $0,38^{\kappa.\mu.}$ τὸ ἔργον ἔσεται

$$\Phi=\frac{200\times0,38\times1.50}{75}=\frac{114}{17}=1,52 \text{ ἵππου.}$$

Ἐὰν τὸ περὶ τοὺς ἐν τῇ αὔλακι ταρσοὺς κενὸν δὲν ὑπερβαίνει τὰ 0,03, τὸ χρησιμοποιούμενον ἔργον ἐστὶ τὰ 0,30 τοῦ κινητηρίου, ὁ δὲ τύπος καθίσταται

$$\Phi=\frac{300\times\Delta\times H}{75}.$$

Ὑπὸ τὰς συνθήκας τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος τὸ ἔργον ἐστὶ

$$\Phi=\frac{300\times 0{,}38\times 1{,}50}{75}=\frac{171}{75}=2{,}28 \text{ ἵππων.}$$

Ἐὰν ὁ τροχὸς εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἐφαρμοσμένος κατὰ τὸ μέρος τῆς πτώσεως τοῦ ἐντὸς αὔλακος συγκεντρικῆς αὐτῷ ὕδατος, τὸ δ' ἄνοιγμα τοῦ διαφράγματος κεκλιμένον πρὸς τὸν τροχὸν (Σχ. 254), τὸ ἔργον ἐστὶ τὰ 0,40 τοῦ θεωρητικοῦ, ὁ δὲ τύπος καθίσταται

$$\Phi=\frac{400\times\Delta\times H}{75}.$$

Ὑπὸ τὰς συνθήκας τοῦ αὐτοῦ παραδείγματος τὸ ἔργον ἐστὶ

$$\Phi=\frac{400\times 0{,}38\times 1{,}5}{75}=\frac{228}{75}=3 \text{ ἵππων.}$$

Ἐὰν τὸ ὕδωρ λαμβάνεται πλησίον τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τῆς δεξαμενῆς, ὁ συντελεστὴς αὐξάνει εἰς 0,50 ὁ δὲ τύπος καθίσταται

$\Phi=\frac{500\Delta H}{75}$, ὥστε τὸ ἔργον κατὰ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἔσεται

$$\Phi=\frac{500\times 0.38\times 1{,}50}{75}=\frac{285}{75}=3{,}8 \text{ ἵππων.}$$

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα δεικνύουσιν ὁποίαν προσοχὴν ἀπαιτεῖ ἡ διάταξις τοῦ τε τροχοῦ, τῆς αὔλακος καὶ τοῦ διαφράγματος, διὰ τὴν καλὴν ἐνέργειαν ὑδραυλικοῦ τινος τροχοῦ.

Τέλος εἰ τὰ πάντα διαταχθῶσιν ἐπὶ τὸ καταλληλότερον, τὸ δὲ κενὸν ἐστὶ τοσοῦτον ὥστε μόλις νὰ ἐπαρκῇ διὰ τὴν δίοδον τῶν ταρσῶν, ὁ συντελεστὴς δύναται νὰ ἐπαυξήσῃ μέχρις 750, ὁ δὲ τύπος καθίσταται

$$\Phi=\frac{750.\Delta.H}{75}.$$

435. Τὸ πλάτος ὑδραυλικοῦ τινος τροχοῦ τοιούτου συστήματος, δέον νὰ ὑπολογίζεται τοιοῦτον ὥστε ἡ ῥοὴ τοῦ ὕδατος δι' ὑπερχειλίσεως νὰ ἔχῃ πάχος 0,20 ἕως 0,25.

Ὅθεν παραδεκτῆς γενομένης μέσης ῥοῆς ὕδατος 1300 λιτρῶν κατὰ δευτερόλεπτον, καὶ πάχους ὕδατος 0,24, ἐξάγεται ἐκ τοῦ τύπου (428) ὅτι εἰς τὸ ὕψος τοῦτο τοῦ ἀνοίγματος ἀντιστοιχεῖ ῥοὴ 211 λιτρῶν κατὰ δευτερόλεπτον δι' ἀνοίγματος 1,00μ. πλάτους, ὥστε τὸ πλάτος ἐνταῦθα τοῦ ἀνοίγματος καὶ τοῦ τροχοῦ ἔσεται

$$\frac{1300}{211}=6,16^{\mu.}$$

Τὸ μέγεθος τοιούτου τινος ὑδραυλικοῦ τροχοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς πτώσεως τοῦ ὕδατος. Ἡ ἀκτὶς διὰ πτῶσιν 2 ἕως 3 μέτρων, δέον νὰ ἰσοῦται κατ' ἐλάχιστον μὲ τὸ ὕψος τῆς πτώσεως αὐξηθὲν κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ πάχους τοῦ ὑπὲρ τὸ διάφραγμα ὑπερχειλίζοντος ὕδατος.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν κατὰ λεπτὸν περιστροφῶν τοῦ τροχοῦ δίδεται διὰ τοῦ τύπου $\nu=\frac{60\chi\upsilon}{2\pi\chi P}$.

436. Τῆς κατὰ τὴν ἐξωτερικήν των πλευρὰν ἀποκλίσεως τῶν ταρσῶν οὔσης κατὰ μέσον ὅρον 0,32, προκύπτει ὅτι τῇ διαιρέσει τῆς ἀναπτύξεως τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ διὰ 32, εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ταρσῶν αὐτοῦ.

437. Τροχὸς διαμέτρου 6,40μ. καὶ πλάτους 6,16μ. σύγκειται ἐκ τριῶν χιασμάτων ἰσαπεχόντων ἐπὶ τοῦ πλάτους τοῦ τροχοῦ, καὶ φερόντων ἀνὰ 8 βραχίονας ἕκαστος. Τὰ χιάσματα ταῦτα προσκολλῶνται ἰσχυρῶς πρὸς τὸν ἄξονα διὰ σφηνῶν. Ἑκάστη στεφάνη φέρει 8 σῶτρα εὑρισκόμενα μεταξὺ δύο βραχιόνων, καὶ διαπερῶνται ὑπὸ τοσούτων ἐξοχῶν, ὅσους ταρσοὺς θέλει φέρει ὁ τροχός.

438. Ἀντὶ ταρσῶν οἱ ὑδραυλικοὶ τροχοὶ φέρουσι πολλάκις σκαφίδια. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει σύγκεινται ἐκ δύο στεφανῶν παραλλήλων, ἀνοικτῶν μὲν ἐξωτερικῶς, φραττομένων ὅμως πρὸς τὸ ἐσωτερικόν, ἵνα κωλύεται ἡ πρὸς τὸν ἄξονα ῥοὴ τοῦ ὕδατος. Τοιοῦτον τροχὸν δεικνύει τὸ (Σχ. 255), τὸ δὲ (Σχ. 256) δεικνύει τὰς διαφόρους διατάξεις τῶν σκαφιδίων τοιούτου τινος τροχοῦ.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν σκαφιδίων ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ τροχοῦ, τῆς ἀποκλίσεως αὐτοῦ οὔσης 0,30μ. ἕως 0,35μ. κατὰ τὴν ἐξωτερικὴν αὐτοῦ περιφέρειαν. Τὸ κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς ἀκτῖνος ὕψος αὐτῶν ἐστὶν ἐπίσης 0,30μ. ἕως 0,35μ. Τῇ διαιρέσει τῆς ἀναπτύ-

ξεως τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ διὰ μιᾶς τῶν διαστάσεων τούτων, εὑρίσκεται φανερῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν σκαφιδίων τοῦ τροχοῦ.

Πρὸς χάραξιν τῶν σκαφιδίων ὑδραυλικοῦ τινος τροχοῦ, ἐννοῦνται αἱ διαιρέσεις ἅπασαι τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας μετὰ τοῦ κέντρου. Αἱ ἀκτῖνες αὗται συναντῶσι τὴν ἐνδιάμεσον περιφέρειαν, τὴν ἀνταποκρινομένην εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους τῶν σκαφιδίων, εἰς σημεῖα ἐξ ὧν ἄγονται κεκλιμέναι γραμμαὶ σχηματίζουσαι μετὰ τῶν ἀκτίνων γωνίαν 110^{0}.

439. Τὸ πλάτος τοῦ ἀνοίγματος τῆς ῥοῆς τοῦ ὕδατος, διὰ πτώσεις κατατωτέρας τοῦ 0,30 μέχρι 0,20, ὁπότε συμφέρει ἵνα τὸ ὕδωρ ἔρχεται πρὸς τὰ ἄνω τοῦ τροχοῦ, δίδεται διὰ τοῦ τύπου

$$Λ = \frac{Δ}{γ \times H\sqrt{2gH}}$$

ἐν ᾧ Δ ἐστὶν ἡ κατὰ δευτερόλεπτον ποσότης τῆς ἐκροῆς τοῦ ὕδατος, καὶ H τὸ ὕψος τοῦ ἀνοίγματος τῆς ῥοῆς.

Ἐὰν ὅμως τὸ ἄνοιγμα τῆς ῥοῆς προέρχεται ἐκ διαφράγματος κατακορύφου, ὁ τύπος πρὸς εὕρεσιν τοῦ πλάτους τῆς ῥοῆς ἔσεται $Λ = \frac{Δ}{γ \times η\sqrt{2gH'}}$

η παριστῶντος τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαφράγματος, καὶ H τὴν ὑπὲρ τὸ κέντρον τοῦ ἀνοίγματος στήλην ὕδατος. Τὸ γ διὰ κατακόρυφον διάφραγμα ἰσοῦται 0,10.

440. Ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕψους τῆς πτώσεως, προσδιοριζομένης διὰ τῆς μέσης στάθμης τοῦ ὕδατος κατὰ διαφόρους ἐποχάς. Ἐὰν ἡ ἐξέτασις αὕτη ἔδωκεν ὕψος πτώσεως $8{,}00^{μ.}$, δέον ἐκ ταύτης ν' ἀφαιρεθῇ ἡ ἐπὶ τῆς κοίτης θλίψις, κατόπιν ἡ κλίσις τῆς διοχετευούσης τὸ ὕδωρ αὔλακος, καὶ τέλος τὸ μεταξὺ τοῦ τροχοῦ καὶ τῆς αὔλακος κενόν, καθὼς καὶ τὸ μεταξὺ τοῦ κατωτέρου μέρους τοῦ τροχοῦ καὶ τοῦ πυθμένος τοιοῦτον.

Ὅθεν τῇ ὑποθέσει ὕψους ὕδατος κοίτης 0,96, κλίσεως αὔλακος 0,05, καὶ λαμβανομένου 0,03 διὰ νὰ κενά, μένει ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ $6{,}97^{μ.}$.

441. Εἰς τοὺς μετὰ κοίλων ταρσῶν ὑδραυλικοὺς τροχούς, τὸ ὕδωρ ἐνεργεῖ ἐντὸς αὔλακος καὶ ἐξ ἀνοίγματος διαφράγματος κεκλιμένου ὑπὸ 45^{0} ἢ 60^{0} γωνίαν, καὶ πρὸς τὰ κάτω τοῦ τροχοῦ

ὡς φαίνεται ἐν τῷ (Σχ. 257). Ἡ κλίσις τῆς αὔλακος ἐστὶν $\frac{1}{10}$ μέχρις $\frac{1}{15}$ μέχρι τοῦ ἀνοίγματος παρὰ τῷ τροχῷ, ἵνα ἐνεργεῖ δι' ἁπάσης αὐτοῦ τῆς ταχύτητος.

Οἱ κοῖλοι ταρσοὶ συγκρατῶνται μεταξὺ δύο στεφανῶν προσκεκολλημένων πρὸς τὸν ἄξονα δι' ἀκτίνων ἢ βραχιόνων, αἱ στεφάναι δὲ αὗται συνάμα κωλύουσι τὴν ἑκατέρωθεν τῶν ταρσῶν διασπορὰν τοῦ ὕδατος. Ἡ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἀπόκλισις αὐτῶν ἐστὶ 0,20 ἕως 0,25 ὁπόταν σύγκεινται ἐκ σιδηροῦ πεταλείου, καὶ 0,30 ἕως 0,35 ὁπόταν εἰσὶν ἐκ ξύλου.

Τὸ μέγιστον τοῦ ἔργου ἀνταποκρίνεται εἰς τὰ Υ=0,55 τῆς ταχύτητος τοῦ ὕδατος.

442. *Στρόβιλος.* Καλεῖται οὕτως ὑδραυλικὸς τροχὸς μετὰ κατακορύφου ἄξονος καὶ οὗ οἱ ταρσοί, συνήθως κοῖλοι, τίθενται εἰς κίνησιν ὑπὸ ῥοῆς ὕδατος διευθυνομένης διὰ κατευθυντήρων, καὶ ἐνεργούσης διὰ τῆς δυνάμεως τῆς ῥοῆς ἢ πτώσεώς του. Τὸ ὕδωρ εἰσάγεται διὰ τοῦ κέντρου, ἀκολούθως δ' ἐκτινάσσεται λοξοειδῶς διαφεύγον διὰ τῆς περιφερείας.

Ὁ συνηθέστερος στρόβιλος ἐστὶν ὁ καλούμενος στρόβιλος τοῦ Φουρνεϋρῶνος, ὅστις ἐστὶ καὶ τὸ πρότυπον τῶν τοιούτων καὶ ὅστις ἔχει ὡς ἑξῆς. Τὸ ὕδωρ Α (Σχ. 258) εἰσέρχεται ἐλευθέρως εἰς τὸν κύλινδρον Β, ὅστις εὑρίσκεται βυθισμένος ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ὁ κύλινδρος οὗτος ἐστὶ πεφραγμένος κάτωθεν, φέρει ὅμως ἐπὶ τῆς περιφερείας του ἄνοιγμα συνεχὲς Γ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ εἰς τὸν κύλινδρον τοῦτον ὕδωρ ἤθελεν ἐκρέει διὰ τοῦ ἀνοίγματος τούτου πρὸς ὅλα τὰ μέρη. Δακτύλιον Δ, διατίθεται ὁριζοντείως πέριξ τοῦ ἀνοίγματος τούτου, εἰς τρόπον ὥστε δέχεται καθ' ὅλην του τὴν περιφέρειαν τὴν κρούσιν τοῦ διὰ τοῦ ἀνοίγματος διεκφεύγοντος ὕδατος. Τὸ δακτύλιον τοῦτο ἀπαρτίζει τροχὸν μετὰ κοίλων ταρσῶν ὡς ὁ τοῦ Σχ. 257 ὁριζοντείως ὅμως διατεθέντα, καὶ ἀφαιρεθεισῶν τῶν ἀκτίνων, ὥστε τὸ κάτωθεν μέρος τοῦ κυλίνδρου Β εἰσδύει εἰς αὐτόν. Στέγαστρον Ε συνδέει τὸν τροχὸν τοῦτον πρὸς τὸν κεντρικὸν ἄξονα Ζ, ὑψούμενον κατακορύφως ἐντὸς σωλῆνος εἰς τὸ μέσον τοῦ κυλίνδρου Β εὑρισκομένου. Ὁ τροχὸς εὑρίσκεται καθ' ὁλοκληρίαν ἐντὸς τοῦ κάτω ὕδατος, οὗτινος ἡ ἐπιφάνεια εὑρίσκεται εἰς Θ. Ὁ ἄξων Ζ λήγει κάτωθεν εἰς στροφέα ἐρειδόμενον ἐπὶ μοχλοῦ ΗΚ κινητοῦ

περὶ τὸ σημεῖον Κ. Μίσχος Λ ἐναρθρούμενος εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μοχλοῦ Η, λήγει πρὸς τὸ ἄνω ἄκρον εἰς κοχλίαν μετὰ περικοχλίου. Διὰ τοῦ περικοχλίου τούτου ἐνεργεῖται ἡ κατὰ βούλησιν ἀνύψωσις ἢ χαμήλωσις τοῦ ἄξονος Ζ μετὰ τοῦ τροχοῦ, εἰς τρόπον ὥστε οὗτος νὰ φέρεται ἀκριβῶς ἀπέναντι τοῦ ἀνοίγματος Γ ἐξ οὗ ἐξέρχεται τὸ ὕδωρ τοῦ κυλίνδρου Β.

Ἡ ῥοὴ λαμβάνει χώραν ἕνεκα τῆς διαφορᾶς τοῦ ὕψους τῶν ὑδάτων ΑΑ καὶ ΟΟ. Ἐὰν τὸ εἰσερχόμενον εἰς τὸν κυλίνδρον Β ὕδωρ ἀφίετο ἐλεύθερον, ἤθελεν ἐξέρχεσθαι διὰ τοῦ ἀνοίγματος Γ καὶ ἐνεργοῦν καθέτως τῇ ἐπιφανείᾳ, δὲν ἤθελε παρέχει κατὰ πάντα ἀκριβῆ κίνησιν εἰς τὸν τροχὸν, ὅθεν πρὸς θεραπείαν τοῦ ἀτόπου τούτου, ὁ σωλὴν Β φέρει κυρτὰ διαφράγματα διατιθέμενα ἀντιθέτως τῆς ἐννοίας τῶν ταρσῶν τοῦ τροχοῦ, καὶ ὧν ἡ διάταξις φαίνεται ἐν ὁριζοντείᾳ διατομῇ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἣν παριστᾷ τὸ (Σχ· 259). Τὸ ὕδωρ ἐξερχόμενον τοῦ κυλίνδρου Β λοξοειδῶς, συναντᾷ τοὺς ταρσοὺς καὶ ἐνεργεῖ ἐπ' αὐτῶν θλίψεις αἵτινες προξενοῦσι τὴν κίνησιν τοῦ τροχοῦ. Κυλινδρικὸν διάφραγμα αα (Σχ. 258) εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωλῆνος Β, ἐφ' ὅλης τῆς περιφερείας του, χρησιμεῦον πρὸς ῥύθμισιν τοῦ μεγέθους τοῦ ἀνοίγματος τῆς τοῦ ὕδατος ἐκροῆς. Ἐνεργεῖται δὲ ἡ ἀνύψωσις ἢ χαμήλωσις τοῦ διαφράγματος τούτου διὰ τῶν ὀρθίων μίσχων βββ ληγόντων εἰς κοχλίας, τῇ καταλλήλῳ περιστροφῇ τῶν ἐπ' αὐτῶν περικοχλίων.

Οἱ λοιποὶ πάντες στρόβιλοι εἰσὶν ἁπλαῖ καὶ μερικαὶ τελειοποιήσεις τούτου, αἵτινες ἐπαυξάνουσι καθ' ἑκάστην πρὸς ἐντελεστέραν ἐνέργειαν αὐτῶν.

Κατὰ τὰ πειράματα τοῦ Μορίνου οἱ στρόβιλοι χρησιμοποιοῦσι τὸ 0,70 ἕως 0,78 τῆς κινητηρίου δυνάμεως. Οἱ στρόβιλοι, ὀλίγον καταλαμβάνοντες χῶρον, καὶ ὀλίγου βάρους ὄντες, συνάμα δὲ βυθιζόμενοι ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἰς οἱονδήποτε βάθος, καὶ ἐνεργοῦντες μεθ' οἱασδήποτε ταχύτητος τοῦ ὕδατος, δύνανται νὰ ὦσιν ἐν χρήσει διὰ τὰς μικρὰς ὡς καὶ διὰ τὰς μεγίστας τοῦ ὕδατος πτώσεις.

Ὁ τύπος τοῦ ἔργου τῶν στροβίλων ἐστὶ $\Phi = 700 \times \Delta \times H$ εἰς χιλιογραμμόμετρα ἢ $\Phi = \frac{700 \times \Delta \times H}{75}$ εἰς ἵππων δύναμιν, ὁπόταν

ὁ ἀριθμός τῶν περιστροφῶν τοῦ τροχοῦ ν περιλαμβάνεται μεταξὺ

$$\nu=\frac{3,3\Upsilon}{P} \text{ καὶ } \nu=\frac{5,6\Upsilon}{P}$$

Υ οὔσης τῆς ταχύτητος τῆς πτώσεως, καὶ P τῆς ἀκτῖνος τοῦ ςροβίλου.

Ὅθεν τὸ ἔργον στροβίλου τοῦ Φουρνεϋρῶνος, ὁπόταν ἡ ποσότης τῆς κατὰ δευτερόλεπτον ἐκροῆς τοῦ ὕδατος Δ=0,8 κ. μ., ἡ πτῶσις 1,6 μ. ἐστὶ $\Phi=700\times0,8\times1,6=896$ ἢ $\frac{896}{75}=12$ ἵππων.

444. Τὸ ὕψος τῶν ταρσῶν, τουτέστιν ἡ κάθετος ἀπόστασις μεταξὺ δύο περιλαμβανόντων ταρσόν τινα ἐπιπέδων, ἐστὶ συνήθως $\frac{1}{5}$ ἢ τὸ πολὺ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ἐσωτερικῆς ἀκτίνος τῆς στεφάνης.

Πρὸς ἀπόκτησιν τοῦ μεγίστου τοῦ ἔργου, ἡ ταχύτης τοῦ τροχοῦ δέον νὰ ᾖ τὰ 0,70 περίπου τῆς τοῦ ὕδατος, ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ὅμως δυνατὸν ἐστὶν ἵνα ὑπερβῇ τις καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ ἢ ἐλαττώσῃ κατὰ $\frac{1}{5}$ ἢ $\frac{1}{6}$ τὸν λόγον τοῦτον ἄνευ ἐπαισθητῆς τινος μεταβολῆς τοῦ ἀποτελέσματος.

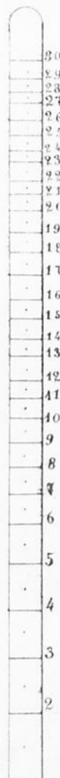
Ἡ ἀπόκλισις τῶν ταρσῶν, μετρουμένη ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας, ἰσοῦται σχεδὸν μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο δίσκων τοῦ στροβίλου, ὁπωσδήποτε ὅμως ἡ ἀπόκλισις αὕτη δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ 18—20 ὑφεκατόμετρα. Αἱ ἐσωτερικαὶ καὶ ἐξωτερικαὶ διαστάσεις τῶν ταρσῶν εἰσὶν ἄλλως τε ἀνάλογοι τοῦ λόγου τῶν διαμέτρων τοῦ τροχοῦ.

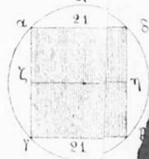
445. Ἡ καθημερινὴ χρῆσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν στροβίλων, καταδεικνύουσι καθ' ἑκάστην τὰ μεγάλα αὐτῶν πλεονεκτήματα. Σρόβιλός τις π. χ. τοῦ Φουρνεϋρῶν εὑρισκόμενος εἰς τὸ Μέλαν δάσος, τίθεται εἰς κίνησιν διὰ πτώσεως ὕδατος 108 μέτρων ὕψους.

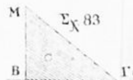
Ὁ στρόβιλος οὗτος οὗ ἡ διάμετρος ἐστὶ 0,55 μόνον, ἐκτελεῖ 2300 περιστροφὰς κατὰ λεπτὸν, καὶ ἔχει δύναμιν 40 ἵππων, χρησιμοποιεῖ δὲ τὰ 0,75 τῆς δυνάμεως τῆς πτώσεως. Πειράματα γενόμενα ἐπὶ ἑτέρου στροβίλου κατέδειξαν ὅτι διὰ πτῶσιν ὕδατος 1,15, μ. οὗτος ἐχρησιμοποίει τὰ 0,66 τῆς δυνάμεως ταύτης, καὶ τέλος μὲ πτῶσιν 0,31 ἐχρησιμοποίει ἔτι τὰ 0,60 τῆς δυνάμεως ταύτης, ἀποτελέσματα ἅτινα οὐδεὶς ὑδραυλικὸς τροχὸς ἑτέρου τινος συστήματος, ἠδυνήθη νὰ παράξῃ ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας.

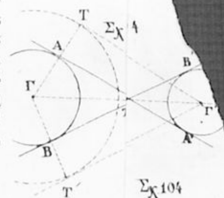
ΤΕΛΟΣ.

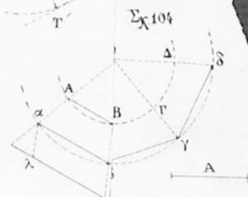
Πίναξ Β

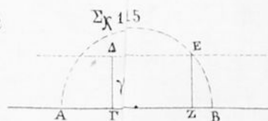


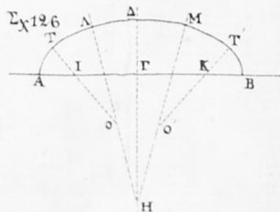


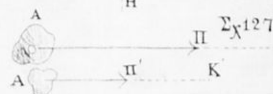






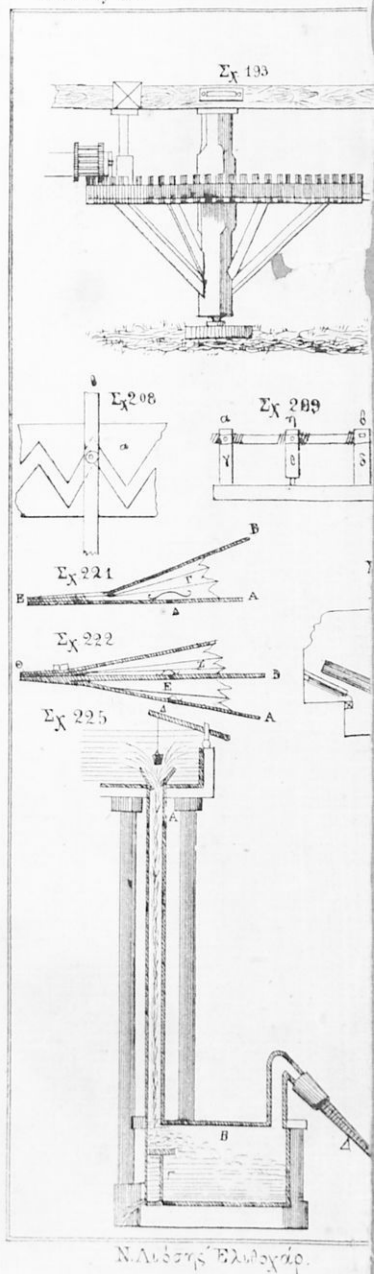






Ν. Λιόσης Ἐλιθοχάρ.

Πίναξ Δ.

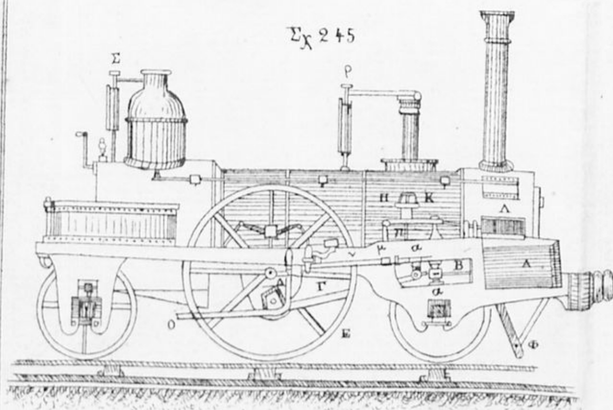


Ν. Λιόστης Ελωδογράφ.

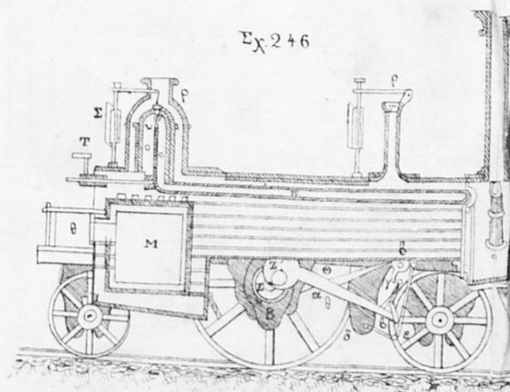
Πίναξ Ε.

Σχ. 238

Σχ. 239



Σχ. 245



Σχ. 246

Ν. Λιόσης Ελιθοχάραξε